

# Aplicaciones de ventanas deslizantes a periodicidad de funciones

José Miguel Quintero

2 de junio de 2015

# Índice general

<b>1. Topología Algebraica</b>	<b>3</b>
1.1. símlices en $\mathbb{R}^n$	3
1.2. Complejos simpliciales	6
1.3. Homología Simplicial	10
1.4. Alguno complejos particulares	15
1.5. Persistencia Homológica	16
<b>2. Ventanas Deslizantes</b>	<b>19</b>
2.1. Series de Fourier	19
2.2. Ventanas Deslizantes	21
2.3. Análisis en ventanas deslizantes	22
2.4. Geometría de las ventanas	25
<b>3. Teoremas de convergencia</b>	<b>33</b>
3.1. Teorema de aproximación	33
3.2. Resultados de convergencia	35
3.3. Una cota inferior para $mp$	42

# Introducción

Una de las propiedades más útiles de estudiar en una función es su periodicidad. En el análisis de señales en series de tiempo por ejemplo, la periodicidad es un factor clave y muy dicente sobre su comportamiento. En este documento estudiamos una nueva aproximación para analizar la periodicidad de una función o serie de tiempo usando topología computacional. Este método se desarrollo en *Duke University* en el 2012 por José A. Perea y John Harer. Durante el trabajo hecho, se corrigieron errores del artículo original que mejoraron ciertas tazas de convergencia.

En el capítulo 1 hacemos una introducción a tópicos en topología algebraíca que serán usados constantemente durante todo el documento. Nociones como complejos simpliciales, homología simplicial y persistencia homológica serán explicados ya que esta es toda la base de la teoría que justifica el análisis de periodicidad de una función. En el capítulo 2 se hace una introducción a las ventanas deslizantes. Se demostrarán propiedades analíticas y geométricas de las ventanas deslizantes que serán usadas más adelante. Por último, en el capítulo 3 se presentan todos los resultados de convergencia que permiten construir criterios para determinar si una función tiene un periodo determinado.

# Capítulo 1

## Topología Algebraica

### 1.1. símplices en $\mathbb{R}^n$

**Definición 1.1.1.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $A$  se llama afín si  $\forall x, y \in A$  tal  $x \neq y$  la línea  $R(x, y)$  determinada por  $x$  y  $y$  está completamente contenida en  $A$ .

Note que si  $A = \emptyset$  ó es un singleton,  $A$  es afín por condición vacía.

**Observación 1.1.1.** Observe que si un conjunto  $A$  es afín entonces es convexo. Si la recta determinada por  $x$  y  $y$  está completamente contenida en  $A$  entonces en particular el segmento de recta que une a  $x$  y a  $y$  también está contenido.

Ahora consideremos  $\{X_i : i \in I\}$  una familia de conjuntos afines en  $\mathbb{R}^n$ . Es natural preguntarse por las propiedades topológicas de

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i.$$

En el curso de topología se muestra que  $X$  es un conjunto convexo siempre que todos los  $X_i$ 's sean convexos. El siguiente teorema da una propiedad deseada del conjunto  $X$ .

**Teorema 1.1.1.** Sea  $\{X_i : i \in I\}$  una familia de conjuntos afines en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$X = \bigcap_{i \in I} X_i$$

es también un conjunto afín.

La demostración de este teorema es análoga a la demostración de que la intersección de conjuntos convexos es convexa y no es fundamental para el documento.

**Definición 1.1.2.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . La envolvente convexa de  $A$ , denotada como  $\text{convexhull}(A)$  es el conjunto:

$$\text{convexhull}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i : x_i \in A, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

La envolvente convexa es una de las herramientas más importantes en la construcción de símlices. Una definición alterna pero equivalente es que la envolvente convexa es el conjunto convexo más pequeño que contiene a  $A$ .

**Definición 1.1.3.** Sean  $p_0, p_1, \dots, p_m$  puntos en  $\mathbb{R}^n$ . Una combinación lineal afín es un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$x = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_n p_n$$

con  $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ . Si además  $\forall i = 0, 1, \dots, n$  se tiene que  $t_i \geq 0$  entonces se llama una combinación convexa.

Note que hay un paralelo entre las nociones del álgebra lineal tradicional y los conjuntos afines. Al igual que en los espacios vectoriales hay una noción de combinación lineal y la siguiente definición da una noción similar a la de independencia lineal para conjuntos afines.

**Definición 1.1.4.** Sea  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $P$  es afín independiente si el conjunto

$$\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\} \subseteq X$$

es linealmente independiente.

**Observación 1.1.2.** Una observación importante es que si  $P$  es un conjunto linealmente independiente entonces es afín independiente. Sin embargo el converso no es necesariamente cierto.

En efecto hay una relación muy estrecha entre las nociones del álgebra lineal clásica y los conjuntos afines. La siguiente proposición muestra como están relacionados todos los conceptos definidos anteriormente con los del álgebra lineal básica.

**Proposición 1.1.1.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  afín. Suponga que existe  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  afín independiente tal que  $A$  es generado por  $P$ . Entonces existen  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $V$  subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$A = V + x_0.$$

**Demostración 1.1.1.** Sea  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  afín independiente que genera a  $A$ . Defina  $V = \text{sp}(p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0)$ . Como  $P$  es afín independiente entonces  $V$  es un subespacio vectorial de dimensión  $m$ . Así mismo tome  $x_0 = p_0$  y es fácil ver que  $A = V + x_0$ .

El teorema anterior muestra entonces que en general los conjuntos afines son subespacios vectoriales trasladados por un vector. Para ilustrar esto mejor consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.1.1.** Considere el plano  $P$  descrito por la ecuación  $3x + 2y + 5z = 10$  en  $\mathbb{R}^3$ . Es evidente que  $P$  no es un subespacio vectorial ya que el vector  $\vec{0}$  no

está en el plano. Sin embargo el plano  $P$  es un conjunto afín pues cualquier recta entre dos puntos del plano está contenida en él. Así la pregunta es cómo escribir a  $P$  como la traslación de un subespacio vectorial. Considere el plano  $P'$  descrito por la ecuación  $3x + 2y + 5z = 0$ . Note que los vectores normales al plano  $P'$  son iguales a los vectores normales del plano  $P$ , luego estos dos planos son paralelos. No obstante, el plano  $P'$  si pasa por el origen, luego este si es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Ahora solo falta encontrar el vector que está trasladando al plano  $P'$ . La forma más sencilla es despejar alguna de las variables en las ecuaciones y encontrar la constante que diferencia a los dos planos. Si se despeja  $z$  es fácil ver que la constante que diferencia a los dos planos es 2, luego defina  $x_0 = [0, 0, 2]$  y con esto vemos que  $P = P' + x_0$ .

Luego de todas las definiciones anteriores es momento de definir el concepto de símplice en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.1.5.** Sea  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  un conjunto afín independiente en  $\mathbb{R}^n$ . El  $m$ -símplice con vértices en  $P$  se define como la envolvente convexa de  $P$  y se denota como

$$[p_0, p_1, \dots, p_m] = \text{convexhull}(P).$$

La noción de símplice es la base para todo lo que se trabajará más adelante en el documento, luego un teorema que caracterice a los puntos que conforman a un símplice puede llegar a ser muy útil.

**Teorema 1.1.2.** Sea  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$  un conjunto afín en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $[p_0, p_1, \dots, p_m]$  el  $m$ -símplice con vértices en  $P$ . Entonces  $\forall x \in [p_0, p_1, \dots, p_m]$  existe una única expresión

$$x = \sum_{i=0}^m t_i p_i \tag{1.1}$$

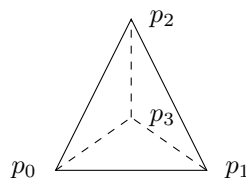
que describe a  $x$ . Más aún la expresión 1.1 es una combinación convexa.

La demostración de este teorema es en general fácil ya que la gran mayoría se obtiene por definición de envolvente convexa. La única parte que requiere de alguna sutileza es mostrar la unicidad de la combinación convexa que describe a  $x$ . A continuación se muestran ejemplos de símplices:

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  un conjunto afín independiente en  $\mathbb{R}^3$ .

1. Los 0-símplices son los puntos  $\{p_i\}$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ .
2. El 1-símplice  $[p_0, p_1]$  es la línea recta que une a  $p_0$  con  $p_1$ .
3. El 2-símplice  $[p_0, p_1, p_2]$  es el triángulo relleno con vértices en  $p_0, p_1, p_2$ .

4. El 3-símplice  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  es el tetraedro relleno con vértices en  $p_0, p_1, p_2$  y  $p_3$ :



## 1.2. Complejos simpliciales

En esta sección nos preocupamos por la construcción de complejos simpliciales en  $\mathbb{R}^n$ . Para eso hay que dar un poco más de definiciones sobre los símlices antes de definir un complejo simplicial.

**Definición 1.2.1.** Sea  $[p_0, p_1, \dots, p_m]$  un  $m$ -símplice en  $\mathbb{R}^n$ . La cara del  $m$ -símplice opuesta a  $p_i$  es el  $m - 1$ -símplice definido por:

$$[p_0, p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_m] = \left\{ \sum_{j=0}^n t_j p_j : t_j \geq 0, \sum_{j=0}^n t_j = 1, t_i = 0 \right\}.$$

Más aún la frontera de un símplex es la unión de todas sus caras.

**Definición 1.2.2.** Sea  $S = [p_0, p_1, \dots, p_m]$  un  $m$ -símplice en  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto de vértices de  $S$  se define de la siguiente forma:

$$Vert(S) = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}.$$

**Observación 1.2.1.** Si  $s$  es un  $m$ -símplice en  $\mathbb{R}^n$  entonces una cara  $s'$  de  $s$  es un símplex que satisface

$$Vert(s') \subseteq Vert(s).$$

**Definición 1.2.3.** Un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^n$  es una pareja ordenada  $K = (V, \Sigma)$  donde  $V$  es un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$  denominado el conjunto de vértices de  $K$  y  $\Sigma$  es una colección de símlices que satisface las siguientes condiciones:

1.  $\forall s \in \Sigma$  se tiene que  $Vert(s) \subset V$ .
2. Si  $s \in \Sigma$  y  $s'$  es un símplex tal que  $Vert(s') \subseteq Vert(s)$  entonces  $s' \in \Sigma$ .
3. Si  $s, t \in \Sigma$  entonces  $s \cap t \in \Sigma$  o es vacío.

