

Álgebra lineal - MATE 1105
2014-20

Parcial 3- Tema B

1 de noviembre de 2014

Tiempo limite: Una hora y 20 minutos

Nombre: _____

Código: _____

Profesor: _____

- (6 points) Sea $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$
 - (2 points) Halle una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que contenga una base de S .
 - (2 points) Halle la proyección del vector $(1, 1, 3)$ sobre el plano S .
 - (2 points) Exprese el vector $(1, 1, 3)$ como una suma $v_S + u$ donde $v_S \in S$ y $u \in S^\perp$.
- (6 points) Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ z - y \\ y - x \end{pmatrix}$$

- (2 points) Halle la matriz de la transformación en la base canónica de \mathbb{R}^3 .
 - (2 points) Halle el núcleo de L .
 - (1 point) Halle el rango de L . (Dimensión de la imagen de L .)
 - (1 point) Sea $S = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Encuentre la imagen por L de S .
- (4 points) Teniendo en cuenta los tres datos

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ y & 2 & 3 & 2 \end{array} \right|$$

Encuentra por mínimos cuadrados la función lineal que mejor se ajuste a los datos.

- (4 points) Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.
 - (2 points) Si A es una matriz ortogonal 3×3 , entonces $\det A = -1$.
 - (2 points) Las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ son ortogonales en el espacio vectorial $C[0, 1]$ con producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Solución

1. Una base para S es $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Ortonormalizando obtenemos

$$\{(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}.$$

Una base para S^\perp es $(1, 1, 1)$. La proyección del vector $(1, 1, 3)$ sobre el plano S es $(0, 0, 0) + (-2/3, -2/3, 4/3) = (-2/3, -2/3, 4/3)$. Finalmente $(1, 1, 3) = (-2/3, -2/3, 4/3) + (5/3, 5/3, 5/3)$.

2. Matriz de $[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. El núcleo es $\text{Span}(1, 1, 1)$, luego el rango es igual 2.

La imagen de S por L es 0.

3. La función lineal está dada por la ecuación $y = c_0 + c_1x$, donde las constantes c_0, c_1 se obtienen como la solución del problema de mínimos cuadrados

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

El problema $A^T A c = A^T b$ está dado por

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

con solución $\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Luego la función lineal es $y = 7/3$.

4. (a) FALSO. Si A es una matriz ortogonal, $A^T A = I$ implica que $\det A = \pm 1$ independientemente de su tamaño. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal y su determinante es 1.

(b) VERDADERO. Calculando la integral obtenemos

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{2}x) dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}) \Big|_0^1 = 0,$$

luego las funciones dadas son ortogonales.