Álgebra Lineal (Honores) – *Tarea 1*

Agosto 14 de 2014

1. Espacios vectoriales. Demuestre que $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$, donde

$$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad a \odot x = x^a,$$

para $x, y \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial (sobre el campo real).

2. Subespacios vectoriales. Diga, en cada caso, si el subconjunto dado es un subespacio vectorial del espacio vectorial correspondiente.

   (a) $W_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{x} = 1\right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

   (b) $W_2 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \vec{a} = 0\right\}$, donde $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en $\mathbb{R}^3$.

   (c) $W_3 = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\right\}$ en $M_n(\mathbb{R})$.

   (d) $W_4 = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \mid p(x) + p(-x) = 0\}$ en $P_n(\mathbb{R})$.

3. Bases. Diga, en cada caso, si el subconjunto dado es una base del espacio vectorial correspondiente.

   (a) $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

   (b) $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

   (c) $B_3 = \{I, A, B, AB\}$ en $M_2(\mathbb{R})$, donde $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ son diferentes.

   (d) $B_4 = \left\{1 - 2x, 1 - 2x + 3x^2, 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3, 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4, 1 + x^2 + x^4, x + x^3\right\}$ en $P_4(\mathbb{R})$.

4. Dimensión. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial de V.

   (b) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces

   $$W_1 + W_2 = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2, \text{ para } \vec{w}_1 \in W_1, \vec{w}_2 \in W_2\}$$

   es un subespacio vectorial de V.

   (c) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.