Cuantización y Deformación

Alexander Cardona*

Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles,
CP 218, Campus Plaine Boulevard du Triomphe
B - 1050 Bruxelles, Belgique.
acardona@ulb.ac.be

Resumen

En estas notas se presenta la teoría matemática de la cuantización desde el punto de vista de la deformación, según el enfoque geométrico, resaltando algunos de los resultados más importantes (en matemáticas y física) en este campo en la última década, señalando algunos problemas abiertos actualmente y nuevas direcciones en la investigación en esta área. Esta es una versión escrita de un seminario dictado por el autor en la Universidad del Norte, Barranquilla, en agosto de 2003.

Introducción

Una de las principales diferencias entre las descripciones clásica y cuántica de la dinámica de un sistema físico es que, mientras en la primera las coordenadas que parametrizan el conjunto de estados del sistema (y los observables del sistema en sí, siendo funciones) "conmutan", en la segunda (donde los observables son operadores) no. El procedimiento que permite encontrar una descripción cuántica de la dinámica de un sistema físico apartir de su descripción clásica es llamado *cuantización*, y la forma intuitiva en que ello se hace para los sistemas físicos fundamentales sugiere una idea obvia: *deformar* la estructura algebráica de la dinámica clásica hasta obtener una estructura "no conmutativa" adecuada para llevar a cabo la descripción cuántica.

La realización matemática rigurosa de este procedimiento, que aparece en la literatura en los años setenta [1], se ha venido llevando a cabo en las dos últimas décadas; primero usando métodos algebráicos (formales) y después combinando estos métodos con ideas geométricas que han dado pie no solamente a una nueva forma de entender la cuantización en física, sino a desarrollos interesantes en varias áreas de las matemáticas. El aporte fundamental en esta area dado por

*Present Address: Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan. Email: cardona@math.keio.ac.jp

el físico-matemático Boris Fedosov en [9] será el interés principal de las páginas que siguen, cuyo contenido describiremos a continuación. En la primera sección recordaremos la estructura geométrica y algebráica de la dinámica clásica de un sistema físico (con un número *finito* de grados de libertad), introduciendo la idea de variedad simpléctica y variedad de Poisson, y mostrando cómo tales objetos capturan la escencia de dicha descripción de la dinámica. La segunda sección trata del procedimiento de cuantización, en general, y describe la teoría de la cuantización por deformación algebráica, presentando los puntos esenciales de la formulación de Fedosov y su teorema de existencia de una cuantización -por este método- de toda variedad simpléctica. Finalmente, en la última sección describiremos algunos aspectos adicionales de esta teoría y su relación con otras áreas clásicas de la matemática moderna —como la teoría del índice—, mencionaremos algunas recientes conjeturas y desarrollos asociados con esta construcción y señalaremos problemas aún no resueltos y áreas por abordar en este dominio.

Aparte de la presentación, no hay originalidad del autor en ninguna de las ideas y resultados que se presentan a continuación. Estas notas recogen contenidos tratados en un seminario de física y matemáticas dictado en la Universidad del Norte, complementadas por notas redactadas por el autor tras discusiones con algunos colegas alrededor del tema. Tampoco es completa y exhaustiva la lista de referencias, la cual solo incluye las referencias originales a los principales resultados y algunos textos que tratan el tema con más generalidad, donde el lector podrá encontrar mas referencias a la literatura especializada sobre el tema.

1 Dinámica Clásica y Geometría

La descripción clásica de la dinámica de un sistema físico puede llevarse a cabo en múltiples formas, desde la descripción Newtoniana hasta las más elaboradas y usuales descripciones Lagrangiana y Hamiltoniana, cuya incorporación al estudio de la estructura de las teorías físicas ofrece –entre otras– gran facilidad para el estudio de la relación entre simetrías y leyes de conservación (a través del teorema de Noether en la descripción lagrangiana, por ejemplo), y una visión apropiada para pasar a la correspondiente descripción cuántica (ver, e.g. [15]). El marco geométrico en el cual las descripciones lagrangiana y hamiltoniana son llevadas a cabo es, matemáticamente, el de las variedades simplécticas –que corresponden a lo que en física se conoce como *espacios de fase*, y la estructura algebráica fundamental es la dada por el corchete de Poisson. En esta sección describiremos ambos objetos.

1.1 Ecuaciones de Movimiento y Corchete de Poisson

Dado un sistema físico cuya configuración queda determinada por el valor en cada instante de N variables (en general cualquier conjunto de variables, no necesariamente coordenadas, e.g. temperaturas, potenciales,...), llamadas coordenadas generalizadas, el espacio de fase del sistema es el espacio de dimension $2N$ cuyas coordenadas contienen en las primeras N componentes dichas coordenadas generalizadas, y en las demás N sus correspondientes *momentos generalizados*, i.e. los momentos correspondientes a las N velocidades generalizadas.

Si denotamos por Q el espacio de configuraciones del sistema (parametrizado por las coordenadas generalizadas $\{q_1, \ldots, q_N\}$), su espacio tangente en un punto $q \in Q$ es un espacio vectorial cuya base son los vectores tangentes $\{\frac{\partial}{\partial q_1}|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_N}|_q\}$, y su espacio dual es entonces generado por los covectores (duales) $\{dq_1|_q, \ldots, dq_N|_q\}$. Tomando la colección de todos los espacios tangentes y cotangentes a Q, con la proyección natural, se obtienen entonces los haces tangente y cotangente del espacio de configuraciones, notados TQ y T^*Q, respectivamente. Si además identificamos las componentes que definen un elemento $m_q \in T_q^*Q$ con los momentos generalizados, i.e. escribimos

$$m_q = p_1 dq_1|_q + \cdots + p_N dq_N|_q,$$

obtenemos que de esta forma, matemáticamente, el espacio de fase de un sistema físico con espacio de configuraciones Q es el fibrado cotangente a éste último [12]. La dimensión del espacio de configuraciones representa el número de grados de libertad del sistema.