De aquí en adelante asumiremos que el conjunto  $V$  de vértices es finito. Eso implica que si  $(V, \Sigma)$  es un complejo simplicial y  $V$  es finito,  $\Sigma$  también es un conjunto finito de símlices. Ahora es natural preguntarse por las propiedades topológicas de los complejos simpliciales. La siguiente definición resulta muy útil para describir topologicamente a los complejos simpliciales.

**Definición 1.2.4.** Sea  $K = (V, \Sigma)$  un complejo simplicial en  $\mathbb{R}^n$ . El espacio subyacente de  $K$ , denotado por  $|K|$  es el subespacio de la unión de todos los símlices en  $\Sigma$ :

$$|K| = \bigcup_{s \in \Sigma} s.$$

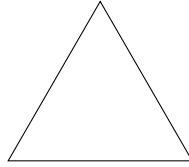
De la definición anterior es fácil deducir que si  $s$  es un  $m$ -símlice en  $\mathbb{R}^n$  entonces  $|s| = s$ .

**Observación 1.2.2.** Observe si  $s$  es un  $m$ -símlice en  $\mathbb{R}^n$  entonces por construcción es un conjunto compacto ya que es cerrado y acotado. Si  $K$  es un complejo simplicial  $(V, \Sigma)$  con  $V$  finito, entonces  $|K|$  es la unión de finitos compactos y por tanto es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  compacto.

**Definición 1.2.5.** Sea  $X$  un espacio topológico.  $X$  se llama un polyhedro si existen  $K$  un complejo simplicial y  $h : |K| \rightarrow X$  un homeomorfismo. El par  $(K, h)$  es una triangulación de  $X$ .

**Ejemplo 1.2.1.** Consideremos ahora una serie de ejemplos que faciliten el entendimiento de las definiciones introducidas anteriormente.

1. Sea  $\Delta^2$  el 2-símlice contenido en  $\mathbb{R}^3$  con vértices en  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .



Sea  $K$  el par  $(V, \Sigma)$  con  $V = \{e_1, e_2, e_3\}$  y

$$\Sigma = \{[e_1, e_2], [e_1, e_3], [e_2, e_3], \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \emptyset\}.$$

No es difícil mostrar que  $K$  es de hecho un complejo simplicial. Más aún, el espacio subyacente  $|K|$  es el perímetro de  $\Delta^2$ . Ahora considere  $a_1, a_2, a_3 \in S^1$ , donde  $S^1$  denota la esfera unitaria 1-dimensional. Ahora defina  $h : |K| \rightarrow S^1$  de forma que  $h(e_i) = a_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . No es un ejercicio difícil mostrar que  $h$  es un homeomorfismo, luego  $S^1$  es un polyhedro y  $(K, h)$  es una triangulación de  $S^1$ .

2. Sea  $\Delta^n$  el  $n$ -símlice estándar en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y sea  $K = (V, \Sigma)$  el complejo simplicial donde  $V = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  y  $\Sigma = \{s : Vert(s) \subsetneq V\}$ . Definiendo  $h : |K| \rightarrow S^{n-1}$  de forma similar que al ejemplo anterior se muestra que  $(K, h)$  es una triangulación de  $S^{n-1}$ .
3. Sea  $S$  un  $m$ -símlice y defina  $K = (V, \Sigma)$  el complejo simplicial con  $V = Vert(S)$  y  $\Sigma = \{k : Vert(k) \subseteq V\}$ . Note que  $|K| = S$  luego tomando  $h$  como la función identidad se concluye que todo símlice es un polyhedro.

El complejo simplicial construido en el ultimo ejemplo anterior es un complejo particular que tiene diferentes aplicaciones.

**Definición 1.2.6.** Sea  $s$  un  $m$ -símplice. Definimos  $\dot{s}$  como el complejo simplicial  $(V, \Sigma)$  con  $V = Vert(s)$  y  $\Sigma$  es la colección de todas las caras propias de  $s$ .

**Definición 1.2.7.** Sea  $s$  un  $m$ -símplice. Si  $m = 0$  defina  $\dot{s} = s$ . Si  $m > 0$  defina  $\dot{s}$  como el símplice abierto que se obtiene de quitarle  $\dot{s}$  a  $s$ .

La idea de la definición es la construcción de un símplice sin su frontera. Volviendo al ejemplo de  $\Delta^2$ , al quitarle todas las caras propias es quitarle todo el perímetro y dejar solo el relleno del triangulo. Con la definición anterior es posible construir un concepto importante para los complejos simpliciales.

**Definición 1.2.8.** Sea  $(V, \Sigma)$  un complejo simplicial y fije  $p \in V$ . La estrella de  $p$  se define como:

$$st(p) = \bigcup_{\substack{s \in \Sigma \\ p \in Vert(s)}} \dot{s}.$$

Intuitivamente, la estrella de un punto  $p$  consiste en unir todos los símplices que contengan a  $p$  quitandoles la cara opuesta. Luego la estrella de un punto resulta ser un abierto del complejo simplicial original con la topología del subespacio.

Ahora, note que a pesar que la noción de dimensión en un símplice es bastante clara un complejo simplicial es la unión de varios símplices y posiblemente de diferentes dimensiones. Luego la noción de dimensión en un complejo simplicial puede tornarse ambigua ya que puede tener diferentes dimensiones dependiendo en el lugar donde se esté analizando. Para solucionar este problema se define una noción general de dimensión para un complejo simplicial.

**Definición 1.2.9.** Sea  $K = (V, \Sigma)$  un complejo simplicial. Se define la dimensión de  $K$  de la siguiente forma:

$$\dim(K) = \sup_{s \in \Sigma} \dim(s)$$

donde si  $s$  es un  $m$ -símplice entonces  $\dim(s) = m$ .

Note que a pesar que en este documento solo se está trabajando con complejos simpliciales finitos, la definición aún sirve para complejos simpliciales infinitos ya que el supremo siempre se alcanza. Así mismo con la definición de dimensión es posible hacer varias anotaciones sobre los complejos simpliciales.

**Observación 1.2.3.** Existe un teorema de existencia, en donde si  $K$  es un complejo simplicial finito de dimensión  $n$  entonces existe un subespacio  $X$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  que hace a  $(K, h)$  una triangulación de  $X$ .

**Observación 1.2.4.** Considere  $K$  el complejo simplicial de todos los subcomplejos  $s$  de  $\Delta^{2d+1}$  tal que  $\dim(s) \leq d$ . Evidentemente  $\dim(K) = d$ , sin embargo existe un teorema que muestra que  $K$  no se puede inyectar en  $\mathbb{R}^{2d}$ .

Hasta el momento se han introducido muchos conceptos que ayudan a describir los complejos simpliciales. Sin embargo, no hay todavía ningún criterio de comparación entre complejos simpliciales. El siguiente teorema muestra una forma para poder comparar complejos en terminos dimensionales.

**Teorema 1.2.1.** *Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales. Suponga que existe  $h : |K| \rightarrow |L|$  homeomorfismo. Entonces  $\dim(K) = \dim(L)$ .*

**Demostración 1.2.1.** Suponga primero que  $\dim(K) > \dim(L)$  y sea  $\sigma \in K$  un  $m$ -símplice. Note que por definición,  $\overset{\circ}{\sigma}$  es abierto en  $|K|$ . Como  $h$  es un homeomorfismo entonces  $h(\overset{\circ}{\sigma})$  es un abierto de  $|L|$ . Note que  $\{st(p)\}_{p \in Vert(L)}$  es un cubrimiento abierto de  $|L|$  entonces existe un  $m$ -símplice  $\tau$  con  $m \leq \dim(L)$  tal que  $h(\overset{\circ}{\sigma}) \cap (\tau) = W$  un abierto no vacío de  $|L|$ . Escoja  $\varphi : \Delta^{\dim(L)} \rightarrow \sigma$  homeomorfismo que satisfaga  $\varphi(\overset{\circ}{\Delta}^{\dim(L)}) = \overset{\circ}{\sigma}$ . Sea  $U = \varphi^{-1}(h^{-1}(W))$  un abierto de  $\Delta^{\dim(L)}$ . Sea  $g : \Delta^p \rightarrow \Delta^{\dim(L)}$  una inmersión de forma que  $Im(g)$  no tiene abiertos no vacíos de  $\Delta^{\dim(L)}$ . Entonces tanto  $U$  como  $g(W)$  son homeomorfos en  $\Delta^{\dim(L)}$ . Sin embargo,  $U$  es abierto y  $g(W)$  no lo es y por tanto hay una contradicción. Por simetría del argumento tampoco es posible que  $\dim(K) < \dim(L)$  y eso concluye la demostración.

Si quisiera construirse una categoría de complejos simpliciales, hasta el momento solo se han definido los objetos, más sin embargo aún falta definir los morfismos. La siguiente definición busca definir los morfismo que hacen a los complejos simpliciales una categoría.

**Definición 1.2.10.** Sean  $K = (V_1, \Sigma_1)$  y  $L = (V_2, \Sigma_2)$  complejos simpliciales. Un mapa simplicial  $\varphi : K \rightarrow L$  es una función  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  que satisface:

$$\text{Si } [p_0, \dots, p_m] \in \Sigma_1 \text{ entonces } [\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_m)] \in \Sigma_2.$$

Con esta definición ya tiene sentido hablar de la categoría de complejos simpliciales, la cual se va a denominar como  $\mathcal{K}$ . Ahora el siguiente teorema muestra cual es la relación entre los complejos simpliciales y los espacios topológicos.

**Teorema 1.2.2.** *Si  $\mathcal{K}$  es la categoría de los complejos simpliciales y  $Top$  es la categoría de los espacios topológicos entonces*

$$| \cdot | : \mathcal{K} \longrightarrow Top$$

*es un funtor covariante.*

Una noción que hasta el momento ha sido intuitiva y que será útil formalizar antes de continuar es un subcomplejo:

**Definición 1.2.11.** Sea  $K = (V, \Sigma)$  un complejo simplicial. Un subcomplejo  $L$  de  $K$  es un complejo simplicial  $(W, \Lambda)$  que satisface:

1. Si  $\sigma \in \Lambda$  entonces  $\sigma \in \Sigma$ .
2.  $W \subseteq V$

### 1.3. Homología Simplicial

**Definición 1.3.1.** Sea  $K = (V, \Sigma)$  un complejo simplicial. Decimos que  $K$  está orientado si existe  $\preceq$  relación de orden tal que  $(V, \preceq)$  es un orden parcial y  $\forall \sigma \in \Sigma$  se cumple que  $(\text{Vert}(\sigma), \preceq)$  es un orden lineal.

