MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 2 [A]

NOMBRE:______________________________ **CÓDIGO:** ____________________

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Considere el conjunto $\mathsf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(i) `2 Puntos.` Demuestre que W es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares.

(ii) `2 Puntos.` Encuentre una base para W e indique cuál es su dimensión.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) `2 Puntos.` Encuentre $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(ii) `2 Puntos.` Encuentre el núcleo (espacio nulo) de la transformación T, e indique la dimensión del rango (espacio imagen) de la misma.

3. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, y sea $q(x) = 1 + 2x + x^2 \in P_2[x]$.

(i) `2 Puntos.` Demuestre que $B = \{1 + x^2, 1 - x^2, 1 + 2x\}$ es una base para $P_2[x]$.

(ii) `2 Puntos.` Encuentre las coordenadas de $q(x)$ en la base B.

(iii) `2 Puntos.` Considere la transformación lineal $T : P_2[x] \to P_2[x]$ dada por

$$T(p(x)) = p(0) + p'(x),$$

donde $p'(x)$ denota la derivada del polinomio $p(x)$. Encuentre la matriz M_T de la transformación respecto a la base B.

(iv) `2 Puntos.` Encuentre $T(q(x))$ y verifique que

$$[T(q(x))]_B = \mathrm{M}_T[q(x)]_B.$$

4. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) `2 Puntos.` La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

(ii) `2 Puntos.` La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

SOLUCIÓN

1. (i) Demuestre que W es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares.

Es obvio que el conjunto no es vacío (la matriz cero y la matriz identidad, por ejemplo, pertenecen a él). Sean $A_1, A_2 \in \mathsf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares arbitrarios. Entonces $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$, donde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, y tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 &= \alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha b_1 & \alpha a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 \\ \beta b_2 & \beta a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha a_1 + \beta a_2 \end{pmatrix} \in \mathsf{W}, \end{aligned}$$

luego W es cerrado tanto bajo la suma de matrices como la multiplicación por escalares, así que es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Encuentre una base para W e indique cuál es su dimensión.

Si $A \in \mathsf{W}$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

así que $\mathsf{W} = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Como estas dos matrices son linealmente independientes, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para W, y su dimensión es 2.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Para calcular $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, escribimos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{y-x}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

así que

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{y-x}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \left(\frac{x+y}{2}\right)T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{y-x}{2}\right)T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{y-x}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) El núcleo (espacio nulo) de la transformación T es el subespacio definido por $\mathsf{N}_T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, es decir

$$\mathsf{N}_T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = 0 \right\} = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La ecuación del rango indica que en este caso $\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \mathsf{N}_T + \dim \mathsf{R}_T$, y $\dim \mathsf{N}_T = 1$, luego $\dim \mathsf{R}_T = 1$.

3. Sea $P_2[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2, con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares, y sea $q(x) = 1+2x+x^2 \in P_2[x]$.

(i) Para verificar que $B = \{1+x^2, 1-x^2, 1+2x\}$ es una base para $P_2[x]$, podemos llevar a cabo la siguiente reducción

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

y contando el número de pivotes vemos que los tres polinomios son linealmente independientes. Siendo 3 polinomios linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión 3, tenemos que son una base.

(ii) Las coordenadas de $q(x)$ en la base B se encuentran haciendo una reducción del mismo tipo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

luego

$$q(x) = 1 + 2x + x^2 = \frac{1}{2}(1+x^2) - \frac{1}{2}(1-x^2) + (1+2x),$$

como puede verificarse fácilmente, es decir que

$$[q(x)]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Considere la transformación lineal $T : P_2[x] \to P_2[x]$ dada por

$$T(p(x)) = p(0) + p'(x),$$

donde $p'(x)$ denota la derivada del polinomio $p(x)$. Por definición

$$[\mathrm{M}_T] = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1+x^2)]_B & [T(1-x^2)]_B & [T(1+2x)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

es la matriz de la transformación respecto a la base $B = \{1+x^2, 1-x^2, 1+2x\}$ de $P_2[x]$. Calculando a partir de la definición de T tenemos que

$$T(1+x^2) = 1 + 2x, \quad T(1-x^2) = 1 - 2x, \quad \text{y} \quad T(1+2x) = 1 + 2 = 3,$$

luego

$$[T(1+x^2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [T(1-x^2)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [T(1+2x)]_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la transformación respecto a la base B es entonces

$$[\mathrm{M}_T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) De la definición de la transformación tenemos que

$$T(q(x)) = 1 + (2 + 2x) = 3 + 2x = (1+x^2) + (1-x^2) + (1+2x),$$

luego

$$[T(q(x))]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$\mathrm{M}_T[q(x)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [T(q(x))]_B.$$

4. Responda falso o verdadero:

(i) La aplicación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z - x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

Falso. $T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego T *no* es una transformación lineal.

(ii) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 1.

Verdadero. El rango de A es el número de columnas de A linealmente independientes, y en A todas las columnas son iguales (y no nulas), así que el rango de A es 1.