La *Lagrangiana* del sistema es la funcion real de coordenadas y velocidades[1] $L(q_i, \dot{q_i})$ en términos de la cual, a través de un principio de acción extremal, la trayectoria física del sistema en el espacio de configuraciones queda completamente determinada por las soluciones a las *ecuaciones de Euler-Lagrange*[2][15]

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} = 0. \tag{1}$$

En términos de la lagrangiana, los "*momentos generalizados*" p_i estan dados por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}, \tag{2}$$

y la función *Hamiltoniana* del sistema puede escribirse como

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q_i} - L(q_i, \dot{q_i}). \tag{3}$$

Desde el punto de vista de la dinámica clásica, las ecuaciones de Euler-Lagrange (1) son equivalentes a las las *Ecuaciones de Hamilton*,

$$\dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \text{y} \qquad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{4}$$

[1]Notación: $\dot{q_i} = \frac{dq_i}{dt}$, donde t es usualmente el tiempo.

[2]A lo largo del texto usaremos la convensión de suma sobre índices repetidos, e.g. $\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right)$ será escrito como $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}$.

Los momentos p_i son vistos entonces como las coordenadas sobe cada fibra del haz cotangente $M = T^*Q$, es decir el espacio de fase del sistema, y a las funciones reales continuas y C^∞-diferenciables sobre tal espacio las llamaremos *"observables físicos"* del sistema.[3] Sobre el espacio $C^\infty(M)$ de observables, definimos una operación

$$\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

llamada *Corchete de Poisson*, que a cada dos observables f y g asocia un tercer observable definido como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}. \tag{5}$$

Es fácil ver que el conjunto de observables del sistema, que es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de funciones por escalares, queda dotado adicionalmente de una estructura de álgebra de Lie con esta operación, es decir que para f, g y h en $C^\infty(M)$, y α, β escalares,

$$\begin{aligned} &\{f, g\} = -\{g, f\} \\ &\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} \\ &\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

El álgebra definida de esta forma es el *álgebra de Poisson* del sistema en cuestión, denotada $(\mathcal{A}_o = C^\infty(M), \{,\})$, y será el objeto algebráico fundamental para las construcciones que aquí pretendemos describir.[4] Nótese que, dado que para cualquier observable h,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial h}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} = \{h, H\},$$

usando los corchetes de Poisson podemos escribir las ecuaciones de movimiento como

$$\{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad y \quad \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{7}$$

Además, tenemos una sencilla caracterización de las constantes de movimiento del sistema, ya que $h \in C^\infty(M)$ es una constante del movimiento sí y solamente sí $\{h, H\} = 0$.

[3]Ejemplos de tales funciones son la energía cinética (usualmente cuadrática en las velocidades) y los potenciales (usualmente polinomiales en las posiciones).

[4]El álgebra $C^\infty(M)$ es un álgebra *conmutativa* con respecto a la multiplicación usual de funciones reales, i.e. $fg - gf = 0$, para cualquier $f, g \in C^\infty(M)$. Sinembargo, no lo es con respecto al corchete de Poisson.

1.2 Variedades Simplécticas y de Poisson

Geométricamente el espacio de fase de un sistema físico tiene estructura de variedad simpléctica (es el haz cotangente del espacio de configuraciones correspondiente), en esta sección veremos como la estructura simpléctica determina completamente la dinámica del sistema, y definiremos un objeto más general: las variedades de Poisson.

Definición 1. *Una variedad simpléctica* (M, ω) *es una variedad* M *de dimensión par dotada de una 2-forma* ω *cerrada (i.e.* $d\omega = 0$*) y no degenerada.*

La propiedad de no degeneración (es decir que $i_X\omega = 0 \Leftrightarrow X = 0$, donde $i_X\omega = \omega(X, \cdot)$ es la evaluación de la forma en el campo vectorial X) implica que hay un isomorfismo entre los espacios de campos vectoriales y 1-formas, o covectores, sobre M.

Sea Q el espacio de configuraciones de un sistema físico, este espacio tiene estructura natural de variedad diferenciable (i.e. podemos darle coordenadas de tal forma que –localmente– este espacio sea equivalente a $\mathbb{R}^N$, para algun N positivo fijo, y los correspondientes cambios de coordenadas puedan describirse por medio de funciones diferenciables) y sobre su fibrado cotangente $T^*Q \to Q$ existe una dos forma simplectica ω que en coordenadas canónicas (coordenadas y momentos generalizados) puede escribirse [12]

$$\omega = dp_i \wedge dq_i. \tag{8}$$

Cada observable físico $f \in C^\infty(T^*Q)$ define un *campo vectorial Hamiltoniano* X_f dado por la ecuación

$$\omega(X_f, \cdot) = -df. \tag{9}$$

Una observación de importancia particular en este punto es que la derivada de Lie de la forma simpléctica a lo largo de un campo vectorial Hamiltoniano es cero:

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = d(\omega(X_f)) + d\omega(X_f) = d(-df) + d\omega(X_f) = 0,$$

lo que quiere decir que la forma simpléctica es "constante" sobre las curvas integrales de dichos campos.

Para apreciar mejor el significado de esta última afirmación, consideremos una función f sobre el espacio de fase T^*Q. Su derivada exterior es localmente $df = \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i$, lo que implica que localmente su campo vectorial Hamiltoniano puede escribirse en coordenadas locales como

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i},$$

y entonces, si $\gamma(t) = (p_i(t), q_i(t))$ es una curva integral de tal campo vectorial, obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = \dot{q_i} \qquad \text{y} \qquad -\frac{\partial f}{\partial q_i} = \dot{p_i},$$

precisamente las ecuaciones de Hamilton (4) para una función Hamiltoniana f. Así, la dinámica clásica del sistema está "encapsulada" en la 2-forma ω.