Note que cualquier orden lineal sobre el conjunto de vértices de un complejo simplicial define también una orientación.

**Definición 1.3.2.** Sea  $(K, \preceq)$  un complejo simplicial orientado con  $K = (V, \Sigma)$  y sea  $q \geq 0$ . Defina  $C_q(K)$  como un grupo abeliano con la siguiente presentación:

1. *Generadores:* Todas las  $(q+1)$ -tuplas  $(p_0, \dots, p_q)$  que satisfacen  $[p_0, p_1, \dots, p_q] \in \Sigma$  con  $p_i \in V$ .
2. *Relaciones:*
  - (i)  $(p_0, \dots, p_q) = 0$  si algún  $p_i$  está repetido.
  - (ii)  $(p_0, p_1, \dots, p_q) = (\text{sgn}\sigma)(p_{\sigma(0)}, p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(q)})$  donde  $\sigma \in S_{q+1}$

**Proposición 1.3.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado con  $\dim K = n$ . Entonces:

1.  $C_q(K)$  es un grupo abeliano libre con base todos los  $[p_0, \dots, p_q]$  que conforman un símlice y  $p_0 < p_1 < \dots < p_q$ .
2.  $C_q(K) = 0$  para todo  $q > n$ .

De aquí en adelante es importante resaltar que se usará la notación de grupos abelianos. La operación de grupo se va a denotar con el símbolo  $+$  y  $ng = \underbrace{g + \dots + g}_{n\text{-veces}}$ .

**Definición 1.3.3.** Defina  $\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$  como

$$\partial_q([p_0, \dots, p_q]) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q]$$

Es fácil mostrar que todos los  $\partial_q$  son un homomorfismo de grupos. Este hecho es muy importante para el próximo teorema que será la base para construir los grupos de homología.

**Teorema 1.3.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado de dimensión  $n$ . Entonces

$$0 \xrightarrow{\partial} C_n(K) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\partial} 0$$

es un complejo de cadenas y se denota  $C_\star(K)$ .

**Demostación 1.3.1.** Para probar que es  $C_*(K)$  hay que mostrar que  $\partial \circ \partial = 0$  para cualquier elemento en  $C_q(K)$  con  $0 \leq q \leq \dim K$ . Note que como los  $\partial$  son todos homomorfismos entonces basta con probarlo para algún generador y por linealidad la demostración se extiende a cualquier elemento de  $C_q(K)$ . Sea entonces  $[p_0, p_1, \dots, p_q] \in C_q(K)$ . Por definición

$$\partial_q([p_0, \dots, p_q]) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q].$$

Ahora al evaluar esta expresión en  $\partial_{q-1}$  se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}(\partial_q([p_0, \dots, p_q])) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1}([p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q]) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] + \sum_{j=i+1}^q (-1)^{j-1} [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q] \right) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} [p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] + \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} [p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] \end{aligned}$$

Note que el termino de la izquierda es igual al de la derecha salvo por un símbolo que viene dado por el -1. Luego la suma es igual a 0 con lo que queda demostrado el teorema  $\square$

Una de las implicaciones más importantes del teorema anterior es que  $Img \partial_q \subset \ker \partial_{q-1}$ . Como todos los  $C_q(K)$  son grupos abelianos libres finitamente generados entonces todos los subgrupos son normales. Con estos hechos en mente tiene sentido la siguiente definición.

**Definición 1.3.4.** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado. Para cada  $q$  defina los siguientes subgrupos de  $C_q(K)$ :

1.  $Z_q(K) = \ker \partial_q$  y se denomina los  $q$ -ciclos simpliciales de  $K$ .
2.  $B_q(K) = Img \partial_{q+1}$  y se denomina las  $q$  fronteras de  $K$ .
3.  $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$  y se conoce como el  $q$ -ésimo grupo de homología de  $K$ .

Observe que un complejo simplicial induce diferentes grupos abelianos. Y surge la pregunta si un mapa simplicial induce también un homomorfismo entre los grupos abelianos asociados a los complejos simpliciales del mapa simplicial original. La respuesta es si, y la siguiente definición muestra como definir esa función.

**Definición 1.3.5.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales orientados y sea  $\varphi : K \rightarrow L$  un mapa simplicial. Para cada  $q \geq 0$  defina  $\varphi_{\#} : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$  como:

$$\varphi_{\#}([p_0, \dots, p_q]) = [\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_q)]$$

La definición anterior si bien es un homomorfismo de grupos, tiene un pequeño problema. Es posible que el orden de los  $\varphi(p_i)$  no sea compatible con la orientación. Sin embargo, la definición de  $C_q(K)$  es suficientemente general para que esto no represente un problema. La siguiente proposición resulta bastante útil a la hora de hacer cálculos explícitos.

**Proposición 1.3.2.** *Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales orientados y  $\varphi : K \rightarrow L$  un mapa simplicial. Entonces  $\varphi_{\#} : C_q(K) \rightarrow C_q(L)$  es un mapa de cadenas. Es decir  $\varphi_{\#} \circ \partial = \partial \circ \varphi_{\#}$ .*

**Demostración 1.3.2.** Sea  $[p_0, \dots, p_q] \in C_q(K)$  y sea  $\varphi : K \rightarrow L$  un mapa simplicial. Antes de hacer los cálculos es importante resaltar que  $\varphi_{\#}$  es un homomorfismo de grupos y eso justifica varios de los pasos. Por definición:

$$\begin{aligned} \varphi_{\#} \circ \partial_q([p_0, \dots, p_q]) &= \varphi_{\#} \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] \right) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \varphi_{\#}([p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q]) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i [\varphi(p_0), \dots, \widehat{\varphi(p_i)}, \dots, \varphi(p_q)] \\ &= \partial_q([\varphi(p_0), \dots, \varphi(p_q)]) = \partial_q \circ \varphi_{\#}([p_0, \dots, p_q]) \end{aligned}$$

Y eso concluye la demostración.

De aquí en adelante se va a enfatizar en los grupos de homología. El primer resultado se obtiene no resulta sorprendente después de la proposición anterior.

**Teorema 1.3.2.** *Para todo  $q \geq 0$  el  $q$ -ésimo grupo de homología define un functor  $H_q : \mathcal{K} \rightarrow Ab$  donde  $Ab$  denota la categoría de los grupos abelianos.*

**Demostración 1.3.3.** Ya se ha mostrado anteriormente como dado un  $K \in \text{obj}\mathcal{K}$ , es decir un complejo simplicial  $H_q(K)$  define un grupo abeliano. Ahora falta definir como actúa  $H_q$  sobre los morfismos. Sea  $\varphi$  un morfismo de la categoría de complejos simpliciales entre  $K$  y  $L$ . Defina entonces  $\varphi_{\star} : H_q(K) \rightarrow H_q(L)$  como  $\varphi_{\star}(p + B_q(K)) = \varphi(p) + B_q(L)$  donde  $p \in Z_q(K)$ . Con esta definición es fácil mostrar que  $H_q$  es un functor covariante.

Antes de continuar estudiando los grupos de homología, es necesario presentar un teorema que caracterización que facilite los cálculos.

**Teorema 1.3.3.** *Sea  $K$  un complejo simplicial orientado finito. Suponga además que  $\dim K = n$ . Entonces:*

1.  $H_q(K)$  es finitamente generado  $\forall q \geq 0$ .
2.  $H_q(K)$  es trivial  $\forall q > n$ .
3.  $H_n(K)$  es libre abeliano.

**Demostración 1.3.4.** Esta demostración es consecuencia de varias de las propiedades de  $C_q(K)$  mencionadas en la proposición 1.3.1.

1. Como  $C_q(K)$  es finitamente generado entonces  $Z_q(K)$  también es finitamente generado pues es un subgrupo. Por consiguiente el cociente con  $B_q(K)$  también es finitamente generado.
2. Note que como  $C_q(K) = 0$  para todo  $q > n$  entonces  $Z_q(K)$  es también cero y por tanto  $H_q(K) = 0$  para todo  $q > n$ .
3. Como  $C_{n+1}(K) = 0$  entonces  $B_n(K) = 0$  también. Luego  $H_n(K) = Z_n(K)$ . Como  $C_n(K)$  es libre abeliano entonces  $Z_n(K)$  también es libre abeliano.

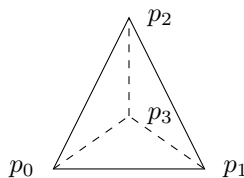
Ahora introducimos uno de los invariantes topológicos más importantes en geometría.

**Definición 1.3.6.** Sea  $K$  un complejo simplicial orientado con  $\dim K = n$ . Para cada  $q \geq 0$  denote  $\alpha_q$  como el número de  $q$ -símplices en  $K$ . Definimos la característica de Euler-Poincaré de  $K$ , denotada por  $\chi(K)$  como:

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$$

Antes de ver como se relaciona la característica de Euler con los grupos de homología veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.3.1.** Considere el tetraedro clásico visto como complejo simplicial:



Es decir  $V = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  y  $\Sigma = \mathbb{P}(V)$  donde cada elemento en  $\Sigma$  denota la envolvente convexa. Calculemos entonces cada uno de los  $\alpha_i$ 's. Como los 0-símplices son simplemente los puntos entonces  $\alpha_0 = |V| = 4$ . Ahora los 1-símplices son todas las aristas que hay en el tetraedro. Como todos los puntos están conectados entre sí entonces  $\alpha_1 = \binom{4}{2} = 6$ . De igual forma  $\alpha_2 = 4$  y  $\alpha_3 = 1$ . Entonces la característica de Euler del tetraedro es:

$$\chi(\Delta^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1.$$

Note que si definimos  $K$  como el tetraedro sin relleno, es decir  $K = (V, \Sigma_1)$  con  $\Sigma_1 = \Sigma \setminus [p_0, p_1, p_2, p_3]$  entonces la característica se vuelve  $\chi(K) = 2$  que es igual a la de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ . Es decir el tetraedro vacío se puede deformar continuamente a  $S^2$ .

