ÁLGEBRA LINEAL (HONORES) - PARCIAL 1

AGOSTO 22 DE 2014

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Considere el sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

(i) `1 Punto.` Escriba el sistema en la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, con $A \in M_3(\mathbb{R})$ y $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

(ii) `3 Puntos.` Resuelva el sistema y diga si tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Encuentre todas las soluciones al sistema.

(iii) `3 Puntos.` ¿Es la matriz A invertible? —justifique su respuesta— Si lo es, encuentre su inversa.

(iv) `1 Punto.` ¿Es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ combinación lineal de los vectores columna de la matriz A? Si lo es, encuentre una combinación lineal.

2. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) `2 Puntos.` El subconjunto $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ es invertible}\}$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

(ii) `2 Puntos.` El subconjunto $W = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R}) \mid p(x) = p(2x)\}$ es un subespacio vectorial de $P_n(\mathbb{R})$.

Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(iii) `2 Puntos.` $\mathsf{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathsf{Sp}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$.

(iv) `2 Puntos.` El conjunto $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

(v) `2 Puntos.` $\dim \mathsf{Sp}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \dim \mathsf{Sp}\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}$.

(vi) `2 Puntos.` $\dim(\mathsf{Sp}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\} + \mathsf{Sp}\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}) = \dim \mathsf{Sp}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\} + \dim \mathsf{Sp}\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}$.