La estructura algebráica del conjunto de observables del espacio de fase T^*Q tambien esta determinada por la estructura simpléctica, ya que el corchete de Poisson puede expresarse en términos de la forma simpléctica. En efecto, dada una variedad simpléctica arbitraria (M, ω) y dos observables $f, g \in C^\infty(M)$, el corchete de f con g puede definirse a partir de ω como

$$\{f, g\} = X_f(g) = -X_g(f) = \omega(X_f, X_g), \tag{10}$$

donde X_f y X_g son los campos vectoriales Hamiltonianos definidos por f y g, respectivamente. Así, en coordenadas locales,

$$\{f, g\} = X_f(g) = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i},$$

lo que corresponde exactamente con la definición anterior. Para las coordenadas canónicas (q_i, p_i) esto significa, por ejemplo, que

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \tag{11}$$

Finalmente, obsérvese que dados campos vectoriales X y Y sobre una variedad simpléctica, su corchete de Lie es definido por $[X, Y] = XY - YX$, y hay un isomorfismo entre las álgebras de observables (con el corchete de Poisson) y de campos vectoriales Hamiltonianos (con el corchete de Lie) dado que, para cualquier par de observables $f, g \in C^\infty(M)$,

$$[X_f, X_g] \ = X_{X_f(g)} \ = X_{\{f,g\}}.$$

Ejemplo 1. Consideremos el oscilador armónico unidimensional de masa unidad, cuyos espacios de configuración y fase son $\mathbb{R}$ y $T^*\,\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$, con forma simpléctica $\omega = dp \wedge dq$, respectivamente. La energía del sistema esta dada por la función Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2),$$

cuyo campo vectorial Hamiltoniano es

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} = p\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial p}.$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{q} = p \qquad \text{y} \qquad \dot{p} = -q,$$

como esperabamos.

Ejemplo 2. Consideremos una partícula cargada bajo la influencia de un campo electromagnético en el espacio-tiempo Minkowskiano Q, el espacio de configuraciones. El espacio de fase $TQ^* \simeq \mathbb{R}^8$ puede ser parametrizado con coordenadas $(q_i, p_i) \equiv (q_1, q_2, q_3, q_4, p_1, p_2, p_3, p_4)$, donde $\pi : TQ^* \to Q$ es la proyección natural $\pi(q_i) = x_i$, $p_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$, y L es la lagrangiana del sistema. El campo electromagnético[5] F perturba geométricamente la variedad simpléctica asociada al sistema como sigue. La forma simpléctica canónica del espacio de fase es

$$\omega = dq_i \wedge dp_i,$$

y en términos de ésta podemos encontrar las ecuaciones de movimiento correspondientes, i.e. las ecuaciones de Hamilton asociadas a un Hamiltoniano conteniendo, en particular, la información concerniente a la interacción entre la partícula y el campo. Una forma alternativa de encontrar las ecuaciones de movimiento es utilizar el Hamiltoniano libre del sistema (ignorando los términos de interacción en él) pero introduciendo la interacción en la forma simpléctica. De hecho, las ecuaciones de Maxwell ($*d*F = j$ y $dF = 0$) implican que F es cerrada y, tomando el pull-back $F' = \pi^*(F)$ de F por la proyección π, es fácil verificar que la 2-forma

$$\omega_{e,F} = \omega + eF',$$

es simpléctica, donde e denota la carga de la partícula. Más aun, esta forma simpléctica con el Hamiltoniano libre da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento que la forma simpléctica canónica con un Hamiltoniano de interacción. Esta es la versión geométrica del conocido método de *acople mínimo*: cambiar las variables de momento p por "$p + eA$", donde A es el potencial electromagnético (definido por $F = dA$) [12].

Todas las variedades simplécticas de la misma dimensión son localmente indistinguibles, e isomorfas a un haz cotangente. Este es el contenido del conocido *Teorema de Darboux*: Alrededor de cada punto en una variedad simpléctica existe siempre un abierto y un sistema de coordenadas en el cual la forma simpléctica tiene la forma (8). Por lo tanto, todas las expresiones en coordenadas locales que hemos escrito anteriormente siguen siendo válidas *localmente* sobre cualquier variedad simpléctica.

Una generalización del concepto de variedad simpléctica, que contiene los elementos algebráicos necesarios para el estudio de la dinámica de un sistema

[5] F es una 2-forma sobre el espacio de configuraciones llamada *Tensor de Faraday*. En coordenadas locales sobre Q, $F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu$, donde los coeficientes $F^{\mu\nu}$ estan dados por la matriz

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

E y B denotan los campos eléctrico y magnético, respectivamente.

físico, es la siguiente.

Definición 2. *Una variedad de Poisson* $(M, \{,\})$ *es una variedad* M *dotada de un bracket* $\{,\}$ *que satisface las condiciones de álgebra de Lie* (6) *junto con la identidad de Leibniz: para todos* $f, g, h \in C^\infty(M)$*,*

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Toda variedad simpléctica es una variedad de Poisson –como sigue de la definición de la estructura de Poisson dada en (10). Sin embargo, no toda variedad de Poisson posee una estructura simpléctica (esto ocurre, por ejemplo, cuando se trabaja con cocientes de variedades simplécticas por grupos de simetría, ver [2][18]).

2 Cuantización por Deformación

En esta sección, después de discutir el significado de "cuantizar" la dinámica clásica de un sistema físico, describiremos el proceso de cuantización por deformación para una variedad simpléctica empleado en [9]. No incluiremos las pruebas de los principales resultados, las cuales pueden encontrarse en la referencia original o, en más detalle, en [10].

2.1 Condiciones de Cuantización

Dada una variedad de Poisson $(M, \{,\})$ o una variedad simpléctica (M, ω) cuya estructura de Poisson modela la dinámica clásica de un sistema físico, consideremos el álgebra de Poisson de observables $(\mathcal{A}_o = C^\infty(M), \{,\})$ correspondiente. El proceso de cuantización comienza por encontrar un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una representación de dicha álgebra en el álgebra de operadores autoadjuntos actuando sobre $\mathcal{H}$ (con el corchete de Lie). Una vez identificados el espacio de Hilbert y la representación del algebra de observables, la dinamica cuántica del sistema puede llevarse a cabo de múltiples maneras, ya sea mediante funciones de onda que evolucionan en el tiempo o con evolución temporal de operadores. Según Dirac[8], una teoría cuántica admisible debe asociar a cada observable clásico f un observable cuántico $\widehat{f}$ (actuando sobre $\mathcal{H}$ y perteneciendo al algebra correspondiente con corchete de Lie $[\widehat{f}, \widehat{g}] = \widehat{f}\widehat{g} - \widehat{g}\widehat{f}$), y debe verificarse que

1. La aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ es lineal.
2. Si f es constante entonces $\widehat{f}$ debe ser el operador de multiplicación (por la constante f).

