Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 1 hora y 50 minutos.

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta:
   i. Si $\vec{r}$ es el campo vectorial radial $\vec{r}(x,y,z) = \langle x,y,z\rangle$ y $r = \|\vec{r}\|$, entonces $\mathbf{div}(r^2\vec{r}) = 3r^2$.
   ii. Si S es la superficie cilíndrica parametrizada por $\Phi(\theta,u) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u)$, para $\theta \in [0,2\pi]$ y $u \in [0,1]$, entonces $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = 0$ para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle 0,0,z\rangle$.

   (6 puntos)

2. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle e^x y, e^x, 1\rangle$.
   i. Demuestre que $\vec{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial conservativo y encuentre un potencial para $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Calcule $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$ donde σ es un camino que une los puntos $(0,1,2)$ y $(0,3,5)$.

   (6 puntos)

3. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle y, 2z, -3y^2\rangle$, el paraboloide $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, z = 9 - x^2 - y^2, \ z \geq 0\}$, y el disco $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 \leq 9, \ z = 0\}$, ambas superficies orientadas hacia arriba.
   i. Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}$, el rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Explique claramente por qué $\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$.
   iii. Calcule tal integral.

   (6 puntos)

4. Considere la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
   i. Encuentre todos los puntos críticos de la función f.
   ii. Clasifique los puntos críticos de la función f.
   iii. Haga un boceto de la superficie $z = f(x,y)$ en $\mathbb{R}^3$ definida por la función f.

   (6 puntos)

5. La integral $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\, dz dy dx$ calcula la masa de un sólido (cuya densidad está dada por la función $\rho = \operatorname{sen}(y^2)$). Dibuje el sólido y calcule su masa. (6 puntos)

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 1 **hora y** 50 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta:
   i. Si $\vec{r}$ es el campo vectorial radial $\vec{r}(x,y,z) = \langle x, y, z\rangle$ y $r = \|\vec{r}\|$, entonces $\mathbf{div}(r^2\vec{r}) = 6r^2$.
   ii. Si S es la superficie cilíndrica parametrizada por $\Phi(\theta, u) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u)$, para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $u \in [0,1]$, entonces $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = 0$ para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle 0, 0, -z\rangle$.

   (6 puntos)

2. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle 2xe^y, x^2e^y, 1\rangle$.
   i. Demuestre que $\vec{\mathbf{F}}$ es un campo vectorial conservativo y encuentre un potencial para $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Calcule $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$ donde σ es un camino que une los puntos $(0,3,2)$ y $(0,1,5)$.

   (6 puntos)

3. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle x, 2x, 3y^2\rangle$, el paraboloide $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$, y el disco $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\}$, ambas superficies orientadas hacia arriba.
   i. Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}}$, el rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$.
   ii. Explique claramente por qué $\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S}$.
   iii. Calcule tal integral.

   (6 puntos)

4. Considere la función $f(x,y) = -\dfrac{x^3}{3} + 4xy - 2y^2 + 1$.
   i. Encuentre todos los puntos críticos de la función f.
   ii. Clasifique los puntos críticos de la función f.
   iii. Haga un boceto de la superficie $z = f(x,y)$ en $\mathbb{R}^3$ definida por la función f.

   (6 puntos)

5. La integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \cos(y^2)\, dz dy dx$ calcula la masa de un sólido (cuya densidad está dada por la función $\rho = \cos(y^2)$). Dibuje el sólido y calcule su masa. (6 puntos)

Examen Final – Cálculo Vectorial

Solución

1.

Tema A.

i. Falso. Si $\vec{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $r = \|\vec{r}\|$, entonces $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y

$$r^2\vec{r} = \langle x(x^2+y^2+z^2), y(x^2+y^2+z^2), z(x^2+y^2+z^2)\rangle,$$

luego

$$\begin{aligned}\mathbf{div}(r^2\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right)\\ &= 5x^2+5y^2+5z^2 = 5r^2.\end{aligned}$$

ii. Verdadero. Si S está parametrizada por $\Phi(\theta, u) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $u \in [0,1]$, para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle 0, 0, z\rangle$,

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,u)) \cdot \vec{n}\, dA = \iint_D \langle 0,0,u\rangle \cdot \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\rangle\, du\, d\theta = 0,$$

puesto que $\vec{n} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\rangle$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,u))$.

