Álgebra lineal - MATE 1105 **Nombre:** ______________________

2014-20

Parcial 1- Tema B **Código:** ______________________

23 de agosto de 2014

Tiempo limite: Profesor ______________________

1. Considere el sistema lineal: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$

   (a) Escriba el sistema en la forma $A\vec{x} = \vec{b}$.

   La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ luego el sistema se escribe en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

   (b) Diga si el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución. En caso afirmativo escriba todas las soluciones.

   Para resolver el sistema, partimos de la matriz aumentada

$$(A\,|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & -13 & 7 \end{array}\right)$$

   y aplicamos el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & -13 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & -13 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   luego el sistema tiene infinitas soluciones: $y = 2 + 2z$ y $x = 1 - 2y + 3z = -3 - z$, i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - z \\ 2 + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   donde $z \in \mathbb{R}$.

(c) Diga si el vector $\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}$ puede ser escrito como combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}-3\\-8\\-13\end{bmatrix}$.

Como

$$\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}-3\\-8\\-13\end{bmatrix}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones dado, la existencia de soluciones a tal sistema es equivalente a la existencia de las combinaciones lineales de los tres vectores columna de la matriz A y, por lo tanto, existen infinitas combinaciones lineales. Por ejemplo, si $z = 0$ en la solución general dada anteriormente,

$$\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}-3\\-8\\-13\end{bmatrix}.$$

2. Considere la matriz $B = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & t\end{bmatrix}$. Diga para que valores de t el determinante de B es cero.

$$\det\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & t\end{bmatrix} = -t,$$

así que $\det B = 0$ si y solo si $t = 0$.

3. Justificando su respuesta con un contrajemplo o una demotración, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sean A, B y C matrices de 2×2 tales que $C \neq 0$ y $AC = BC$. Entonces $A = B$.
Falso. Es claro que, de ser C invertible, multiplicando a derecha por C^{-1} a ambos lados de la ecuación $AC = BC$ obtenemos $A = ACC^{-1} = BCC^{-1} = B$. Sin embargo, si $C \neq 0$ *no* es invertible el argumento no es válido: Si $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 3\\0 & 3\end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, tenemos $AC = BC = \begin{pmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}$, pero $A \neq B$.

(b) Si $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 4\\1 & 0 & -1\\-2 & 0 & 0\\5 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 8\\-3 & 2 & 4\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $C = AB$ entonces la entrada $c_{23} = -1$.
Falso. $c_{23} =$ (Fila 2 de A) $\times$ (Columna 3 de B) $= 0 + 8 - 4 = 4$.

4. Respecto a las matrices aumentadas siguientes indique cómo se clasifica el sistema correspondiente:

   - Consistente con soluciones infinitas.
   - Inconsistente.
   - Consistente con solución única

   (a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ corresponde claramente $(0 = -3)$ a un sistema inconsistente.

   (b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ corresponde a un sistema consistente con infinitas soluciones, porque en el sistema hay más incógnitas que ecuaciones.

   (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ corresponde a un sistema consistente con infinitas soluciones, porque en el sistema hay más incógnitas que ecuaciones.

   (d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ corresponde a un sistema consistente con solución única, hay tres incógnitas y tres ecuaciones independientes, pues la reducción da lugar claramente a tres pivotes en la matriz reducida.

5. (a) Encuentre la inversa de la matriz A= $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Para encontrar la inversa de A tomamos la matriz aumentada

   $$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   y la reducimos usando el método de Gauss-Jordan hasta encontrar a la izquierda la matriz identidad:

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1}$$

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to (-1) \times F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

luego la matriz es efectivamente invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Encuentre la solución del sistema lineal: $\begin{cases} -x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Dado que la matriz de coeficientes del sistema es la matriz A que hemos invertido, usando la inversa de A tal solución se encuentra como

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$