3. Debe haber una correspondencia entre la dinámica clásica y cuántica en el siguiente sentido: Si $\{f, g\} = h$, entonces

$$[\widehat{f}, \widehat{g}] = -i\hbar\widehat{h}, \tag{12}$$

donde $\hbar$ denota la constante de Planck, una constante universal.

Estas tres condiciones, llamadas *condiciones de Dirac*, dan las propiedades fundamentales que debe tener la representación del álgebra de observables clásicos sobre M en el álgebra observables cuánticos sobre $\mathcal{H}$. La dinámica cuántica se describe en términos de *funciones de onda*, éstas son funciones definidas sobre el espacio de configuraciones del sistema y tomando valores complejos, en términos de las cuales toda la información probabilística del sistema puede ser encontrada: las cantidades $\psi^*\psi$, donde $*$ denota conjugación compleja, corresponden a amplitudes de probabilidad.

La tercera condición, tambien llamada *principio de correspondencia*, es tal vez la más importante (físicamente) y difícil de satisfacer (matemáticamente). Matemáticamente significa que la *no conmutatividad* del álgebra de observables sobre el espacio de Hilbert es una característica de la descripción cuántica: nótese que si bien, por ejemplo, las variables canónicas (posiciones q_j y momentos p_i) conmutan –como funciones– sobre el espacio de fase (es decir, $q_j p_i - p_i q_j = 0$), según (11) su corchete de Poisson no es nulo; la condición (12) implica que la correspondiente relación entre su contraparte cuántica debe ser

$$[\widehat{p_i}, \widehat{q_j}] = -i\hbar\delta_{ij}.$$

La constante $\hbar$ representa el más pequeño cuanto de acción realizable físicamente y, aunque su valor preciso ha sido medido experimentalmente, es común pensar que de poderse variar hasta llevarlo a cero, y según el principio de correspondencia, esto sería equivalente a tomar el "límite" cuando el álgebra cuántica –no conmutativa– de operadores coincide con el álgebra clásica –conmutativa– de observables, i.e. cuando el corchete de Lie se anula, tal como ocurre con el conmutador (aunque *no* el corchete de Poisson) entre funciones.

Hay diferentes aproximaciones al problema de obtener una cuantización de un sistema físico apartir de su estructura geométrica, es decir de su estructura simpléctica o de Poisson. Uno puede, por ejemplo, modelar las funciones de onda como secciones de un haz lineal $L \xrightarrow{\pi} M$ sobre el espacio de fase, y buscar condiciones para la existencia de tal espacio de Hilbert y la representación de observables a partir de una estructura simpléctica. Este procedimiento es llamado cuantización geométrica, y las condiciones para la existencia de haces lineales de (pre-)cuantización sobre la variedad simpléctica modelando el espacio de fase corresponden a las condiciones de cuantización de ciertas variables usualmente encontradas en física (ver, por ejemplo, [12][20]).

El procedimiento de cuantización que pretendemos describir en la siguiente sección, sinembargo, *no* pretende ni buscar un espacio de Hilbert apropiado para la realización de las tres condiciones de Dirac, ni una representación del álgebra clásica de operadores. En lugar de ello, y partiendo de una variedad de Poisson, este método busca *deformar* el álgebra de observables clásicos $\mathcal{A}_o$ en términos de un parámetro –la constante de Planck– hasta convertirla en un álgebra satisfaciendo condiciones más débiles, pero suficientes como para tener una interpretación del principio de correspondencia. La relación entre la teoría de deformación que presentaremos y otros métodos de cuantización ha sido estudiada, por ejemplo, en [3].

2.2 Cuantización por Deformación

La idea principal en la teoría de cuantización por deformación es construir una familia de álgebras parametrizadas de tal forma que el algebra inicial sea el álgebra conmutativa $\mathcal{A}_o$ de observables clásicos de un sistema físico y el álgebra "final" sea un álgebra no conmutativa $\mathcal{A}_\hbar$ satisfaciendo, entre otras cosas, el principio de correspondencia: $\lim_{\hbar\to 0}\mathcal{A}_\hbar = \mathcal{A}_o$ (la idea original de la teoría remonta a finales de los años setenta, ver [1], y la formulación matemática correspondiente a los ochenta y noventa). Como álgebra cuántica se escoge un álgebra formal sobre $\mathcal{A}_o$, i.e. un álgebra cuyos elementos son sumas de potencias formales arbitrarias con coeficientes en $\mathcal{A}_o = C^\infty(M)$, donde M denota una variedad de Poisson modelando la dinámica clásica de un sistema físico.

Definición 3. *Sea M una variedad de Poisson y t un parámetro formal. Definimos el álgebra de deformación del álgebra $\mathcal{A}_o = C^\infty(M)$ como*

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_o[\![t]\!] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,\ a_k \in \mathcal{A}_o \right\}.$$

Es importante recalcar que en esta definición las sumas son formales, en el sentido de la formalidad del parámetro t y la consecuente ausencia de noción de convergencia. La adición de dos elementos en $\mathcal{A}_t$ debe hacerse 'por componentes', es decir 'potencia por potencia', y la multiplicación por escalares de forma obvia.

Una vez definida la deformación del álgebra, el paso importante es la definición de una buena operación sobre ella con las propiedades necesarias para obtener una 'buena' cuantización. Como indicado anteriormente, el parámetro fundamental en la descripción cuántica –la constante de Planck $\hbar$, jugará el papel de parámetro de deformación del álgebra de observables clásicos; llegamos así a la siguiente definición de cuantización:

Definición 4. *Sea M una variedad de Poisson y $\mathcal{A}_o = C^\infty(M)$ su álgebra de Poisson asociada. Una* cuantización por deformación *de $\mathcal{A}_o$ es un producto asociativo*

$$*_\hbar : \mathcal{A}_\hbar \otimes \mathcal{A}_\hbar \to \mathcal{A}_\hbar$$

sobre el álgebra de deformación $\mathcal{A}_\hbar = C^\infty(M)[\![\hbar]\!]$ tal que

1. *El producto $f *_\hbar g$ tiene una expansión de la forma*

$$f *_\hbar g = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(f,g)\hbar^k, \tag{13}$$

donde los B_k son operadores bidiferenciales.

