MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL - PARCIAL 1 [B]

NOMBRE:______________________________ **CÓDIGO:** ______________________

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$.

(i) `2 Puntos`. Encuentre el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

(ii) `1 Punto`. Diga si las diagonales del paralelogramo definido por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son perpendiculares.

(iii) `1 Punto`. Encuentre las magnitudes de los vectores $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

2. Considere el sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 = -2. \end{cases}$$

(i) `2 Puntos`. Resuelva el sistema y diga si tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Si tiene solución única encuentre tal solución, si tiene infinitas soluciones encuentre todas las soluciones al sistema.[1]

(ii) `2 Puntos`. ¿Es la matriz A del sistema una matriz invertible? —justifique su respuesta— Si lo es, encuentre su inversa.

(iii) `2 Puntos`. Diga si el vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. En caso afirmativo encuentre una combinación lineal explícita.

(iv) `2 Puntos`. Diga si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

3. Considere el conjunto $\mathsf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$.

(i) `2 Puntos`. Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

(ii) `2 Puntos`. Encuentre una base para W.

4. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) `2 Puntos`. Si A y B son matrices 2×2 con inversas $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, respectivamente, entonces $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(ii) `2 Puntos`. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

[1] Recuerde que, si hay infinitas soluciones, la solución general se escribe como la suma de la solución general del sistema homogeneo asociado y una solución particular del sistema no homogeneo.

SOLUCIÓN

1. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en el espacio $\mathbb{R}^3$.

(i) El coseno del ángulo entre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ está dado por:

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_1||\,||\vec{v}_1||} = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{2}{3}.$$

(ii) Diga si las diagonales del paralelogramo definido por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son perpendiculares. Es fácil ver que:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0 + 0 + 0 = 0$, así que las diagonales del paralelogramo definido por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son perpendiculares.

(iii) Encuentre las magnitudes de los vectores $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Del punto anterior tenemos que

$$||\vec{v}_1 + \vec{v}_2|| = \sqrt{20} \quad \text{y} \quad ||\vec{v}_1 - \vec{v}_2|| = 2.$$

2. Considere el sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 = -2. \end{cases}$$

(i) Resuelva el sistema y diga si tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Si tiene solución única encuentre tal solución, si tiene infinitas soluciones encuentre todas las soluciones al sistema.

Para resolver el sitema hacemos la reducción de Gauss-Jordan correspondiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \mapsto -\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

obteniendo dos pivotes en la matriz reducida. Como el número de pivotes es menor que el número de incógnitas en el sistema, es claro que obtendremos un número infinito de soluciones para el mismo. En efecto, las ecuaciones lineales correspondientes a la matriz reducida son

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad &= 1 \\ 2x_2 + x_3 \quad &= -2 \end{aligned}$$

luego, despejando en términos de x_2, tenemos que $x_1 = 1 + x_2$ y $x_3 = -2 - 2x_2$ y, por lo tanto, las *infinitas soluciones* al sistema no homogeneo están dadas por

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + x_2 \\ x_2 \\ -2 - 2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donde, como puede verificarse, $x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es la solución general al sistema homogeneo asociado y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ es una solución particular al sistema no homogeneo. Dado que cada ecuación lineal corresponde a un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$, y solo dos de ellas son independientes, el conjunto de soluciones es el conjunto de puntos en el espacio que se encuentran simultaneamente en ambos planos, es decir en una recta.

(ii) ¿Es la matriz A del sistema una matriz invertible?
Dado que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

tiene *infinitas soluciones*, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ debe ser singular, es decir no invertible.

(iii) El vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si y solo si el sistema de ecuaciones dado tiene solución. En este caso hay infinitas soluciones, que corresponden a las infinitas formas de expresar al vector $\vec{b}$ como combinación lineal de las columnas de A. Por ejemplo, para $x_2 = 1$ en la solución general obtenemos como solución $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, que corresponde a una de las posibles combinaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iv) Finalmente, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ *no* es una base para $\mathbb{R}^3$ porque, en cualquier base, la forma de expresar cada vector del espacio como combinación lineal de elementos de la base es única y, como acabamos de ver en el punto anterior, tenemos infinitas formas de escribor $\vec{b}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$.

3. Considere el conjunto $\mathsf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}$.

(i) Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Es fácil ver que $\vec{0} \in \mathsf{W}$, luego W no es vacío. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathsf{W}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x' \\ \beta y' \\ \beta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \\ \alpha z + \beta z' \end{pmatrix}$$

y $(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z') = \alpha\,(x + y + z) + \beta(x' + y' + z') = 0 + 0 = 0$, luego $\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 \in \mathsf{W}$ y, en consecuencia, W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Una base para W puede encontrarse despejando cualquiera de las variables en la ecuación que define a W, por ejemplo $z = -x - y$, y escribiendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto mínimo generador para W, luego es una base.

4. Responda falso o verdadero en cada una de las siguientes afirmaciones:

(i) Falso. Dado que, para matrices A y B cuadradas invertibles de cualquier tamaño

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

si tomamos matrices 2×2 con inversas $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, respectivamente, tendremos que

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

luego la afirmación es falsa.

(ii) Verdadero. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, pues se verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$