Al igual que la característica de Euler, los grupos de homología describen invariantes topológicos. Por ejemplo,  $H_0(K)$  describe el número de componentes conexas de  $K$  y  $H_1(K)$  el número de lazos no contráctiles. No es sorprendente entonces que haya una relación entre la característica de Euler y los grupos de homología:

**Teorema 1.3.4.** *Sea  $K$  un complejo simplicial orientado tal que  $\dim K = n$ . Entonces la característica de Euler de  $K$  es:*

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank}(H_q(K))$$

**Demostración 1.3.5.** Por definición  $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$  luego para todo  $q \geq 0$  se tiene que  $\text{rank}(H_q(K)) = \text{rank}(Z_q(K)) - \text{rank}(B_q(K))$ . Adicional, para cada  $q \geq 0$  podemos construir la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow Z_q(K) \xrightarrow{i} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} B_{q-1}(K) \rightarrow 0.$$

La sucesión anterior implica que  $C_q(K) = Z_q(K) \oplus B_{q-1}(K)$  y por tanto  $\text{rank}(C_q) = \text{rank}(Z_q(K)) + \text{rank}(B_{q-1}(K))$ . Lo anterior junto con el hecho que  $\alpha_q = \text{rank}(C_q(K))$  por construcción de  $C_q(K)$  podemos reescribir la característica de Euler como:

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q (\text{rank}(Z_q(K)) + \text{rank}(B_{q-1}(K))) \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank}(Z_q(K)) + \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank}(B_{q-1}(K)) \end{aligned}$$

Ahora, note que  $\text{rank}(B_{-1}(K)) = \text{rank}(B_m(K)) = 0$ . Usando este hecho cambiamos el subíndice del segundo sumando y reescribimos como:

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank}(Z_q(K)) + \sum_{q=0}^n (-1)^{q+1} \text{rank}(B_q(K)) \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank}(Z_q(K)) - \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank}(B_q(K)) \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q (\text{rank}(Z_q(K)) - \text{rank}(B_q(K))) \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{rank}(H_q(K)) \end{aligned}$$

y con eso concluimos la demostración  $\square$

## 1.4. Alguno complejos particulares

En las secciones pasadas hemos hecho una introducción muy general a los complejos simpliciales. En esta sección nos preocupamos por como construir complejos simpliciales a partir de una muestra de datos en  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, antes hay que hacer una definición más:

**Definición 1.4.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un cubrimiento de  $X$ . Definimos el nervio de  $U$  como el complejo simplicial  $\mathcal{N}(U) = (V, \Sigma)$  con  $V = I$  y  $[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \Sigma$  si y solo si  $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset$ .

El nervio de un cubrimiento resulta ser una fundamental para construir los complejos de Čech. Antes de esa construcción presentamos el teorema del nervio. La demostración de este teorema es muy larga y técnica así que la omitimos de este documento:

**Teorema 1.4.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $X$  contable. Si  $\forall S \subseteq I$  con  $S \neq \emptyset$  se tiene que*

$$\bigcap_{k \in S} U_k$$

*es vacío ó homotópicamente equivalente a un punto entonces*

$$\mathcal{N}(U) \simeq_h X.$$

Este teorema resulta sumamente útil ya que deformar a través de homotopías es una operación continua y por tanto los grupos de homología del nervio describen muchas propiedades topológicas del espacio original. Ahora no movemos al contexto de espacios métricos e introducimos la siguiente notación:

**Definición 1.4.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $\varepsilon > 0$ . Denotamos:

$$\mathcal{B}(X, \varepsilon) = \{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$$

como el cubrimiento abierto de bolas de radio  $\varepsilon$  con centros en  $X$ .

Con la notación anterior ahora si introducimos los complejos de Čech mencionados anteriormente.

**Definición 1.4.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $V \subseteq X$  que satisface

$$X = \mathcal{B}(V, \varepsilon)$$

para algún  $\varepsilon > 0$ . Definimos entonces el complejo de Čech de  $V$  con grado  $\varepsilon$  como

$$\check{C}(V, \varepsilon) = \mathcal{N}(\mathcal{B}(V, \varepsilon)).$$

En nuestro contexto, la muestra de datos sobre la cual se va a trabajar sirve como conjunto  $V$ . Por supuesto entre más datos haya, el complejo de Čech será más sofisticado y habrá más información topológica para analizar. Así mismo la escogencia del  $\varepsilon$  no es arbitraria, pero ese problema de abordará más adelante.

Los complejos de Čech aunque teóricamente funcionan muy bien tienen un costo computacional muy alto. Por ejemplo, si el conjunto de datos es de tamaño  $n$ , el computador necesita revisar  $\sum_{i=1}^{n-1} i$  intersecciones distintas solo para calcular los 1-símplices. Para suavizar la carga computacional se introduce el siguiente tipo de complejo.

**Definición 1.4.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\varepsilon > 0$ . Definimos el complejo de Vietoris-Rips de  $X$  de grado  $\varepsilon$  como el complejo simplicial  $VR(X, \varepsilon) = (V, \Sigma)$  en donde  $V = X$  y  $[x_0, \dots, x_n] \in \Sigma$  si y solamente si  $\forall i, j = 0, 1, \dots, n$  se cumple que  $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$ .

**Proposición 1.4.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\varepsilon > 0$ . Entonces se tienen las siguientes contencencias:

$$\check{C}(X, \varepsilon) \subseteq VR(X, 2\varepsilon) \subseteq \check{C}(X, 2\varepsilon)$$

**Demostración 1.4.1.** Mostramos la primera contencencia y la segunda es análoga. Considere entonces los complejos  $\check{C}(X, \varepsilon)$  y  $VR(X, 2\varepsilon)$ . Por definición de los complejos el conjunto de vértices para ambos complejos es  $X$ . Luego solo hay que mostrar que el conjunto de símplices en  $\check{C}(X, \varepsilon)$  está contenido en el conjunto de símplices de  $VR(X, \varepsilon)$ . Sea entonces  $\sigma$  un símplice en  $\check{C}(X, \varepsilon)$  y sin pérdida de generalidad suponga que en particular es un  $k$ -símplice. Entonces  $\sigma = [x_0, \dots, x_k]$  para  $x_i \in X$ . Por definición del complejo de Čech tenemos que

$$\bigcap_{i=0}^k B_\varepsilon(x_i) \neq \emptyset. \quad (1.2)$$

Queremos ver que para cualquier par de índices  $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$  se tiene que  $d(x_i, x_j) \leq 2\varepsilon$ . La expresión 1.2 muestra que en particular para cualquier par  $i, j$  la intersección de las bolas en los puntos  $x_i$  y  $x_j$  es no vacía. Tome  $y \in B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_j)$ . Ahora usando desigualdad triangular tenemos que

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, y) + d(y, x_j) \leq 2\varepsilon$$

que es lo que queríamos mostrar. Por tanto  $\check{C}(X, \varepsilon) \subseteq VR(X, 2\varepsilon)$ .

La proposición anterior muestra que aunque los complejos de Vietoris-Rips son menos costosos a nivel computacional, para un mismo  $\varepsilon$  el complejo de Čech permite extraer más información para un futuro análisis.

## 1.5. Persistencia Homológica

**Observación 1.5.1.** Sea  $(P, \leq)$  un orden parcial y note que podemos definir la categoría  $\mathcal{P}$  asociada al orden parcial de la siguiente forma:

1.  $\text{obj}(\mathcal{P})=P$ .
2. Para  $p, q \in P$  decimos que el morfismo que va de  $p$  a  $q$  existe si y solo si  $p \leq q$ .

Esta observación es importante porque permite entender los objetos persistentes de distintas formas. Definimos entonces objetos persistentes:

**Definición 1.5.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\mathcal{P}$  un orden parcial visto como categoría. Un objeto  $P$ -persistente en  $\mathcal{C}$  es la imagen de un funtor covariante

$$\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C}$$

Otra forma de entender los objetos  $P$ -persistentes es una familia  $\{C_x\}_{x \in \mathcal{P}}$  con  $C_x \in \text{obj}(\mathcal{C})$  junto con una serie de morfismos

$$\phi_{xy} : C_x \rightarrow C_y$$

siempre que  $x \leq y$  y que satisfacen  $\phi_{yz} \circ \phi_{xy} = \phi_{xz}$  si  $x \leq y \leq z$ . Antes de continuar veamos un par de ejemplos de interés para nosotros:

**Ejemplo 1.5.1.** Considere  $\mathbb{R}$  con el orden usual y  $\mathcal{K}$  la categoría de complejos simpliciales. Si  $X$  es un espacio topológico fijo entonces

$$VR(X, \cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{K}$$

define un funtor covariante, en donde dado un  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  lo envía al complejo de Rips  $VR(X, \varepsilon)$ . Note que si  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$  entonces  $VR(X, \varepsilon_1) \subseteq VR(X, \varepsilon_2)$ . Si tomamos entonces la inclusión  $i : VR(X, \varepsilon_1) \rightarrow VR(X, \varepsilon_2)$  como la imagen de los morfismos en  $\mathbb{R}$  a través del funtor concluimos entonces que los complejos de Rips definen un objeto  $\mathbb{R}$ -persistente en la categoría de los complejos simpliciales.

**Ejemplo 1.5.2.** Dado un  $q \in \mathbb{N}$  fijo definimos un objeto  $\mathbb{R}$ -persistente sobre  $Ab$  la categoría de grupos abelianos. El funtor definido en el ejemplo anterior se puede componer con  $H_q$ . En ese caso

$$H_q(VR(X, \cdot)) : \mathbb{R} \longrightarrow Ab$$

también define un funtor covariante pues es la composición de dos funtores covariantes. En este caso, la imagen de los morfismos es  $i_*$  el mapa inducido por la inclusión entre dos complejos simpliciales.

**Observación 1.5.2.** Observe que los ejemplos anteriores también definen objetos  $\mathbb{N}$ -persistentes. En efecto si  $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función monótona creciente, es a la vez un funtor covariante entre  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{R}$  vistos como ordenes parciales y la composición entre funtores covariantes resulta nuevamente un funtor covariante.