2. *$(\mathcal{A}_o, *_o) = \mathcal{A}_o$ con multiplicación puntual, es decir que $B_0(f,g) = f \cdot g$.*

3. *Sea $\{\ ,\ \}$ el corchete de Poisson sobre $\mathcal{A}_o$, entonces*

$$[f,g]_* = f *_\hbar g - g *_\hbar f = i\hbar\{f,g\} + o(\hbar^2),$$

donde $o(\hbar^2)$ denota términos de orden cuadrático o superior en $\hbar$. Esto implica que $B_1(f,g) - B_1(g,f) = i\hbar\{f,g\}$.

El producto $*_\hbar$ es llamado "producto estrella", y en adelante será notado simplemente por $*$.

La condición 1 en la definición implica que cada término en la expansión de $a * b$ tiene como coeficiente un polinomio en a, b y sus derivadas parciales con respecto a las coordenadas locales, la condición 2 implica que el producto $*$ es una *deformación* de la estructura conmutativa del álgebra de funciones (ver Ejemplo 3), y la última es *el principio de correspondencia débil* (comparar con (12)). Aunque no esta mencionado explícitamente, requerimos también la existencia de un elemento unidad $\mathbf{1}_\hbar$ con respecto al producto $*$.

Un caso particular es el de una estructura de Poisson proveniente de una forma simpléctica. En el caso de una variedad simpléctica (M,ω), la existencia de un producto estrella $*$ sobre el álgebra $\mathcal{A}_\hbar = C^\infty(M)[\![\hbar]\!]$ fue probada, usando argumentos cohomologicos, por M. De Wilde y P. Lecomte [7]. Unos años más tarde, y basados en una construcción diferente, H. Omori, Y. Maeda y A. Yoshioka dieron una nueva prueba [17], y de forma independientemente B. Fedosov dió una prueba completamente geométrica del mismo resultado en [9]. La construcción de Fedosov ha sido inspiración para muchos desarrollos en la teoría matemática de la deformación, la teoría del índice y otras areas, y será la construcción que describiremos en el resto del artículo.

Ejemplo 3. En el caso de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = dp_i \wedge dq_i)$, el producto de Moyal dado por

$$f * g = \mathsf{m}(\exp(\hbar\omega)(f \otimes g)) = f \cdot g + \hbar\{f,g\} + \cdots \tag{14}$$

es un ejemplo de un producto estrella. Es claro que el límite heurístico "$\hbar \to 0$" lleva el álgebra no conmutativa $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})[\![\hbar]\!]$ con producto estrella al álgebra conmutativa $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ con multiplicación puntual.

El Haz de Álgebras de Weyl. La construcción que describiremos usa fuertemente la estructura del haz de álgebras de Weyl sobre la variedad simpléctica (que en adelante asumiremos compacta y sin frontera). La idea es poner sobre cada punto de la variedad un álgebra formal de tal forma que el conjunto de todas las álgebras sobre la variedad formen un haz [10][17]. Concretamente, sea (M, ω) una variedad simpléctica, entonces el espacio tangente a cada punto $m \in M$, denotado T_mM, es un espacio vectorial simpléctico y la unión directa de todos estos espacios forma el haz tangente a M,

$$\pi : TM \to M.$$

Asociemos ahora a cada espacio vectorial simpléctico T_mM, $m \in M$, un álgebra formal W_m definida como el álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ cuyos elementos son series formales de la forma

$$a(y, \hbar) = \sum_{k,|\alpha|\geq 0} \hbar^k a_{k,\alpha} y^\alpha, \tag{15}$$

donde $\hbar$ es un parámetro formal, $y \in T_mM$ es un vector tangente con componentes $y = (y_1, \ldots, y_{2n})$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n})$ es un multi-índice y $y^\alpha = (y_1)^{\alpha_1} \cdots (y_{2n})^{\alpha_{2n}}$. La estructura algebráica en W_m esta dada por el siguiente producto (regla de Weyl):

$$\begin{aligned} a \circ b\,(x) &= \exp\left\{ -\frac{i\hbar}{2}\omega_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial z_j} \right\} a(y,\hbar)b(z,\hbar)|_{x=y=z} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^k \frac{1}{k!}\omega_{i_1j_1}\cdots\omega_{i_kj_k}\frac{\partial a}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_k}}\frac{\partial b}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_k}}, \end{aligned} \tag{16}$$

donde $\omega_{ij} = \omega(y_i, y_j)$. Finalmente, damos una graduación a las variables de la siguiente manera: el grado de las variables y_i es 1, el grado de $\hbar$ es 2, de tal forma que los términos en (15) estan ordenados en grado creciente $2k + |\alpha|$. Dado que el producto (16) preserva el grado, el álgebra de Weyl puede escribirse como

$$W_m = \bigoplus_{\ell\geq 0} W_m^\ell,$$

donde W_m^ℓ denota la parte de orden $\ell \in \mathbb{N}$. Esta graduación no es caprichosa, sino que resulta escencial para que la construcción funcione (ver más adelante).

El producto definido de esta forma es asociativo e independiente de la escogencia de base simpléctica del espacio T_mM, así que tomando la unión de estas álgebras formales obtenemos un haz $W(M) = \bigsqcup_{m\in M} W_m$ sobre M. El conjunto $\Gamma(W(M))$ de secciones de este haz, es decir de aplicaciones $s : U \subseteq M \to W(M)$, con adición y multiplicación definidas fibra por fibra, forman un álgebra. Más aún, cualquier elemento de $\mathcal{A}_\hbar = C^\infty(M)[\![\hbar]\!]$ define una sección de $W(M)$, y estas secciones forman el *centro* $Z(W(M))$ de $\Gamma(W(M))$. Para convencerse de ello basta ver que cualquier sección se escribe de la forma,

$$a(m, y, \hbar) = \sum_{k,|\alpha|\geq 0} \hbar^k a_{k,\alpha}(m) y^\alpha,$$

donde ahora hay coordenadas que describen la dependencia con el punto $m \in M$, así que el conjunto de secciones de $W(M)$ que conmutan con el producto definido por (16) son aquellas "independientes de y", i.e. los elementos de $\mathcal{A}_\hbar$. El problema de encontrar un producto estrella para $\mathcal{A}_\hbar$ va a resolverse encontrando la operación correspondiente sobre el álgebra de secciones $\Gamma(W(M))$ (el cual hereda la graduación descrita anteriormente $\Gamma(W(M)) = \bigoplus_{\ell\geq 0} \Gamma(W^\ell(M))$), y usando esta identificación. Para ello Fedosov usó algunas herramientas geométricas básicas.

