Álgebra Lineal (Honores) – *Tarea 4*

Noviembre 7 de 2014

1. Responda falso o verdadero, justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

i. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces $N(A) \cap R(A) = \{\vec{0}\}$.

ii. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica y $A^k = O$ para algún $k > 0$, entonces $A = O$.

iii. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica y todos sus valores propios son ± 1, entonces A es ortogonal.

iv. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica y $\det A = -1$, entonces A es una reflexión.

v. Si $S \in M_n(\mathbb{C})$ es hermítica, entonces $\det S$ es es imaginario puro.

vi. Si $U \in M_n(\mathbb{C})$ es unitaria, entonces $|\det U| = 1$.

vii. Si $S \in M_n(\mathbb{C})$ es normal, entonces S es unitaria.

2. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$, y sean W, W_1 y W_2 subespacios de V.

i. Pruebe que $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

ii. Pruebe que $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

iii. Pruebe que si $V = W \oplus W^\perp$ y $P_W : V \to V$ es la proyección sobre W a lo largo de $W^\perp$, entonces $(P_W)^* = P_W$.

iv. Pruebe que si $T : V \to V$ es la reflexión con respecto a W, entonces T puede escribirse en términos de P_W y $P_{W^\perp}$ (las proyecciones respectivas).

v. Pruebe que $P_W P_{W^\perp} = P_{W^\perp} P_W$.

3. Para las siguientes matrices lleve a cabo una diagobnalización ortogonal o unitaria, según el caso.

i. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ii. $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.