Los dos ejemplos anteriores sirven para justificar la siguiente definición pues como ya vimos si  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$  entonces  $VR(X, \varepsilon_1)$  es un subcomplejo de  $VR(X, \varepsilon_2)$ . Esto entonces nos da una forma empírica de construir lo que a continuación definimos como una filtración.

**Definición 1.5.2.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Definimos una filtración de  $K$  como una sucesión anidada finita de subcomplejos de  $K$  que comienza con el vacío y termina con  $K$ :

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_m = K$$

Note que para cada elemento de la filtración el grupo de homología puede cambiar. Por ejemplo  $H_0(K_0)$  es el grupo trivial por definición de la filtración. Sin embargo  $H_0(K_1)$  por lo menos es  $\mathbb{Z}$ . Esto nos permite introducir la noción de persistencia en una clase homológica.

**Definición 1.5.3.** Sea  $K$  un complejo simplicial,  $\{K_i\}_{i=0}^m$  una filtración de  $K$  y  $q \in \mathbb{N}$ .

1. Una clase de homología  $\alpha$  nace en  $K_i$  si no es la imagen de

$$i_{*,i-1} : H_q(K_{i-1}) \rightarrow H_q(K_i).$$

2. Decimos que  $\alpha$  muere entrando a  $K_j$  si  $i_{*,j-1}(\alpha)$  está contenida en la imagen de  $i_{*,j-1}$  pero no está contenida en la imagen de  $i_{*,j}$ .
3. Por último definimos la persistencia de  $\alpha$  como  $j - 1$ .

Una observación importante es que las clases tienen distintos momentos de nacimiento y muerte dependiendo del grupo de homología sobre el cual se esté trabajando. Una forma muy útil de presentar esta información es a través de un código de barras. Otra forma de codificar es a través del diagrama de persistencia que definimos a continuación.

**Definición 1.5.4.** Sea  $K$  un complejo simplicial,  $\{K_i\}_{i=0}^m$  una filtración de  $K$  y  $k \in \mathbb{N}$ . El diagrama de persistencia de dimensión  $k$  es un multiconjunto de  $\mathbb{R}^2$  en donde  $(i, j) \in \mathbf{dgm}(k)$  si existe una clase asociada a la  $k$ -homología que nace en  $K_i$  y muere entrando  $K_j$

Antes de continuar hay que hacer varios comentarios sobre los diagramas de persistencia. Primero, note que la definición pide que el diagrama sea un multiconjunto, lo cual tiene mucho sentido porque más de una clase puede nacer y morir en el mismo punto. Denotamos la diagonal como  $\Delta = \{(x, x) : x \geq 0\}$  y de ahora en adelante asumimos que  $\Delta \subset \mathbf{dgm}(k)$  y cada punto con multiplicidad contable. Esto lo hacemos con el propósito de poder tener biyecciones entre distintos diagramas. Adicionalmente, no cambia la información porque si una clase tuviera su punto sobre la diagonal, quiere decir que nace y muere en el mismo punto, que es otra forma de decir que no existe.

## Capítulo 2

# Ventanas Deslizantes

### 2.1. Series de Fourier

En esta sección hace una breve introducción a la serie de Fourier de una función con periodo  $2\pi$ . En general las funciones con las que trabajaremos no tienen periodo  $2\pi$  más sin embargo es posible hacer una normalización para ajustarla a la teoría presentada.

**Definición 2.1.1.** Sea  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$  visto como grupo aditivo y considere  $\mathbb{Z}$  como subgrupo normal. Definimos

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

**Definición 2.1.2.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es integrable en  $\mathbb{T}$  si es integrable en el intervalo  $[0, 2\pi)$  y su integral es

$$\int_{\mathbb{T}} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

**Definición 2.1.3.** Definimos el conjunto  $L^1(\mathbb{T})$  todas las funciones absolutamente integrables en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Así mismo, para  $f \in L^1(\mathbb{T})$  definimos

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt.$$

**Observación 2.1.1.**  $L^1(\mathbb{T})$  dotado con la norma  $\|\cdot\|_{L^1}$  es un espacio de Banach.

**Definición 2.1.4.** Un polinomio trigonométrico en  $\mathbb{T}$  es una expresión de la forma:

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}.$$

**Proposición 2.1.1.** Sea  $P(t)$  un polinomio trigonométrico en  $\mathbb{T}$ . Entonces los coeficientes  $a_n$  están dados por la siguiente forma:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(t) e^{-int} dt.$$

**Demostación 2.1.1.** Para hacer esta demostración comenzamos demostrando la ecuación:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ijt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

El caso en el que  $j = 0$  es claro, luego supongamos que  $j \neq 0$ . Al integrar se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{ijt} dt &= \int_0^{2\pi} \cos(jt) + i \sin(jt) dt \\ &= \frac{\sin(2j\pi) - \sin(0)}{j} + \frac{-i(\cos(2j\pi) - \cos(0))}{j} = 0 \end{aligned}$$

Con esta fórmula en mente la proposición se deriva de multiplicar el polinomio por  $e^{-int}$  e integrar a ambos lados.

**Definición 2.1.5.** Una serie trigonométrica en  $\mathbb{T}$  es una expresión de la forma:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Copn todas estas definiciones ahora nos concentramos en la construcción de una serie de Fourier para una función  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

**Definición 2.1.6.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . En  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$  es

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt.$$

**Definición 2.1.7.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . La serie de Fourier asociada a  $f$  se define como

$$S[f](t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

**Teorema 2.1.1.** Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ .

1.  $\widehat{(f+g)}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$ .
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$  se tiene que  $\widehat{(\alpha f)}(n) = \alpha \hat{f}(n)$ .
3. Si  $\bar{f}$  es el complejo conjugado de  $f$  entonces  $\widehat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$ .
4. Si  $f_\tau(t) = f(t - \tau)$  para  $\tau \in \mathbb{T}$  entonces  $\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n) e^{-in\tau}$ .
5.  $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1}$ .

## 2.2. Ventanas Deslizantes

En esta sección hacemos una introducción a las ventanas deslizantes. Durante varias secciones nos concentramos en estudiar las ventanas deslizantes asociadas a una función ya que de estas se obtienen muchas sobre la periodicidad de una función. Comenzamos entonces con la definición:

**Definición 2.2.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \in \mathbb{N}$  y  $\tau \in \mathbb{R}$  con  $\tau > 0$ . Definimos entonces la ventana de  $f$  a  $\mathbb{R}^{M+1}$  con base en  $t \in \mathbb{R}$  como

$$SW_{M,\tau}f(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t + \tau) \\ \vdots \\ f(t + M\tau) \end{bmatrix}.$$

Al escoger diferentes  $t \in \mathbb{R}$  y evaluarlos en la ventana se obtiene una serie de puntos en  $\mathbb{R}^{M+1}$  y se denomina la nube de puntos a través de la ventana para  $f$ . Así mismo el parámetro  $M\tau$  se conoce como el ancho de la ventana.

**Ejemplo 2.2.1.** Sea  $L \in \mathbb{N}$  y tomemos  $f(t) = \cos(Lt)$ . Vamos a construir entonces la ventana corrediza de  $f$  con parámetros  $M$  y  $\tau$ . Usando la definición, la ventana corrediza de  $f$  es:

$$SW_{M,\tau}f(t) = \begin{bmatrix} \cos(Lt) \\ \cos(Lt + L\tau) \\ \vdots \\ \cos(Lt + ML\tau) \end{bmatrix}.$$

Ahora, al usar la formula de suma de ángulos la ventana se transforma en:

$$\begin{aligned} SW_{M,\tau}f(t) &= \begin{bmatrix} \cos(Lt) \\ \cos(Lt) \cos(L\tau) - \sin(Lt) \sin(L\tau) \\ \vdots \\ \cos(Lt) \cos(LM\tau) - \sin(Lt) \sin(LM\tau) \end{bmatrix} \\ &= \cos(Lt) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(L\tau) \\ \vdots \\ \cos(LM\tau) \end{bmatrix} - \sin(Lt) \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(L\tau) \\ \vdots \\ \sin(LM\tau) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora definamos  $u_L = [1, \cos(L\tau), \dots, \cos(LM\tau)]$  y  $v_L = [0, \sin(L\tau), \dots, \sin(LM\tau)]$ . Con esto la ventana se puede escribir como:

$$SW_{M,\tau}f(t) = \cos(Lt)u - \sin(Lt)v.$$

Note que si  $u$  y  $v$  son vectores linealmente independientes entonces la ventana corrediza de  $f(t)$  describe una elipse en el plano generado por los vectores  $u$  y  $v$ . Si en cambiamos  $f(t) = \sin(Lt)$  entonces no es difícil mostrar que  $SW_{M,\tau}f(t) = \sin(Lt)u + \cos(Lt)v$ .

## 2.3. Análisis en ventanas deslizantes

Comenzamos con un poco de notación: Si  $X$  y  $Y$  son dos espacios topológicos entonces  $C(X, Y)$  es el conjunto de funciones continuas que van de  $X$  a  $Y$ .

**Observación 2.3.1.** Fije  $M \in \mathbb{N}$  y  $\tau > 0$ . Con estos dos parámetros fijos la ventana es un operador entre espacios de funciones continuas así:

$$SW_{M, \tau} : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{M+1}).$$

**Proposición 2.3.1.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Entonces  $(C(X, Y), \|\cdot\|)$  es espacio de Banach con  $\|\cdot\|_\infty$  definida como:

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Ahora nos centramos en las propiedades de las ventanas deslizantes como operador entre espacio de funciones.

**Teorema 2.3.1.**  $\forall M \in \mathbb{N}$  y  $\tau > 0$  se tiene que  $SW_{M, \tau} : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{M+1})$  es un operador lineal acotado y  $\|SW_{M, \tau}\| \leq \sqrt{M+1}$ .

Observe que el teorema solo considera funciones periódicas en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Este hecho es muy importante en la demostración del teorema.

