

MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 3 [B]

NOMBRE: _____

CÓDIGO: _____

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Sea $W = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} \right) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0 \right\}$ y considere la siguiente base para W :

$$B = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (i) 2 Puntos. Demuestre que los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 son perpendiculares y encuentre una base *ortogonal* para W .
- (ii) 2 Puntos. Encuentre el subespacio W^\perp , el complemento ortogonal de W .
- (iii) 2 Puntos. Encuentre una base *ortonormal* de \mathbb{R}^4 que contenga los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 normalizados.
- (iv) 2 Puntos. Encuentre la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio W^\perp .
- (v) 2 Puntos. Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Encuentre la descomposición $\vec{x} = \vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp}$, donde $\vec{x}_W \in W$ y $\vec{x}_{W^\perp} \in W^\perp$.

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (i) 2 Puntos. Encuentre los valores propios y los vectores propios de A .
- (ii) 2 Puntos. Diga si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentre matrices D (diagonal) y C (invertible) tales que $A = CDC^{-1}$.

3. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:

- (i) 2 Puntos. Si $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ tienen determinantes $\det A = 1, \det B = -2$ y $\det C = 3$, entonces

$$\det(BC^{-1}(3A)^T) = -18.$$

- (ii) 2 Puntos. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

es igual a 2.

- (iii) 2 Puntos. La matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

SOLUCIÓN

1. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0 \right\}$ y considere la siguiente base para W :

$$B = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 son perpendiculares porque $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, así que para encontrar una base ortogonal para W basta usar el método de Gram-Schmidt para producir, a partir de \vec{u}_3 , un vector perpendicular tanto a \vec{u}_1 como a \vec{u}_2 :

$$\vec{u}'_3 = \vec{u}_3 - \text{Proy}_{\vec{u}_1} \vec{u}_3 - \text{Proy}_{\vec{u}_2} \vec{u}_3 = \vec{u}_3 - \left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \right) \vec{u}_1 - \left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \right) \vec{u}_2,$$

es decir

$$\vec{u}'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que

$$B' = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}'_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal para W .

(ii) El complemento ortogonal de W es el espacio nulo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

es decir

$$W^\perp = \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Una base ortonormal de \mathbb{R}^4 que contenga los vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 normalizados puede formarse a partir de la base ortogonal para W y la base para W^\perp , previa normalización de los vectores que lo requieran:

$$B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

(iv) Finalmente, dado que el vector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es unitario y genera el subespacio W^\perp , la

matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio W^\perp es

$$P_{W^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- (v) Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Entonces la descomposición $\vec{x} = \vec{x}_W + \vec{x}_{W^\perp}$, donde $\vec{x}_W \in W$ y $\vec{x}_{W^\perp} \in W^\perp$ puede encontrarse calculando

$$\vec{x}_{W^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{Proy} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

así que

$$\vec{x}_W = \vec{x} - \vec{x}_{W^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

2. (i) Para calcular los valores propios de la matriz calculamos

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 5 & 0 \\ 5 & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 7),$$

así que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -7$.

Para calcular los vectores propios de A solucionamos el sistema homogéneo correspondiente: Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que el vector propio correspondiente a este valor propio es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que el vector propio para este valor propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finalmente, para

$\lambda_3 = -7$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que el vector propio para este valor propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (ii) La matriz A es diagonalizable porque es simétrica (de hecho las multiplicidades algebraica y geométrica de todos sus valores propios es igual a 1). Una posible

diagonalización es la dada por la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ y la matriz

invertible $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que satisfacen $A = CDC^{-1}$.

3. Responda falso o verdadero:

- (i) VERDADERO. Si $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ tienen determinantes $\det A = 1$, $\det B = -2$ y $\det C = 3$, entonces

$$\det((3B)C^{-1}A^T) = 3^3(-2)\frac{1}{3}(1) = -18.$$

- (ii) FALSO. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, es decir

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = |-1| = 1.$$

- (iii) FALSO. La matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es una matriz ortogonal porque no todas sus columnas son vectores unitarios.