La conección de Fedosov. La conección de un haz fibrado en geometría esta ligada a la posibilidad de separar el espacio tangente al fibrado en una parte *vertical*, correspondiente al espacio tangente a las fibras, y una *horizontal*, homeomorfa al espacio tangente a la base. La existencia de una conección es equivalente a la de una 1-forma sobre el espacio total con ciertas propiedades específicas, o a la de una derivada covariante[6] —es esta última definición con la que trabajaremos aquí.

Sea ∇ una conección sobre el fibrado tangente TM, es decir un operador diferencial de primer orden (actuando sobre vectores tangentes)

$$\nabla : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM \otimes T^*M)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(fs) = df\, s + f \nabla s,$$

donde $s \in \Gamma(TX)$, $f \in C^\infty(M)$ y df denota su diferencial. Una conección es llamada simpléctica si no tiene torsión y preserva la forma simpléctica, i.e.

$$\nabla\omega = 0. \tag{17}$$

Apartir de una conección simpléctica sobre (M, ω), es posible inducir una conección sobre el haz $W(M)$ de álgebras de Weyl,

$$\nabla^W : \Gamma(W(M)) \to \Gamma(W(M) \otimes T^*M)$$

tal que

$$\nabla^W(a \circ b) = (\nabla^W a) \circ b + a \circ (\nabla^W b),$$

y para todo $f \in Z(W(M)) \cong \mathcal{A}_\hbar$,

$$\nabla^W f = df.$$

[6]Una introducción general a estas herramientas en geometría y sus aplicaciones en Física puede encontrarse, por ejemplo, en el texto [13].

Esta conección preserva el grado, i.e.

$$\nabla^W : \Gamma(W^\ell(M)) \to \Gamma(W^\ell(M) \otimes T^*M),$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$, pero en general *no* es plana:

$$(\nabla^W)^2 \neq 0.$$

El punto central de la construcción es obtener a partir de la conección ∇^W una conección ∇^F *plana*, sobre el espacio $W(M) \otimes \Lambda(M)$ de formas diferenciales sobre M con valores en el álgebra de Weyl, tal que el espacio de secciones paralelas de $W(M) \otimes \Lambda(M)$ sea isomorfo a $C^\infty(M)[[\hbar]]$. Así, si este espacio de secciones es cerrado bajo el producto $\circ$ sobre el haz de Weyl, podremos definir el producto estrella $*$ sobre $\mathcal{A}_\hbar$ apartir de este. Fedosov mostró que un argumento de recurrencia da lugar a operadores ∂,

$$\delta_i : \Gamma(W^\ell(M)) \to \Gamma(W^{\ell+i}(M) \otimes T^*M),$$

tales que el operador definido por

$$\nabla^F = -\partial + \nabla^W + \delta_1 + \delta_2 + \cdots , \tag{18}$$

llamado *conección de Fedosov*, satisface $(\nabla^F)^2 = 0$. La conección de Fedosov puede escribirse, al igual que cualquier conección sobre un haz vectorial, como la suma de dos términos, la derivación usual sobre M y un endomorfismo sobre las fibras:

$$\nabla^F = d + \frac{i}{\hbar}[\gamma, \cdot],$$

donde $\gamma \in \Gamma(T^*M \otimes W(M))$.

Sea $\mathcal{W}_M^\nabla \subset \Gamma(W(M))$ el espacio de secciones planas o paralelas de $\Gamma(W(M))$ con respecto a la conección de Fedosov, i.e.

$$\mathcal{W}_M^\nabla = \{s \in \Gamma(W(M)) \text{ t.q. } \nabla^F s = 0\}.$$

La aplicación que a cada $s \in \Gamma(W(M))$ asocia su proyección sobre el centro de $\Gamma(W(M))$, $\sigma : a(m, y, \hbar) \mapsto a(m, 0, \hbar)$, es biyectiva sobre $\mathcal{W}_M^\nabla$, es decir que podemos definir una inversa

$$q = \sigma^{-1} : Z(W(M)) \to \mathcal{W}_M^\nabla. \tag{19}$$

Dado que $Z(W(M)) \cong \mathcal{A}_\hbar$, Fedosov usa estas aplicaciones para transportar el producto $\circ$ definido en (16) hacia $\mathcal{A}_\hbar$, definiendo un producto estrella como

$$a * b = \sigma(q(a) \circ q(b)). \tag{20}$$

Teorema [9] *La conección ∇^F es única y el producto estrella $*$ definido por la ecuación* (20) *induce una cuantización por deformación sobre la variedad simpléctica (M, ω), i.e. un producto estrella de la forma* (13) *sobre $\mathcal{A}_\hbar$ satisfaciendo todas las propiedades listadas anteriormente.*

El problema –más general– de la existencia de una cuantización por deformación para variedades de Poisson tardó un poco más en ser resuelto, positivamente, por M. Kontsevich [14]. Los métodos utilizados por Kontsevich son mucho más potentes que los expuestos en este artículo y han sido generalizados por A. Cattaneo, G. Felder y L. Tomassini para el caso de cuantización global, cuya construcción no es lejana en espíritu a la construcción de Fedosov. El lector interesado encontrará una prueba en su completa generalidad en [6].

3 Problemas Abiertos y Perspectivas

Vamos a terminar estas páginas haciendo un sobrevuelo a otros desarrollos asociados con lo expuesto anteriormente, en particular lo concerniente a la definición de trazas sobre el álgebra formal $\mathcal{A}_\hbar$ y la del índice asociado con dichas trazas, lo que da lugar a una generalización del muy conocido teorema del índice de Atiyah-Singer. Tras una descripción de los hechos demostrados en este contexto concluiremos mencionando la conjetura de Fedosov sobre el índice para variedades con frontera y algunas direcciones en las que se sigue investigando intensamente.