**Demostración 2.3.1.** La linealidad del operador es trivial gracias a su definición. Luego solo mostramos que es acotado y su cota. Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$  y consideramos la norma en  $\mathbb{R}^{M+1}$  para un  $t \in \mathbb{T}$  fijo. Esto es:

$$\begin{aligned} \|SW_{M, \tau} f(t)\|_{\mathbb{R}^{M+1}}^2 &= \sum_{n=0}^M |f(t + n\tau)|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^M \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|^2 \\ &= \sum_{n=0}^M \|f\|^2 \\ &= (M+1)\|f\|^2 \end{aligned}$$

de donde se obtiene trivialmente el resultado  $\square$

De aquí en adelante vamos a trabajar con funciones en  $L^2(\mathbb{T})$ . Sin embargo todas las conclusiones hechas en la sección anterior prevalecen pues  $\mathbb{T}$  tiene medida finita y por tanto  $L^2(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$ . Ahora, dada una función  $f \in L^2(\mathbb{T})$  podemos escribir su serie de fourier como

$$Sf(t) = S_N f(t) + R_N f(t)$$

en donde

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int} = \sum_{n=0}^N a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

es la truncación de la serie de fourier en el  $N$ -ésimo coeficiente y  $R_N$  es el residuo que tiende a 0 cuando  $N$  tiende a infinito. Ahora al usar el teorema anterior podemos dar una expresión para la serie de Fourier de la ventana deslizante de  $f$ . Esta es:

$$SW_{M,\tau}f(t) = \sum_{n=0}^N \cos(nt)(a_n u_n + b_n v_n) + \sin(nt)(b_n u_n - a_n v_n) + SW_{M,\tau}R_N f(t)$$

donde  $u_n = SW_{M,\tau} \cos(nt)|_{t=0}$  y  $v_n = SW_{M,\tau} \sin(nt)|_{t=0}$ . La teoría de Fourier nos dice que  $S_N f(t)$  converge a  $f(t)$  para cada  $t$ . Sin embargo, no sabemos si la ventana afecta la convergencia. El siguiente paso es encontrar una cota para  $SW_{M,\tau}R_N f(t)$  y ver que en efecto tiende a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$ . Para aliviar la notación vamos a denotar  $\phi_\tau(t) = SW_{M,\tau}S_N f(t)$ . Antes del siguiente teorema recordamos la desigualdad de Cauchy-Swartz en  $\ell_2(\mathbb{N})$ .

**Proposición 2.3.2.** Sean  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2(\mathbb{N})$ . Si el producto interno de  $\ell_2(\mathbb{N})$  se define como

$$\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

y la norma como

$$\|(a_n)_n\| = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

entonces  $\langle (a_n)_n, (b_n)_n \rangle \leq \|(a_n)_n\| \|(b_n)_n\|$ .

Ahora nos concentramos en encontrar una cota para  $SW_{M,\tau}R_N f(t)$  que pueda asegurar convergencia:

**Teorema 2.3.2.** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $f \in C^k(\mathbb{T}, \mathbb{R})$  entonces para cada  $t \in \mathbb{T}$  se cumple la desigualdad:

$$\|SW_{M,\tau}f(t) - \phi_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^{M+1}} \leq \frac{\sqrt{2(M+1)}}{N^{k-1/2}\sqrt{2k-1}} \left\| R_N f^{(k)} \right\|_2$$

**Demostración 2.3.2.** Fije  $k \in \mathbb{N}$  y sea  $f \in C^k(\mathbb{T}, \mathbb{R})$  y usando integración por partes obtenemos la siguiente identidad:

$$|\widehat{f^{(k)}}(n)| = |n|^k |\widehat{f}(n)|$$

Ahora encontremos una cota para el modulo de  $R_N f(t)$ .

$$\begin{aligned}
|R_N f(t)| &= \left| \sum_{|n|>N} \hat{f}(n)e^{int} \right| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{int} \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\hat{f}(n)e^{int} + \hat{f}(-n)e^{int}| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (|\hat{f}(n)| + |\hat{f}(-n)|) \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|\widehat{f^{(k)}}(n)| + |\widehat{f^{(k)}}(-n)|}{n^k}
\end{aligned}$$

Tomando entonces  $a_n = |\widehat{f^{(k)}}(n)| + |\widehat{f^{(k)}}(-n)|$  y  $b_n = \frac{1}{n^k}$  podemos aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwartz para elementos en  $\ell_2(\mathbb{N})$  y obtenemos la siguiente desigualdad:

$$|R_N f(t)| \leq \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} (|\widehat{f^{(k)}}(n)| + |\widehat{f^{(k)}}(-n)|)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^k} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Observe que la desigualdad de Cauchy Schwartz tiene limites diferentes. Sin embargo, el operador que hace un corrimiento de la sucesión a la derecha es lineal, acotado y unitario. En este caso estaríamos aplicando ese operador  $N + 1$  veces y por tanto la desigualdad se preserva. Ahora vamos a encontrar una cota para cada uno de los dos términos que aparecen. Comenzamos por la expresión de la derecha. El criterio de la integral de series nos da una cota para la serie. Note que el valor absoluto no es necesario porque todos los términos son positivos.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^k} \right|^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \\
&\leq \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{2k}} dx \\
&= \frac{1}{(2k-1)N^{2k-1}}
\end{aligned}$$

Ahora vamos a acotar el termino de la izquierda. Observe que para cualquier valor de  $a, b$  se satisface que  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ . Con esto en mente podemos

encontrar una cota sencilla para la expresión de la izquierda:

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{n=N+1}^{\infty} (|\widehat{f^{(k)}}(n)| + |\widehat{f^{(k)}}(-n)|)^2 \right)^{1/2} &\leq \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} 2|\widehat{f^{(k)}}(n)|^2 + 2|\widehat{f^{(k)}}(-n)|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2} \left( \sum_{n=N+1}^{\infty} |\widehat{f^{(k)}}(n)|^2 + |\widehat{f^{(k)}}(-n)|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2} \left( \sum_{n>|N|}^{\infty} |\widehat{f^{(k)}}(n)|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2} \left\| R_N f^{(k)} \right\|_2
\end{aligned}$$

Ahora, observe que los términos por los que acotamos no dependen de  $t$ . Luego, en particular la norma infinita está acotada por la multiplicación de ambas expresiones. Ahora por el teorema 2.3.1 tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|SW_{M,\tau}f(t) - \phi_t(t)\|_{\mathbb{R}^{M+1}} \leq \sqrt{M+1} \|R_N f\|$$

y por tanto se tiene el resultado buscado  $\square$

El teorema anterior nos permite derivar distintas conclusiones sobre la convergencia de la ventana deslizante. En primer lugar, note que la cota no depende de  $t$ , luego la convergencia es uniforme. Por otra parte, la cota nos dice que entre más diferenciable sea la función, más rápida va a ser la convergencia .

## 2.4. Geometría de las ventanas

En esta sección nos concentramos en entender diferentes propiedades geométricas de las ventanas deslizantes. En primer lugar notemos que entre mayor sea la dimensión del encajamiento, es decir entre más grande sea  $M+1$  entonces el análisis será más detallado. No obstante, el costo computacional también será mayor. Recordemos por un momento que a partir de la nube de puntos generada por el encajamiento en  $\mathbb{R}^{M+1}$  queremos construir complejos de Vietoris-Rips y calcular los grupos de homología de los complejos. Entre mayor sea la dimensión, más costosa será la construcción del complejo y más difícil será el análisis de sus grupos de homología. Como ahora vamos a usar la truncación de la serie de Fourier en las ventanas deslizantes entonces solo lidiamos con polinomios trigonométricos. Y en este caso particular hay una forma para saber cual es la dimensión mínima del encajamiento para que no haya pérdida de información. Cuando se trata de polinomios trigonométricos no hay pérdida de información si y solo si la dimensión del encajamiento es 2 veces la frecuencia máxima. Veamos como justificar esta afirmación con la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $M\tau < 2\pi$ . Entonces  $u_0, u_1, v_1, \dots, u_N, v_N$  son linealmente independientes si y solo si  $M \geq 2N$ .*

**Demostación 2.4.1.** Comencemos mostrando la implicación de izquierda a derecha. Suponga que  $u_0, u_1, v_1, \dots, u_N, v_N$  en  $\mathbb{R}^{M+1}$ . Como son  $2N + 1$  vectores linealmente independientes entonces  $2N + 1 \leq M + 1$  es decir que  $2N \leq M$ . Ahora mostremos la otra implicación por contrarreciproco. Supongamos que  $u_0, u_1, v_1, \dots, u_N, v_N$  son linealmente dependientes y mostremos que  $2N > M$ . Como los vectores son linealmente dependientes entonces existen escalares  $\gamma_0, \beta_0, \dots, \gamma_N, \beta_N \in \mathbb{R}$  no todos 0 tal que

$$0 = \gamma_0 u_0 + \beta_0 v_0 + \dots + \gamma_N u_N + \beta_N v_N. \quad (2.1)$$

Note que por definición  $v_0$  es el vector 0 luego  $\beta_0$  puede tomar cualquier valor sin afectar la ecuación. No obstante fijaremos  $\beta_0 = 0$ . La ecuación 2.1 en realidad nos permite plantear  $M + 1$  ecuaciones de la siguiente forma:

$$0 = \sum_{n=0}^N \gamma_n \cos(nm\tau) + \beta_n \sin(nm\tau) = \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^N (\gamma_n - i\beta_n) e^{im\tau} \right)$$

con  $m = 0, 1, \dots, N$  y  $\operatorname{Re}$  denota la parte real de un complejo. Sea  $\xi_m = e^{im\tau}$  y definamos los siguientes polinomios complejos:

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{n=0}^N (\gamma_n + i\beta_n) z^n \\ \bar{p}(z) &= \sum_{n=0}^N (\gamma_n - i\beta_n) z^n \\ q(z) &= z^N \left( \bar{p}(z) + p\left(\frac{1}{z}\right) \right) \end{aligned}$$

Note entonces  $q$  es un polinomio no constante sobre los complejos de grado a lo sum  $2N$ . Adicionalmente,  $\operatorname{Re}(\bar{p}(\xi_m)) = 0$  luego cada  $\xi_m$  es una raíz de  $q$ . Eso implica que el grado de  $q$  es mayor o igual a  $M + 1$  y por tanto:

$$M + 1 \leq \deg(q) \leq 2N$$

que es lo que queríamos demostrar  $\square$

La proposición anterior es importante porque los ángulos entre los  $u_n$ 's y los  $v_n$ 's solo depende de  $M$  y  $\tau$ . Luego si todos los vectores son linealmente independientes podemos recuperar todo  $S_N f$  a partir  $SW_{M,\tau} f$  y en ese sentido no hay pérdida de información sumado al hecho que tenemos convergencia uniforme. Un supuesto importante de ahora en adelante es que dado un  $N \in \mathbb{N}$  vamos a fijar  $M = 2N$ , es decir la mínima cota para que no haya pérdida de información. De igual forma vamos a escoger  $\tau$  de tal forma que  $M\tau < 2\pi$ .

