

MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 2 [B]

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Considere el conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

- (i) 2 Puntos. Demuestre que W es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares.
- (ii) 2 Puntos. Encuentre una base para W e indique cuál es su dimensión.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) 2 Puntos. Encuentre $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- (ii) 2 Puntos. Encuentre el núcleo (espacio nulo) de la transformación T , e indique la dimensión del rango (espacio imagen) de la misma.

3. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, y sea $q(x) = 1 + x + 2x^2 \in P_2[x]$.

- (i) 2 Puntos. Demuestre que $B = \{1 - x^2, 1 + x^2, 1 + 2x\}$ es una base para $P_2[x]$.
- (ii) 2 Puntos. Encuentre las coordenadas de $q(x)$ en la base B .
- (iii) 2 Puntos. Considere la transformación lineal $T : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ dada por

$$T(p(x)) = p(0) + p'(x),$$

donde $p'(x)$ denota la derivada del polinomio $p(x)$. Encuentre la matriz M_T de la transformación respecto a la base B .

- (iv) 2 Puntos. Encuentre $T(q(x))$ y verifique que

$$[T(q(x))]_B = M_T[q(x)]_B.$$

4. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:

- (i) 2 Puntos. La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

- (ii) 2 Puntos. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

SOLUCIÓN

1. (i) Demuestre que W es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares.

Es obvio que el conjunto no es vacío (la matriz cero y la matriz identidad, por ejemplo, pertenecen a él). Sean $A_1, A_2 \in W = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares arbitrarios. Entonces $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$, donde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, y tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 &= \alpha \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & -\alpha b_1 \\ -\alpha b_1 & \alpha a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_2 & -\beta b_2 \\ -\beta b_2 & \beta a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & -\alpha b_1 - \beta b_2 \\ -\alpha b_1 - \beta b_2 & \alpha a_1 + \beta a_2 \end{pmatrix} \in W, \end{aligned}$$

luego W es cerrado tanto bajo la suma de matrices como la multiplicación por escalares, así que es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

- (ii) Encuentre una base para W e indique cuál es su dimensión.

Si $A \in W$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

así que $W = \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Como estas dos matrices son linealmente independientes, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W , y su dimensión es 2.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Para calcular $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, escribimos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

así que

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ 2 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-y \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (ii) El núcleo (espacio nulo) de la transformación T es el subespacio definido por $\mathbf{N}_T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, es decir

$$\mathbf{N}_T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \right\} = \mathbf{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La ecuación del rango indica que en este caso $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \mathbf{N}_T + \dim \mathbf{R}_T$, y $\dim \mathbf{N}_T = 1$, luego $\dim \mathbf{R}_T = 1$.

3. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, y sea $q(x) = 1 + x + 2x^2 \in P_2[x]$.

- (i) Para verificar que $B = \{1 - x^2, 1 + x^2, 1 + 2x\}$ es una base para $P_2[x]$, podemos llevar a cabo la siguiente reducción

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

y contando el número de pivotes vemos que los tres polinomios son linealmente independientes. Siendo 3 polinomios linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión 3, tenemos que son una base.

- (ii) Las coordenadas de $q(x)$ en la base B se encuentran haciendo una reducción del mismo tipo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right),$$

luego

$$q(x) = 1 + x + 2x^2 = -\frac{3}{4}(1 - x^2) + \frac{5}{4}(1 + x^2) + \frac{1}{2}(1 + 2x),$$

como puede verificarse fácilmente, es decir que

$$[q(x)]_B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (iii) Considere la transformación lineal $T : P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ dada por

$$T(p(x)) = p(0) + p'(x),$$

donde $p'(x)$ denota la derivada del polinomio $p(x)$. Por definición

$$[M_T] = \begin{pmatrix} [T(1 - x^2)]_B & [T(1 + x^2)]_B & [T(1 + 2x)]_B \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

es la matriz de la transformación respecto a la base $B = \{1 - x^2, 1 + x^2, 1 + 2x\}$ de $P_2[x]$. Calculando a partir de la definición de T tenemos que

$$T(1 - x^2) = 1 - 2x, \quad T(1 + x^2) = 1 + 2x, \quad \text{y} \quad T(1 + 2x) = 1 + 2 = 3,$$

luego

$$[T(1 - x^2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [T(1 + x^2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [T(1 + 2x)]_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la transformación respecto a la base B es entonces

$$[M_T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) De la definición de la transformación tenemos que

$$T(q(x)) = 1 + (1 + 4x) = 2 + 4x = (2)(1 + 2x),$$

luego

$$[T(q(x))]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$M_T[q(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = [T(q(x))]_B.$$

4. Responda falso o verdadero:

(i) La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

FALSO. $T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego T no es una transformación lineal.

(ii) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

FALSO. El rango de A es el número de columnas de A linealmente independientes, y en A hay *dos* columnas independientes, así que el rango de A es 2.