Trazas. Sea (M, ω) una variedad simpléctica compacta de dimensión $2n$, y $(\mathcal{A}_\hbar = C^\infty(M)[\![\hbar]\!], *)$ una cuantización por deformación de M, i.e. un producto asociativo con unidad $* : \mathcal{A}_\hbar \otimes \mathcal{A}_\hbar \to \mathcal{A}_\hbar$ sobre $\mathcal{A}_\hbar$ tal que

$$f * g = f \cdot g + \sum_{k \geq 1} \hbar^k B_k(f, g), \tag{21}$$

y satisfaciendo las propiedades mencionadas en la Definición 4.

Definición 5. *Una traza sobre $\mathcal{A}_\hbar$ es una aplicación $\hbar$-lineal*

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{A}_\hbar \to \mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]\!],$$

donde $\mathbb{C}[\hbar^{-1}, \hbar]\!]$ es el conjunto de series de Laurent formales en $\hbar$ con un número finito de potencias negativas, tal que, $\forall f, g \in \mathcal{A}_\hbar$,

$$\mathrm{Tr}([f, g]_*) = 0, \tag{22}$$

donde $[f, g]_* = f * g - g * f$.

En el caso del producto de Moyal descrito en el Ejemplo 3, la traza puede describirse de manera particularmente simple. De hecho, para cualquier par de funciones f y g con soporte compacto, se tiene que[7]

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (f * g)\,\omega^n = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f \cdot g)\,\omega^n,$$

lo que implica que la aplicación

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\,\omega^n$$

define una traza (ver [10]). Usando particiones de la unidad, esta traza puede ser definida para cualquier variedad simpléctica, y puede ser provado que siempre es 'local' en el sentido de que existe una densidad $\rho(x,\hbar) \in C^\infty(M)[[\hbar]]$ tal que

$$\mathrm{Tr}(f) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_M \rho f\,\omega^n. \tag{23}$$

En general, es posible trabajar con álgebras con coeficientes en un haz vectorial arbitrario E sobre M, y la construcción de la traza da nuevamente una forma local (en la que ahora la densidad será una matriz y, por consiguiente, en el interior de la integral (23) aparecerá a su vez la traza usual).

Teoremas de Índice. Uno de los resultados más importantes del siglo veinte en matemáticas es el teorema del índice de Atiyah y Singer, y sus consecuentes extenciones y generalizaciones. Teoremas de este tipo son ejemplo de interesantes puntos de encuentro entre la geometría, la topología, el análisis y el álgebra. Dado un operador autoadjunto P elíptico (diferencial ó pseudodiferencial) actuando sobre un espacio de Hilbert (de funciones o secciones de un fibrado sobre una variedad compacta), su núcleo y co-núcleo son de dimensión finita, y su índice es definido como la diferencia entre tales dimensiones:

$$\mathrm{ind}(P) = \dim \mathrm{Ker} P - \dim \mathrm{CoKer} P. \tag{24}$$

El teorema de Atiyah-Singer muestra que este número entero puede ser calculado como una integral sobre la variedad de base, la integral de una forma de volumen construida apartir de clases características que contienen importante información topológica y geométrica. Las pruebas originales de tal tipo de resultado usan métodos de geometría y topología algebráica; no obstante, pruebas más recientes involucran técnicas del análisis en dimensión infinita, que han permitido identificar interesantes interacciones entre el álgebra, el análisis, la geometría y la topología que involucran estos teoremas.

Todo lo anterior resalta la importancia de la generalización del teorema de Atiyah-Singer lograda por Fedosov usando métodos de la teoría de cuantización por deformación. Como hemos visto en las secciones anteriores, en cuantización por deformación *no* hay espacios de Hilbert, ni operadores, y sinembargo es

[7] La $2n$-forma de volumen ω^n que aparece en la integral es usualmente normalizada en la literatura como $\frac{\omega^n}{n!}$, por simplicidad en la notación omitiremos la normalización.

posible recuperar el resultado mediante a un "sencillo" cálculo de trazas.

Dada una variedad simpléctica[8] (M, ω) y una cuantización formal con producto estrella $*$ sobre el álgebra formal $\mathcal{A}_\hbar$, y sea $\mathbf{1}_\hbar$ la unidad de dicha álgebra. Definimos el *índice* del álgebra (o de la deformación) como el polinomio en $\frac{1}{\hbar}$ dado por la traza del elemento $\mathbf{1}_\hbar$, es decir como la integral dada por (23),

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{A}_\hbar) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_M \rho\, \omega^n. \tag{25}$$

Supongamos ahora que P es un operador elíptico autoadjunto actuando sobre secciones de un haz vectorial E sobre una variedad arbitraria X, sin frontera, no necesariamente simpléctica. Asociados a X y a P hay una variedad simpléctica (su haz cotangente $\pi : M = T^*X \to X$) y un haz vectorial sobre ella (el fibrado $\pi^*(E) \to M$ definido por el pull-back con la proyección π y el símbolo principal de P), y tomando el álgebra $\mathcal{A}_\hbar(E)$ de deformación de $C^\infty(M, \pi^*(E))$, i.e. funciones suaves con coeficientes en $\pi^*(E)$, tenemos que

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{A}_\hbar(E)) = \operatorname{ind}(P).$$

Más aún, calculando explícitamente el término apareciendo como densidad en (25), obtenemos que

Teorema (Fedosov) [10]

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{1}_\hbar) = \int_M \left[\operatorname{Ch}(E) \hat{A}(M) \exp\left(\frac{\omega}{2\pi\hbar}\right)\right]_{2n}, \tag{26}$$

donde $\operatorname{Ch}(E)$ *y* $\hat{A}(M)$ *son las clases características asociadas a los objetos apareciendo en la deformación.*

Esta es la generalización del teorema del índice encontrada en cuantización por deformación, que dió lugar —entre muchas otras cosas— a teoremas de índice puramente algebráicos.

