MATE-1105-1 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 1

NOMBRE:______________________________ **CÓDIGO:** ____________________

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

I. Considere el siguiente sistema no homogeneo de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

a. `[1 Punto]`. Escriba el sistema en la forma $A\vec{x} = \vec{b}$, donde A es una matriz y $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.
b. `[3 Puntos]`. Diga si el sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución. Si existen soluciones encuentrelas todas.
c. `[2 Puntos]`. Diga si la matriz A es invertible y, si lo es, encuentre su inversa.
d. `[2 Puntos]`. Diga si el vector $\vec{b}$ es combinación lineal de las columnas de la matriz A y, de serlo, encuentre una combinación lineal.

II. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
a. `[2 Puntos]`. Encuentre las matrices $A^T B$ y $B^T A$.
b. `[2 Puntos]`. Encuentre las matrices $A^T A$ y $B^T B$. ¿Es B^T la inversa de la matriz B?

III. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.
a. `[2 Puntos]`. El conjunto $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 | \parallel \vec{x} \parallel = 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
b. `[2 Puntos]`. El conjunto $\mathsf{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para el espacio columna de la matriz A del punto **I**.
c. `[2 Puntos]`. El conjunto $\mathsf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para el espacio columna de la matriz A del punto **I**.
d. `[2 Puntos]`. La dimensión del subespacio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1 = x_3 \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ es 2

Solución

I.

a. El sistema no homogeneo de ecuaciones $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$ se escribe, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b. Para saber si el sistema tiene una única solución, infinitas soluciones o ninguna solución, reducimos la matriz aumentada correspondiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to 3F_3 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{4}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right),$$

así que el sistema original tiene solución única (pues las tres columnas son pivotes) y es equivalente a $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 = -3 \end{cases}$, es decir que $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ es la solución única al sistema.

c. Dado que el sistema tiene solución única la matriz A es invertible. Para calcular su inversa aplicamos nuevamente reducción:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right),$$

así que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

como se comprueba fácilmente multiplicando por la matriz A.

d. Dado que el sistema de ecuaciones de la parte **a.** tiene solución única, el vector $\vec{b}$ *si* es combinación lineal de las columnas de la matriz A y, de hecho, la única combinación lineal posible es la dada por la solución a tal sistema:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = (1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

II. Tenemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, luego $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, luego $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculando el producto encontramos que

$$A^T B = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -4 & -11 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

y

$$B^T A = (A^T B)^T = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 11 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

b. Calculando el producto encontramos que

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ -5 & 5 & -4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$B^T B = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 13 & 34 \end{pmatrix}.$$

Podemos concluir entonces que B^T *no* es la inversa de la matriz B, porque $B^T B \neq I$.

III.

a. Falso. El conjunto $W = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \| \vec{x} \| = 1\right\}$ *no* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, puesto que $\| \vec{0} \| = 0 \neq 1$, luego W no contiene al vector $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. Verdadero. El conjunto $\mathsf{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es, por definición, un conjunto generador para el espacio columna de A, y es una base para él porque la reducción de la parte **a.** del punto **I.** mostró que los tres vectores son, además, linealmente independientes.

c. Falso. El conjunto $\mathsf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *no* es una base para el espacio columna de la matriz A porque los vectores no son linealmente independientes. Una relación de dependencia entre ellos es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d. Verdadero. Si $\vec{w} \in W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_3 \right\}$, entonces

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, dado que los dos vectores al lado derecho son linealmente independientes, el conjunto $\mathsf{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W. Así, la dimensión de W es 2.