Tema B.

i. Falso. Si $\vec{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $r = \|\vec{r}\|$, entonces $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y

$$r^2\vec{r} = \langle x(x^2+y^2+z^2), y(x^2+y^2+z^2), z(x^2+y^2+z^2)\rangle,$$

luego

$$\begin{aligned}\mathbf{div}(r^2\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y(x^2+y^2+z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z(x^2+y^2+z^2)\right)\\ &= 5x^2+5y^2+5z^2 = 5r^2.\end{aligned}$$

ii. Verdadero. Si S está parametrizada por $\Phi(\theta, u) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, u)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $u \in [0,1]$, para el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle 0, 0, -z\rangle$,

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,u)) \cdot \vec{n}\, dA = \iint_D \langle 0,0,-u\rangle \cdot \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\rangle\, du\, d\theta = 0,$$

puesto que $\vec{n} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0\rangle$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{F}}(\Phi(\theta,u))$.

2.

Tema A. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle e^x y, e^x, 1\rangle$.

i. Como el campo es suave en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ y

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \left| \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x y & e^x & 1 \end{pmatrix} \right| = \langle 0, 0, 0\rangle,$$

así que el campo es conservativo. En efecto, $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla}(ye^x + z)$.

ii. Para calcular $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$, donde σ es *cualquier* camino que une los puntos $(0, 1, 2)$ y $(0, 3, 5)$, por el *teorema fundamental de las integrales de linea*, solo necesitamos evaluar el potencial $ye^x + z$ en los extremos del camino:

$$\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = (ye^x + z)\big|_{(0,1,2)}^{(0,3,5)} = 8 - 3 = 5.$$

Tema B. Considere el campo vectorial $\vec{\mathbf{F}} = \langle 2xe^y, x^2e^y, 1\rangle$.

i. Como el campo es suave en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ y

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \left| \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xe^y & x^2e^y & 1 \end{pmatrix} \right| = \langle 0, 0, 0\rangle,$$

así que el campo es conservativo. En efecto, $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\nabla}(x^2e^y + z)$.

ii. Para calcular $\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}$, donde σ es *cualquier* camino que une los puntos $(0, 3, 2)$ y $(0, 1, 5)$, por el *teorema fundamental de las integrales de linea*, solo necesitamos evaluar el potencial $x^2e^y + z$ en los extremos del camino:

$$\int_\sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s} = (x^2e^y + z)\big|_{(0,3,2)}^{(0,1,5)} = 5 - 2 = 3.$$

3.

Tema A. Sea $\vec{\mathbf{F}} = \langle y, 2z, -3y^2\rangle$ y consideremos las superficies

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\right\},$$

ambas orientadas hacia arriba.

i. El rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ es

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{F}} = \left| \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2z & -3y^2 \end{pmatrix} \right| = \langle -6y - 2, 0, -1\rangle.$$

ii. Por el *teorema de Stokes*, dado que S es una superficie orientada, parametrizada como una gráfica cuya frontera es una curva cerrada c, y $\vec{\mathbf{F}}$ un campo vectorial C^1 definido sobre S,

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}.$$

Como en el caso de las superficies S_1 y S_2 ambas están orientadas hacia arriba y tienen como frontera común el círculo c de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ en el plano x-y, tenemos que

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}.$$

iii. Podemos entonces calcular tal integral, según la ecuación anterior, usando la superficie S_2 (es la opción más fácil, ya que el vector normal unitario a la superficie $\vec{n} = \langle 0, 0, 1\rangle$ es constante) como

$$\iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} (-1)\, dS = -\text{Área}(S_2) = -9\pi.$$

Tema B. Sea $\vec{\mathbf{F}} = \langle x, 2x, 3y^2\rangle$ y consideremos las superficies

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\right\}$$

y

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\right\},$$

ambas orientadas hacia arriba.

i. El rotacional del campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ es

$$\mathbf{rot}\, \vec{\mathbf{F}} = \left| \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 2x & 3y^2 \end{pmatrix} \right| = \langle 6y, 0, 2\rangle.$$

ii. Por el *teorema de Stokes*, dado que S es una superficie orientada, parametrizada como una gráfica cuya frontera es una curva cerrada c, y $\vec{\mathbf{F}}$ un campo vectorial C^1 definido sobre S,

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}.$$

Como en el caso de las superficies S_1 y S_2 ambas están orientadas hacia arriba y tienen como frontera común el círculo c de ecuación $x^2 + y^2 = 9$ en el plano x-y, tenemos que

$$\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \int_c \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{s}.$$

iii. Podemos entonces calcular tal integral, según la ecuación anterior, usando la superficie S_2 (es la opción más fácil, ya que el vector normal unitario a la superficie $\vec{n} = \langle 0, 0, 1\rangle$ es constante) como

$$\iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_2} (2)\, dS = 2\,\text{Área}(S_2) = 18\pi.$$