Hasta el momento tenemos una descomposición lineal para la truncación de la serie de Fourier de la ventana deslizante. Sin embargo una propiedad deseada

sería poder escribirla en términos de vectores ortogonales. La siguiente proposición nos da una condición para poder escribir la truncación como la combinación de vectores mutuamente ortogonales:

**Proposición 2.4.2.** *Para todo  $n \geq 1$ ,  $\langle u_n, v_n \rangle = \|u_n\|^2 - \|v_n\|^2 = 0$  si y solo si*

$$n(M+1)\tau \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

**Demostración 2.4.2.** Primero vamos a calcular una expresión para el producto interno entre  $u_n$  y  $v_n$  para un  $n$  fijo.

$$\begin{aligned} \langle u_n, v_n \rangle &= \sum_{m=1}^M \cos(nm\tau) \sin(nm\tau) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sin(2nm\tau) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{m=1}^M (e^{2in\tau})^m \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{2in(M+1)\tau}}{1 - e^{2in\tau}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{2in(M+1)\tau}}{1 - e^{2in\tau}} \right) \end{aligned}$$

La primera línea está justificada usando una identidad de ángulos dobles y la tercera es convergencia de una serie geométrica truncada. Ahora encontremos una expresión para la resta de las normas al cuadrado.

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 - \|v_n\|^2 &= \sum_{m=0}^M \cos^2(nm\tau) - \sin^2(nm\tau) = \sum_{m=0}^M \cos(2nm\tau) \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^M (e^{2in\tau})^m \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{2in(M+1)\tau}}{1 - e^{2in\tau}} \right) \end{aligned}$$

Note que el complejo que resulta dentro es igual en ambos casos. Luego podemos concluir que:

$$4\langle u_n, v_n \rangle^2 + (\|u_n\|^2 - \|v_n\|^2)^2 = \left\| \frac{1 - e^{2in(M+1)\tau}}{1 - e^{2in\tau}} \right\|^2$$

y como ambos son términos positivos la única posibilidad para que sea cero es que ambos términos sean cero. Y por la igualdad anterior esto solo se tiene si y solo si  $e^{2in(M+1)\tau} = 1$  es decir si  $n(M+1)\tau \equiv 0 \pmod{\pi}$   $\square$

Es fácil verificar que si  $nM\tau \equiv 0 \pmod{\pi}$  también se obtiene que  $\langle u_n, v_n \rangle$  es 0. No obstante, lo que acabamos de probar es más fuerte pues también hace que  $a_n u_n + b_n v_n$  sea perpendicular a  $b_n u_n - a_n v_n$  para cualquier  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ .

Quisiéramos extender este resultado y hacer que todos los  $u_n$ 's y  $v_n$ 's sean ortogonales entre ellos. Para eso necesitamos introducir una noción adicional sobre las funciones que estamos considerando.

**Definición 2.4.1.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$  y  $L \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $f$  es  $L$ -periódica en  $[0, 2\pi]$  si

$$f\left(t + \frac{2\pi}{L}\right) = f(t)$$

para todo  $t$ .

**Observación 2.4.1.** Si  $f$  es una función  $L$ -periódica y  $a_n, b_n$  con los  $n$ -ésimos coeficientes reales de Fourier y dejamos que  $a_n + ib_n = r_n e^{i\alpha_n}$  con  $\alpha_n = 0$  siempre que  $r_n = 0$  implica que  $n \neq 0$  entonces  $n \equiv 0 \pmod{L}$ .

Con esta observación ya podemos dar una condición para que los términos de la descomposición de Fourier de  $SW_{M,\tau}S_N f$  diferentes de 0 sean todos ortogonales.

**Proposición 2.4.3.** Sea  $f$  una función  $L$ -periódica y suponga que  $L(M+1)\tau = 2\pi$ . Entonces el conjunto de vectores

$$\{u_n, v_n | 0 \leq n \leq N, n \equiv 0 \pmod{L}\}$$

es ortogonal y tienen norma  $\|u_n\| = \|v_n\| = \sqrt{\frac{M+1}{2}}$  para  $n \equiv 0 \pmod{L}$ .

**Demostración 2.4.3.** Sea  $k = pL$  y  $n = qL$ . Si  $q = p$  entonces  $n = k$  y por la proposición 2.4.2  $\langle u_n, v_n \rangle = 0$ . Adicionalmente, la resta de las normas es igual a 0, luego ambas son iguales. Esto lo podemos reformular como:

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 = \|v_n\|^2 &= \frac{\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \cos^2(nm\tau) + \sin^2(nm\tau) \\ &= \frac{M+1}{2} \end{aligned}$$

de donde obtenemos el resultado buscado sobre las normas. Note que esto es independiente del  $n$  entonces se satisface para todos. Ahora supongamos que  $p \neq q$ . Note que solo consideramos múltiplos de  $L$  pues por la observación 2.4.1 el resto de términos van a ser 0. Primero mostramos que bajo la hipótesis los  $u_n$ 's son ortogonales entre ellos. Calculemos entonces el producto interno entre  $u_n$  y  $u_k$ . Los otros casos van a ser similares entonces hacemos este primero en

mucho detalle y el resto de demostraciones son análogas.

$$\begin{aligned}
\langle u_n, u_k \rangle &= \sum_{m=0}^M \cos(nm\tau) \cos(km\tau) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \cos((n-k)m\tau) + \cos((n+k)m\tau) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^M (e^{i(n-k)\tau})^m + (e^{i(n+k)\tau})^m \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{i(n-k)(M+1)\tau}}{1 - e^{i(n-k)\tau}} + \frac{1 - e^{i(n+k)(M+1)\tau}}{1 - e^{i(n+k)\tau}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1 - e^{(q-p)2\pi i}}{1 - e^{i(n-k)\tau}} + \frac{1 - e^{2\pi i(q+p)}}{1 - e^{i(n+k)\tau}} \right) = 0
\end{aligned}$$

El caso de  $v_n$  con  $v_k$  es idéntico al anterior y por tanto seguimos adelante. Ahora calculemos el producto interno entre  $u_n$  y  $v_k$ :

$$\begin{aligned}
\langle u_n, v_k \rangle &= \sum_{m=1}^M \cos(nm\tau) \sin(km\tau) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sin((n+k)m\tau) - \sin((n-k)m\tau) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{(q+p)2\pi i}}{1 - e^{(n+k)\tau i}} - \frac{1 - e^{(q-p)2\pi i}}{1 - e^{(n-k)\tau i}} \right) = 0
\end{aligned}$$

El caso de  $v_n$  con  $u_k$  es análogo al anterior con lo que concluimos la demostración  $\square$

Cuando se hace el computo de la persistencia homológica a veces es conveniente centralizar y normalizar el conjunto de interés. El siguiente teorema muestra el resultado de hacer tal operación a la nube de puntos generada por  $SW_{M,\tau} S_N f$  cuando  $f$  es  $L$ -periódica y  $L(M+1)\tau = 2\pi$ .

**Teorema 2.4.1.** *Sea  $C : \mathbb{R}^{M+1} \rightarrow \mathbb{R}^{M+1}$  la función que centra:*

$$C(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \mathbf{1} \rangle}{\|\mathbf{1}\|^2} \mathbf{1} \quad \text{donde} \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M+1}.$$

Si  $f$  es una función  $L$ -periódica,  $L(M+1)\tau = 2\pi$  entonces:

1.

$$\phi_\tau = \hat{f}(0)\mathbf{1} + C(\phi_\tau(t))$$

2.

$$\|C(\phi_\tau(t))\| = \sqrt{(M+1)} \left( \|S_N f\|_2^2 - \hat{f}(0)^2 \right)^{1/2}$$

3. Existe un conjunto ortonormal de vectores

$$\{\tilde{x}_n, \tilde{y}_n \in \mathbb{R}^{M+1} \mid 1 \leq n \leq N \quad n \equiv 0(\text{mod } L)\}$$

tal que

$$\varphi_\tau(t) = \frac{C(\phi_\tau(t))}{\|C(\phi_\tau(t))\|} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N \tilde{r}_n (\cos(nt)\tilde{x}_n + \sin(nt)\tilde{y}_n)$$

donde

$$\tilde{r}_n = \frac{2|\hat{f}(n)|}{\sqrt{\|S_N f\|_2^2 - \hat{f}(0)^2}}.$$

**Demstración 2.4.4.** Gracias a la observación 2.4.1, si  $f$  es una función  $L$ -periódica en  $[0, 2\pi]$  y  $L(M+1)\tau = 2\pi$  entonces los coeficientes de Fourier podemos reescribirlos como  $a_n = r_n \cos(\alpha_n)$  y  $b_n = r_n \sin(\alpha_n)$ . Si definimos  $x_n = \cos(\alpha_n)u_n + \sin(\alpha_n)v_n$  y  $y_n = \sin(\alpha_n)u_n - \cos(\alpha_n)v_n$  entonces por la observación 2.4.1 podemos reescribir todo como:

$$\phi_\tau(t) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N r_n (\cos(nt)x_n + \sin(nt)y_n)$$

. Ahora calculemos la norma de  $x_n$  y  $y_n$ .

$$\begin{aligned} \|x_n\|^2 &= \langle x_n, x_n \rangle = \langle \cos(\alpha_n)u_n + \sin(\alpha_n)v_n, \cos(\alpha_n)u_n + \sin(\alpha_n)v_n \rangle \\ &= \cos^2(\alpha_n)\|u_n\|^2 + 2\sin(\alpha_n)\cos(\alpha_n)\langle u_n, v_n \rangle + \sin^2(\alpha_n)\|v_n\|^2 \end{aligned}$$

Por la proposición 2.4.3 los vectores  $u_n$  y  $v_n$  son ortogonales. Adicionalmente por la misma proposición la norma de  $u_n$  y  $v_n$  son conocidas e idénticas entonces concluimos que  $\|x_n\| = \|y_n\| = \sqrt{\frac{M+1}{2}}$ . Ahora definamos

$$\tilde{x}_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad \tilde{y}_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

