ÁLGEBRA LINEAL (HONORES) - PARCIAL 3

OCTUBRE 28 DE 2014

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. [*8 Puntos.*] Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Encuentre los valores y vectores propios de A.
ii. Demuestre que $p_A(t) = -t^3 + t^2 + 5t + 3$ es el polinomio característico de A y encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que $A = CDC^{-1}$.
iii. Calcule $\det(A^7)$ y $A^{151}\vec{x}$, donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
iv. Use la parte ii. para calcular A^4.

2. [*6 Puntos.*] Considere la matriz $R = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ de reflexión en el plano $\mathbb{R}^2$, donde $a^2 + b^2 = 1$.

i. Encuentre los valores y vectores propios de A.
ii. Encuentre un vector sobre la recta respecto a la cual la reflexión tiene lugar.
ii. Encuentre un vector perpendicular a la recta respecto a la cual la reflexión tiene lugar.

3. [*8 Puntos.*] Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son $1 \pm i$.
ii. Los vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$.
iii. Si una matriz es nilpotente, i.e. $A^k = O$ para algún $k > 0$, entonces $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
iv. Si $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$, entonces AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

Solución

1. i. El determinante de la matriz $A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$ es $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3)$, así que los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ los vectores propios son los generadores del espacio nulo de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, es decir $E_{\lambda_1=\lambda_2=-1} = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Para $\lambda_3 = 3$, el vector propio correspondiente es el generador del espacio nulo de la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, es decir $E_{\lambda_3=3} = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii. Una multiplicación de los términos en $p_A(\lambda)$ en el punto anterior muestra que $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3$ es el polinomio característico de A. Por otra parte, dado que las multiplicidades geométrica y algebraica de cada valor propio de A son iguales, la matriz es diagonalizable. La matriz de vectores propios $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible y, junto con la matriz diagonal de valores propios (en el mismo orden) $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, realizan tal diagonalización:

$$AC = CD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

iii. Dado que $A = CDC^{-1}$, se sigue que $A^7 = CD^7C^{-1}$ y entonces

$$\det(A^7) = \det(D^7) = (-1)^7(-1)^7(3)^7 = 3^7.$$

Por otra parte, dado que $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$\begin{aligned} A^{151}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= (-1)A^{151}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1)A^{151}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{152}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)^{151}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

iv. Finalmente, por el teorema de Cayley-Hamilton y lo visto en la parte ii., $A^3 = A^2 + 5A + 3I$, así que $A^4 = 6A^2 + 8A + 3I$, i.e.

$$\begin{aligned} A^4 &= 6\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 21 & 40 & -20 \\ 20 & 41 & -20 \\ -20 & -40 & 21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. i. Los valores propios de la matriz de reflexión $R = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ son 1 y -1, pues cualquier vector sobre la recta respecto a la cual la reflexión tiene lugar permanece igual bajo la reflexión y cualquier vector perpendicular a tal recta cambia de signo bajo la reflexión. Puede también verificarse directamente, a partir de la condición $a^2 + b^2 = 1$, que $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1$.
Para encontrar los vectores propios de A observamos que, para el valor propio 1, el sistema

$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene infinitas soluciones, i.e. $(a-1)x + by = 0$, luego $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a-1 \end{pmatrix}$ es el vector propio correspondiente. De la misma forma, para el valor propio -1, el sistema

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & -a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

debe tener infinitas soluciones, i.e. $(a+1)x + by = 0$, luego $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a+1 \end{pmatrix}$ es el vector propio correspondiente.

ii. El argumento anterior muestra que $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a-1 \end{pmatrix}$ es un vector sobre la recta respecto a la cual la reflexión tiene lugar.

iii. El argumento anterior muestra que $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a+1 \end{pmatrix}$ es un vector perpendicular a la recta respecto a la cual la reflexión tiene lugar. Para verificarlo solo hace falta ver que $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = b^2 + (a^2 - 1) = 1 - 1 = 0$.

3. i. Los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son $1 \pm i$.

Falso. $\det(A - (1 \pm i)I) = \det\begin{pmatrix} \mp i & -2 \\ 2 & \mp i \end{pmatrix} \neq 0$.

ii. Los vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son $\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}$.

VERDADERO. $A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

iii. Si una matriz es nilpotente, i.e. $A^k = O$ para algún $k > 0$, entonces $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

VERDADERO. Si $A^k = O$ para $k > 0$ y λ es valor propio de A, entonces $\lambda^k = 0$, es decir que todos los valores propios de A deben ser cero. Siendo la traza de A la suma de sus valores propios es claro que entonces $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

iv. Si $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$, entonces AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

FALSO. Es fácil ver que la afirmación es falsa, a menos que $n = m$: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces $AB = 1$ mientras que $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, así que estas dos matrices no pueden tener el mismo polinomio característico.