Álgebra lineal - MATE 1105 **Nombre:** ____________________
2014-20
Parcial 2- Tema B **Código:** ____________________
20 de septiembre de 2014
Tiempo limite: Una hora y 20 minutos Profesor ____________________

---

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Encuentre una base para el espacio de filas de A.

Sea $F(A) = \mathsf{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ el espacio generado por las filas de A, haciendo una reducción a partir de la matriz obtenemos el número de columnas linealmente independientes de A (que es igual al número de filas linealmente independientes de A):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \mapsto F_4 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \mapsto 2F_4 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \mapsto \frac{1}{2} \times F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

i.e. A tiene dos filas linealmente independientes. Así, una base para el espacio de filas de A es

$$B_{F(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Encuentre una base para el espacio de columnas de A.

De lo dicho anteriormente deducimos que A tiene dos columnas linealmente independientes. Así, una base para el espacio de columnas de A es

$$B_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Encuentre la dimensión del espacio nulo de A.

Sabemos que *Número de columnas de* $A = \dim N(A) + \dim R(A)$, y que $R(A)$ es el espacio generado por las columnas de A, que tiene dimensión 2 según el punto anterior. Así que $\dim N(A) = 3 - 2 = 1$.

2. Considere las bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y el vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Encuentre los vectores de coordenadas de $\vec{u}$ relativos a la base $\mathcal{B}_1$ y a la base $\mathcal{B}_2$.
   Dado que
   $$\vec{u} = (11) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + (7) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
   y
   $$\vec{u} = (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
   tenemos que
   $$[\vec{u}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\vec{u}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.
   La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ es, como se ha visto en clase,
   $$C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = M_{\mathcal{B}_1}^{-1} M_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Para calcularla podemos llevar a cabo la siguiente reducción:
   $$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \mapsto F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$
   $$\xrightarrow{F_1 \mapsto (-1) \times F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right),$$
   así que $C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Verifique el numeral a), mediante la matriz de cambio de base hallada en b).
   Es fácil ver que:
   $$C_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} [\vec{u}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} = [\vec{u}]_{\mathcal{B}_1}.$$

3. Sea P_3 el espacio vectorial de todos los polinomio de grado estrictamente menor a 3 y $V = \{p(x) \in \mathrm{P}_3 \mid p'(-1) = 0\}$.

   (a) Muestre que el polinomio $q(x) = x^2 + 2x + 5$ es un elemento de V.
   La derivada de $q(x)$ es $q'(x) = 2x + 2$, así que $q'(-1) = -2 + 2 = 0$.

   (b) Muestre que V es un subespacio vectorial de P_3.
   Sean $p_1, p_2 \in V$, entonces
   $$(p_1 + p_2)'(-1) = p_1'(-1) + p_2'(-1) = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 + p_2 \in V.$$
   De la misma forma, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in V$,
   $$(\alpha p)'(-1) = \alpha \cdot p'(-1) = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha p \in V.$$

(c) Encuentre una base para V y halle la dimensión del espacio vectorial V
Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ es un elemento de V, entonces

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x \quad \Rightarrow \quad p'(-1) = a_1 - 2a_2 = 0,$$

así que $a_1 = 2a_2$. Entonces, si $p(x)$ es un elemento de V,

$$p(x) = a_0 + 2a_2 x + a_2 x^2 = a_0(1) + a_2(2x + x^2),$$

luego $V = \mathsf{Sp}\{1, 2x + x^2\}$ y, dado que estos son polinomios linealmente independientes, $B_V = \{1, 2x + x^2\}$ es una base para el subespacio V.

4. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.

(a) Si A y B son dos matrices cuadradas 3×3, $\det A = -3$, $\det B = \frac{1}{3}$, entonces $\det(3A^{-1}B^2) = -1$.
Verdadero. Dado que A y B son matrices 3×3,

$$\det(3A^{-1}B^2) = 3^3 \frac{(\det B)^2}{\det A} = 3^3 \frac{(\frac{1}{3})^2}{-3} = -1.$$

(b) Las funciones $f_1(x) = \cos x$ y $f_2(x) = \cos 2x$ son linealmente independientes en $C[0, 2\pi]$.
Verdadero. Calculando el Wronskiano de f_1 y f_2 tenemos

$$W[\cos x, \cos 2x] = \det \begin{pmatrix} \cos x & \cos 2x \\ -\operatorname{sen} x & -2 \operatorname{sen} 2x \end{pmatrix} = -\operatorname{sen} x(1 + 2\cos^2 x)$$

que es diferente de cero sobre $[0, 2\pi]$, excepto en $0, \pi, 2\pi$.