MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 3 [A]

NOMBRE:______________________________ **CÓDIGO:** ___________________

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Sea $\mathsf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - w = 0 \right\}$ y considere la siguiente base para W :

$$\mathsf{B} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) `2 Puntos`. Demuestre que los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son perpendiculares y encuentre una base *ortogonal* para W.

(ii) `2 Puntos`. Encuentre el subespacio $\mathsf{W}^{\perp}$, el complemento ortogonal de W.

(iii) `2 Puntos`. Encuentre una base *ortonormal* de $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ normalizados.

(iv) `2 Puntos`. Encuentre la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathsf{W}^{\perp}$.

(v) `2 Puntos`. Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Encuentre la descomposición $\vec{x} = \vec{x}_{\mathsf{W}} + \vec{x}_{\mathsf{W}^{\perp}}$, donde $\vec{x}_{\mathsf{W}} \in \mathsf{W}$ y $\vec{x}_{\mathsf{W}^{\perp}} \in \mathsf{W}^{\perp}$.

2. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) `2 Puntos`. Encuentre los valores propios y los vectores propios de A.

(ii) `2 Puntos`. Diga si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentre matrices D (diagonal) y C (invertible) tales que $A = CDC^{-1}$.

3. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) `2 Puntos`. Si $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ tienen determinantes $\det A = 1, \det B = -2$ y $\det C = 3$, entonces

$$\det((3B)C^{-1}A^T) = -9.$$

(ii) `2 Puntos`. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es igual a 1.

(iii) `2 Puntos`. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

SOLUCIÓN

1. Sea $\mathsf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - w = 0 \right\}$ y considere la siguiente base para W :

$$\mathsf{B} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son perpendiculares porque $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$, así que para encontrar una base ortogonal para W basta usar el método de Gram-Schmidt para producir, a partir de $\vec{u}_3$, un vector perpendicular tanto a $\vec{u}_1$ como a $\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_3' = \vec{u}_3 - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_1}\vec{u}_3 - \mathrm{Proy}_{\vec{u}_2}\vec{u}_3 = \vec{u}_3 - \left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\right)\vec{u}_1 - \left(\frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\right)\vec{u}_2,$$

es decir

$$\vec{u}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que

$$\mathsf{B}' = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal para W .

(ii) El complemento ortogonal de W es el espacio nulo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

es decir

$$\mathsf{W}^\perp = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ puede formarse apartir de la base ortogonal para W y la base para $\mathsf{W}^\perp$, previa normalización de los vectores correspondientes:

$$\mathsf{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

(iv) Finalmente, dado que el vector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es unitario y genera el subespacio $\mathsf{W}^\perp$,

la matriz de proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathsf{W}^\perp$ es

$$P_{\mathsf{W}^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(v) Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Entonces la descomposición $\vec{x} = \vec{x}_{\mathsf{W}} + \vec{x}_{\mathsf{W}^\perp}$, donde $\vec{x}_{\mathsf{W}} \in \mathsf{W}$ y $\vec{x}_{\mathsf{W}^\perp} \in \mathsf{W}^\perp$ puede encontrarse calculando

$$\vec{x}_{\mathsf{W}^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Proy}_{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

así que

$$\vec{x}_{\mathsf{W}} = \vec{x} - \vec{x}_{\mathsf{W}^\perp} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

2. (i) Para calcular los valores propios de la matriz calculamos

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ -2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda+2),$$

así que los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$.
Para calcular los vectores propios de A solucionamos el sistema homogeneo correspondiente: Para $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que los vectores propios para este valor propio son $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

así que el vector propio para este valor propio es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) La matriz A es diagonalizable porque las multiplicidades algebraica y geométrica de sus valores propios es la misma: Para $\lambda = -1$, ambas multiplicidades son iguales a 2 y para $\lambda = -2$ son iguales a 1. Una posible diagonalización es la dada por la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y la matriz invertible $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, que satisfacen $A = CDC^{-1}$.

3. Responda falso o verdadero:

(i) Falso. Si $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ tienen determinantes $\det A = 1, \det B = -2$ y $\det C = 3$, entonces

$$\det((3B)C^{-1}A^T) = 3^3(-2)\frac{1}{3}(1) = -18.$$

(ii) Verdadero. El volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es igual al valor absoluto del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, es decir

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = |-1| = 1.$$

(iii) Falso. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *no* es una matriz ortogonal porque no todas sus columnas son vectores unitarios.