ÁLGEBRA LINEAL (HONORES) - PARCIAL 2

OCTUBRE 3 DE 2014

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. [*12 Puntos.*] Considere el espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas 2×2 y la transformación lineal $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & b-d \\ c-a & d-a \end{pmatrix}.$$

i. Encuentre N_T, el espacio nulo de la transformación.
ii. Encuentre R_T, el espacio imagen de la transformación.
iii. Calcule $[M]_B$, la matriz de la transformación respecto a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.
iv. Encuentre $[A]_B$ y $[T(A)]_B$, las coordenadas del vector $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y su imagen bajo T, respecto a la base B, y verifique que $[T(A)]_B = [M]_B[A]_B$.
v. Encuentre la matriz $C_{B_c}^{B}$ de cambio de base de la base canónica B_c de $M_2(\mathbb{R})$ a B.
vi. Use lo anterior para calcular $[M]_{B_c}$, la matriz de la transformación respecto a la base canónica.

2. [*8 Puntos.*] Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Si A es una matriz 3×3 que puede escribirse como el producto de una matriz 3×2 y una matriz 2×3, entonces $\det A = 0$.
ii. El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix}$ es cero.
iii. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & t \\ t & t+2 & 1 & t+2 \\ t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{pmatrix}$ es invertible solamente para $t = 0, -1, -2$.
iv. Existe un isomorfismo entre $V = \{p(x) \in \mathrm{P}_3[x] | \; p'(1) = 0\}$ y $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$.

Solución

1. i. Para calcular N_T observamos que, si
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & b-d \\ c-a & d-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
entonces $a = b = c = d$, así que el espacio nulo de la transformación es $N_T = \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

ii. Dado que $\dim N_T = 1$ y $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, sabemos que $\dim R_T = 3$. Para encontrar una base para el espacio imagen de la transformación observamos que
$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a-d & b-d \\ c-a & d-a \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
pero, sin embargo, solo tres de las cuatro matrices que aparecen aquí son linealmente independientes. Así,
$$\begin{aligned} R_T &= \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathsf{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

iii. Por definición
$$[M]_B = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [T(A_1)]_B & [T(A_2)]_B & [T(A_3)]_B & [T(A_4)]_B \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$
es la matriz de la transformación respecto a la base $B = \left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\right.$ $\left. A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$. Calculando a partir de la definición de T tenemos que
$$T(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ T(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
luego
$$[T(A_1)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ [T(A_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ [T(A_3)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{ y } \ [T(A_4)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
La matriz de la transformación respecto a la base B es entonces
$$[M]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv. Para encontrar las coordenadas del vector $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $T(A)$, respecto a la base B, calculamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (4)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-6)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (3)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego $[A]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $[T(A)]_B = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y verificamos facilmente que

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = [T(A)]_B = [M]_B[A]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

v. La matriz $C_{B_c}^B$ de cambio de base, de la base canónica B_c a B, es

$$C_{B_c}^B = M_B^{-1} M_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcularla podemos llevar a cabo la siguiente reducción:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

así que $C_{B_c}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

vi. Para calcular $[M]_{B_c}$, la matriz de la transformación respecto a la base canónica, usando la matriz de cambio de base anterior, observemos que

$$\begin{aligned} [M]_{B_c} &= C_B^{B_c}[M]_B C_{B_c}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como puede verificarse facilmente apartir de lo visto en la parte ii.

2. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Si A es una matriz 3×3 que puede escribirse como el producto de una matriz 3×2 y una matriz 2×3, entonces $\det A = 0$.

Verdadero. Si $A = BC$, con $B \in M_{32}(\mathbb{R})$ y $C \in M_{23}(\mathbb{R})$, es claro que, aunque el rango de C puede ser 3, el rango de B nunca puede ser 3, así que

$$\mathsf{rang}(A) = \mathsf{rang}(BC) \leq \mathsf{rang}(B) = 2,$$

luego las tres columnas de A no pueden ser linealmente independientes, es decir $\det A = 0$.

ii. El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix}$ es cero.

Verdadero. Desarrollando los cuadrados y haciendo operaciones elementales entre filas (o columnas) es fácil llegar a una matriz con igual determinante a la matriz dada, pero con dos filas (o columnas) iguales, es decir con determinante igual a 0.

iii. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & t \\ t & t+2 & 1 & t+2 \\ t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{pmatrix}$ es invertible solamente para $t = 0, -1, -2$.

Falso. Calculando el determinante de A obtenemos $\det A = 3t(t+1)(t+2)$, luego esta matriz es invertible siempre que $t \neq 0, -1, -2$, como puede observarse fácilmente al reemplazar cualquiera de estos valores.

iv. Existe un isomorfismo entre $V = \{p(x) \in \mathrm{P}_3[x] |\ p'(1) = 0\}$ y $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$.

Verdadero. Es fácil ver que $\dim V = \dim W = 3$, luego cualquier transformación lineal que envíe una base de V en una de W será un isomorfismo. Por ejemplo,

$$T(a - 2bx - 3cx + bx^2 + cx^3) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$