Una Conjetura. En el caso de variedades con frontera, aunque Fedosov a conjeturado que un teorema de índice de tipo similar debe existir, no hay actualmente una prueba de tal resultado. La fórmula conjeturada por Fedosov —sin querer ser muy precisos— incluye dos términos: uno (casi) idéntico al dado en (26), conteniendo información acerca de la parte correspondiente al índice sobre la variedad, y otro similar conteniendo solamente lo correspondiente a la frontera, con la particularidad de que involucra un haz vectorial de rango infinito (condiciones de frontera). La conjetura será anunciada en detalle por su autor en una próxima publicación.

[8] En general pueden considerarse variedades de Poisson, sobre las cuales hay mucha más variedad de trazas, pero por simplicidad consideraremos el caso simpléctico con la traza dada por (23). El caso general puede encontrarse en [10] y las referencias que allí mencionadas.

Es importante mencionar igualmente que la teoría ha sido utilizada en muchas áreas de las matemáticas y la física. Cabe mencionar, por ejemplo, el uso dado en análisis para encontrar fórmulas traciales para operadores tipo Schrödinger, el desarrollo del álgebra y la geometría formal, y -en física- la relación con la integral de Feynman en teoría cuántica de campos, en particular para modelos sigma [5]. Detalles pueden ser encontrados en las referencias suministradas.

Otras Direcciones. Aparte de los hechos mencionados anteriormente, hay muchas cosas por realizar en la teoría de cuantización por deformación. La primera extensión que viene a la cabeza es la de pasar de la dimensión finita (i.e. un número finito de grados de libertad) a la dimensión infinita, y su consecuente aplicación a la teoría cuántica de campos. Es muy poco lo que se sabe hacer por estos métodos en dimensión infinita, pero parece natural aplicar la relación entre la teoría del índice y el análisis en dimensión infinita (en particular la teoría de regularización de trazas, que da lugar a nuevas interpretaciones de resultados clásicos en física teórica, ver e.g. [4]) en este contexto, y esta dirección es prometedora.

También vale la pena mencionar recientes estudios que tratan de establecer un puente entre esta teoría y el análisis espectral, herramienta fundamental de las matemáticas de hoy día. El problema de la dinámica asociada a esta teoría cuántica también es objeto de estudio, en particular en el caso de los operadores de Schrödinger. La teoría de la cuantización por deformación —iniciada hace un poco más de un cuarto de siglo— continua hoy siendo un campo de intensa actividad en matemáticas y física, una discusión lúcida sobre sus principales atractivos y defectos, incleyendo sus posibles desarrollos y aplicaciones puede encontrarse en [11]. Otras exposiciones, más detalladas que el presente artículo y conteniendo muchas más referencias a los trabajos originales, pueden encontrarse en [16][19] y, porsupuesto, el texto [10].

Agradecimientos. *El autor desea agradecer a los departamentos de Física y Matemáticas de la Universidad del Norte por su amable invitación, en particular a los profesores Jesús Zapata e Ismael Gutierrez, y a Joachim Hahn – coordinador del Área de Ciencias Básicas. Un agradecimiento especial a aquellos colegas y amigos quienes han alimentado el interés del autor por estos temas, en particular a los profesores Michel Cahen, Simone Gutt, Boris Fedosov y Yoshiaki Maeda por muchas discusiones estimulantes.*

References

[1] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A. and Sternheimer, D. *Deformation theory and quantization. I and II* Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 61–151.

[2] Cannas da Silva, A. and Weinstein, A. *Geometric Models for Noncommutative Algebras.* Berkeley Mathematics Lecture Notes, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[3] Cahen, M., Gutt, S. and Rawnsley, J. *Quantization of Kähler manifolds. I.*. J. Geom. Phys. **7** (1990), no. 1, 45–62. *Quantization of Kähler manifolds. II.* Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), no. 1, 73–98.

[4] Cardona, A., Ducourtioux, C. and Paycha, S. *From tracial anomalies to anomalies in quantum field theory.* Comm. Math. Phys. **242** (2003), no. 1-2, 31–65.

[5] Cattaneo, A. and Felder, G. *A path integral approach to the Kontsevich quantization formula.* Comm. Math. Phys. **212** (2000), no. 3, 591–611.

[6] Cattaneo, A., Felder, G. and Tomassini, L. *From local to global deformation quantization of Poisson manifolds.* Duke Math. J. **115** (2002), no. 2, 329–352.

[7] De Wilde, M. and Lecomte, P. *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds.* Lett. Math. Phys. **7** (1983), no. 6, 487–496.

[8] Dirac, P. A. M. *The Principles of Quantum Mechanics.* 3d ed. Oxford, Clarendon Press, 1947.

[9] Fedosov, B. *A simple geometrical construction of deformation quantization.* J. Differential Geom. **40** (1994), no. 2, 213–238.

[10] Fedosov, B. *Deformation Quantization and Index Theory.* Mathematical Topics. 9. Berlin: Akademie Verlag, 1996.

[11] Fedosov, B. *Deformation Quantization: pro and contra.* In Quantization, Poisson Brackets and Beyond (Manchester, 2001), 1–7, Contemp. Math., **315**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[12] Guillemin, V. and Sternberg, S. *Symplectic Techniques in Physics.* Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[13] Jost, J. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* Third edition. Springer-Verlag, 2002.

[14] Kontsevich, M. *Deformation Quantization of Poisson Manifolds. I*, q-alg/9709040.

[15] Landau, L. and Lifshitz, E. M. *Mechanics.* Course of Theoretical Physics, Vol. 1. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. 1960

[16] Maeda, Y. *Deformation quantization and noncommutative differential geometry.* Sugaku Expositions **16** (2003), no. 1, 1–23.

[17] Omori, H., Maeda, Y. and Yoshioka, A. *Weyl manifolds and deformation quantization.* Adv. Math. **85** (1991), no. 2, 224–255.

[18] Vaisman, I. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds.* Progress in Mathematics, 118. Birkhuser Verlag, Basel, 1994.

[19] Weinstein, A. *Deformation Quantization.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque No. 227 (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409.

[20] Woodhouse, N. *Geometric Quantization.* Second Edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.