4. Tema A. Considere la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

i. Para encontrar los puntos críticos de la función f calculamos su gradiente y lo igualamos a $\vec{0}$:

$$\vec{\nabla} f = \langle 4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x \rangle = \langle 0, 0 \rangle,$$

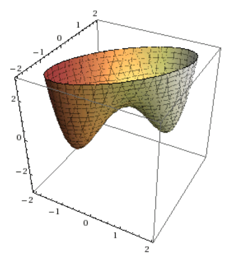
de donde $y = x^3$, $x = y^3$ y, entonces, $x = x^9$. Los tres puntos críticos que tiene f son, entonces, $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

ii. Para clasificar los puntos críticos de f calculamos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} = 144x^2y^2 - 16.$$

En $(0,0)$ este determinante es negativo, luego tal punto es un *punto de silla*, mientras que en $(1,1)$ y $(-1,-1)$ tal determinante es positivo y, además, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 = 12$ es positivo, luego estos dos puntos son *mínimos locales*.

iii. Poniendo la información local encontrada anteriormente tenemos que la gráfica de la función $z = f(x,y)$ es de la forma:



Tema B. Considere la función $f(x,y) = -\dfrac{x^3}{3} + 4xy - 2y^2 + 1$.

i. Para encontrar los puntos críticos de la función f calculamos su gradiente y lo igualamos a $\vec{0}$:

$$\vec{\nabla} f = \langle -x^2 + 4y, -4y + 4x \rangle = \langle 0, 0 \rangle,$$

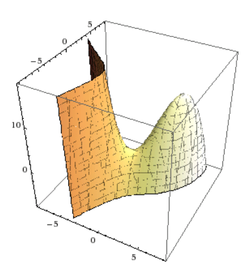
de donde $y = x$, $x^2 = 4y = 4x$ y, entonces, $x(x-4) = 0$. Los dos puntos críticos que tiene f son, entonces, $(0,0)$ y $(4,4)$.

ii. Para clasificar los puntos críticos de f calculamos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = 8x - 16.$$

En $(0,0)$ este determinante es negativo, luego tal punto es un *punto de silla*, mientras que en $(4,4)$ tal determinante es positivo y, además, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2x = -8$ es negativo, luego este punto es un *máximo locales*.

iii. Poniendo la información local encontrada anteriormente tenemos que la gráfica de la función $z = f(x,y)$ es de la forma:



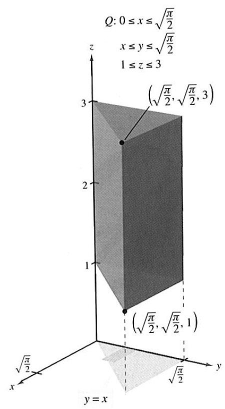
5. Tema A. La integral

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\, dz dy dx$$

calcula la masa de un sólido Q cuya densidad está dada por la función $\rho = \operatorname{sen}(y^2)$. Tal sólido está parametrizado, según los límites de esta integral, como

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad 1 \leq z \leq 3.$$

Podemos dibujar tal dominio en $\mathbb{R}^3$ como:



Su masa no se puede calcular directamente con la integral anterior, para tal fin usamos otro orden de integración, por ejemplo con la parametrización

$$0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 0 \leq x \leq y \quad \text{y} \quad 1 \leq z \leq 3,$$

es decir, con la integral

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} \int_1^3 \operatorname{sen}(y^2)\, dz dx dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} 2\operatorname{sen}(y^2)\, dx dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2y \operatorname{sen}(y^2)\, dy = \left(-\cos(y^2)\right|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1.$$

Tema B. La integral

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \cos(y^2)\, dz dy dx$$

calcula la masa de un sólido Q cuya densidad está dada por la función $\rho = \cos(y^2)$. Tal sólido está parametrizado, según los límites de esta integral, como

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad 1 \leq z \leq 3,$$

y podemos dibujar tal dominio en $\mathbb{R}^3$ exactamente igual que antes. Así, para calcular tal integral usamos la parametrización

$$0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 0 \leq x \leq y \quad \text{y} \quad 1 \leq z \leq 3,$$

es decir,

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} \int_1^3 \cos(y^2)\, dz dx dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^{y} 2\cos(y^2)\, dx dy = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2y \cos(y^2)\, dy = \left(\operatorname{sen}(y^2)\right|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1.$$