No es un difícil demostrar que los  $x_n$  son ortogonales a los  $y_n$  usando nuevamente la proposición 2.4.3. Adicionalmente por definición  $u_0 = \mathbf{1}$ , luego el conjunto

$$\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{1}\|}, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n \mid 1 \leq n \leq N, \quad n \equiv 0 \pmod{L} \right\}$$

es un conjunto de vectores ortonormal. Antes de continuar, observe también que  $v_0 = \vec{0}$ ,  $a_0 = \hat{f}(0)$  y por último  $\|\mathbf{1}\| = \sqrt{M+1}$ . Escribamos entonces  $\phi_\tau(t)$

como la descomposición lineal de vectores ortonormales.

$$\begin{aligned}
\phi_\tau(t) &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N r_n(\cos(nt)x_n + \sin(nt)y_n) \\
&= (a_0u_0 + b_0v_0) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N r_n(\cos(nt)x_n + \sin(nt)y_n) \\
&= a_0\mathbf{1} + \sqrt{\frac{M+1}{2}} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N r_n(\cos(nt)\tilde{x}_n + \sin(nt)\tilde{y}_n) \\
&= \frac{\hat{f}(0)\sqrt{M+1}}{\|\mathbf{1}\|} \mathbf{1} + \sqrt{\frac{M+1}{2}} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N r_n(\cos(nt)\tilde{x}_n + \sin(nt)\tilde{y}_n)
\end{aligned}$$

Note que si al centralizar obtenemos el segundo sumando habremos demostrado (1). Calculemos entonces  $C(\phi_\tau(t))$ . Como la operación de centralizar es lineal vamos a hacer los cálculos por separado. Note que el sumando de la izquierda lo podemos reescribir como  $\hat{f}(0)\mathbf{1}$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
C(\hat{f}(0)\mathbf{1}) &= \hat{f}(0)\mathbf{1} - \frac{\langle \hat{f}(0)\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle}{\|\mathbf{1}\|^2} \mathbf{1} \\
&= \hat{f}(0)\mathbf{1} - \frac{\hat{f}(0)\|\mathbf{1}\|^2}{\|\mathbf{1}\|^2} \mathbf{1} = 0
\end{aligned}$$

Con esto en mente podemos calcular como opera centralizar y normalizar sobre  $\phi_\tau(t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\langle C(\phi_\tau(t)), \mathbf{1} \rangle}{\|\mathbf{1}\|^2} \mathbf{1} &= \frac{\langle \sum_{n=1}^N r_n(\cos(nt)\tilde{x}_n + \sin(nt)\tilde{y}_n), \mathbf{1} \rangle}{\|\mathbf{1}\|^2} \mathbf{1} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^N r_n(\cos(nt)\langle \tilde{x}_n, \mathbf{1} \rangle + \sin(nt)\langle \tilde{y}_n, \mathbf{1} \rangle)}{\|\mathbf{1}\|^2} \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Como  $u_0 = \mathbf{1}$  entonces por la proposición 2.4.3 todos los  $\tilde{x}_n$  y los  $\tilde{y}_n$  son ortogonales a  $\mathbf{1}$ . Eso hace que la expresión entera igual a 0 con lo que llegamos a la siguiente ecuación:

$$C(\phi_\tau(t)) = \sqrt{\frac{M+1}{2}} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N r_n(\cos(nt)\tilde{x}_n + \sin(nt)\tilde{y}_n) \quad (2.2)$$

con lo cual queda demostrado (1). Ahora para demostrar (2) hay que calcular la normal de la ecuación 2.2. Como siempre, es más sencillo calcular la normal

al cuadrado:

$$\begin{aligned}
\|C(\phi_\tau(t))\|^2 &= \frac{M+1}{2} \left\langle \sum_{n=1}^N r_n (\cos(nt)\tilde{x}_n + \sin(nt)\tilde{y}_n), \sum_{m=1}^N r_m (\cos(mt)\tilde{x}_m + \sin(mt)\tilde{y}_m) \right\rangle \\
&= \frac{M+1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N r_n r_m (\cos(nt)\cos(mt)\langle \tilde{x}_n, \tilde{x}_m \rangle + \sin(nt)\sin(mt)\langle \tilde{y}_n, \tilde{y}_m \rangle) \\
&= \frac{M+1}{2} \sum_{n=1}^N r_n^2
\end{aligned}$$

Observe que estamos usando constantemente la ortogonormalidad entre los  $\tilde{x}_n$  y los  $\tilde{y}_n$ . Por definición,  $r_n = 2|\hat{f}(n)|$ , luego al remplazar en la ecuación anterior llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
\|C(\phi_\tau(t))\|^2 &= \frac{M+1}{2} \sum_{n=1}^N 4|\hat{f}(n)|^2 \\
&= (M+1) \left( 2 \sum_{n=1}^N |\hat{f}(n)|^2 \right) \\
&= (M+1) \left( \|S_N f\|_2^2 - \hat{f}(0)^2 \right)
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado (2). Por último, para demostrar (3) solo hay que demostrar que

$$\frac{r_n}{\sqrt{r_1^2 + \dots + r_N^2}} = \frac{2|\hat{f}(n)|}{\sqrt{\|S_N f\|_2^2 - \hat{f}(0)^2}}$$

lo cual es trivial porque ya habíamos demostrado que

$$\left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N r_n^2 \right)^{1/2} = \left( \|S_N f\|_2^2 - \hat{f}(0)^2 \right)^{1/2}$$

y sustituir  $r_n$  por  $2|\hat{f}(n)|$  se obtiene el resultado buscado con lo cual concluimos la demostración  $\square$

Observe que el teorema anterior da una noción geométrica de lo que es la ventana deslizante de  $S_N f$  luego de ser centralizada. Si denotamos  $S^1(r)$  como el círculo de radio  $r$  centrado en 0 en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $\varphi(t)$  es una curva sobre el toro de dimensión  $N$

$$\mathcal{T} = S^1(\tilde{r}_1) \times \dots \times S^1(\tilde{r}_N)$$

que cuando se proyecta a  $S^1(\tilde{r}_n)$ , da  $n$  vueltas alrededor del círculo a velocidad constante.

## Capítulo 3

# Teoremas de convergencia

En esta sección vamos a presentar varios resultados de convergencia que al final nos van a permitir determinar la periodicidad de una función. Recordemos que la estrategia es generar la nube de puntos a través de la ventana deslizante de  $f$  y construir una filtración de complejos simpliciales usando los complejos de Rips. Por último estudiamos el diagrama de la filtración y eso nos da un criterio sobre la periodicidad.

### 3.1. Teorema de aproximación

Una de las nociones fundamentales para poder hablar de convergencia es la de distancia. Hasta ahora tenemos solo forma de medir la distancia entre vectores y funciones, sin embargo, no hay forma de medir la distancia entre conjuntos o diagramas. En esta sección introducimos diferentes distancias para comparar conjuntos y diagramas:

**Definición 3.1.1.** Sean  $X$  y  $Y$  dos conjuntos en un espacio métrico. La distancia de Hausdorff entre  $X$  y  $Y$  se define como

$$d_H(X, Y) = \max\left\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\right\}$$

Una definición alterna de la distancia de Hausdorff es

$$d_H(X, Y) = \inf_{\varepsilon \geq 0} \{X \subseteq Y_\varepsilon \ \& \ Y \subseteq X_\varepsilon\}$$

en donde  $Y_\varepsilon$  es la unión de todos los elementos del  $\mathcal{B}(Y, \varepsilon)$  de la definición 1.4.2.

**Definición 3.1.2.** Sean  $\text{dgm}_1$  y  $\text{dgm}_2$  dos diagramas y denote por  $\Phi$  el conjunto de biyecciones entre  $\text{dgm}_1$  y  $\text{dgm}_2$ . Entonces la distancia de cuello de botella entre  $\text{dgm}_1$  y  $\text{dgm}_2$  se define como

$$d_B(\text{dgm}_1, \text{dgm}_2) = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{x \in \text{dgm}_1} \|x - \phi(x)\|_\infty$$

Ahora presentamos la propiedad más importante entre las dos distancias que acabamos de introducir. Debido a que la demostración es demasiado técnica y requiere de introducir muchas nociones nuevas al documento la vamos a omitir. Antes de es necesario introducir algo de notación: sea  $X$  un conjunto de algún  $\mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $\text{dgm}(X)$  el diagrama de persistencia asociada a la filtración inducida por los complejos de Rips de  $X$ . Con esto podemos presentar la propiedad de estabilidad de la distancia de cuello de botella:

**Teorema 3.1.1.** *Sean  $X$  y  $Y$  dos nubes de puntos en algún  $\mathbb{R}^n$ . Entonces la distancia de cuello de botella es estable con respecto a la distancia de Hausdorff. Esto es:*

$$d_B(\text{dgm}(X), \text{dgm}(Y)) \leq 2d_H(X, Y).$$

Un corolario inmediato de la estabilidad de la distancia del cuello de botella es la siguiente:

**Proposición 3.1.1.** *Sea  $f$  una función y sea  $T \subseteq \mathbb{T}$ . Sean  $X$  y  $Y$  las imágenes de  $T$  a través de  $SW_{M,\tau}f$  y  $SW_{M,\tau}S_Nf$  respectivamente. Entonces*

$$d_B(\text{dgm}(X), \text{dgm}(Y)) \leq \frac{2\sqrt{2(M+1)}}{N^{k-1/2}\sqrt{2k-1}} \left\| R_N f^{(k)} \right\|_2$$

La demostración de esta proposición es trivial usando la definición alterna de la distancia de Hausdorff, el teorema 2.3.2 y por supuesto la estabilidad de la distancia de cuello de botella. Ahora introducimos una noción muy intuitiva y útil para lo que queda del capítulo:

**Definición 3.1.3.** Sea  $(x, y) \in \text{dgm}$  y defina  $\text{pers}(x, y) = y - x$  la persistencia de la pareja. Sea

$$mp(\text{dgm}) = \max_{x \in \text{dgm}} \text{pers}(x)$$

la máxima persistencia del diagrama  $\text{dgm}$ .

**Proposición 3.1.2.** *Sea  $\text{dgm}_\Delta$  el diagrama que solo contiene a la diagonal con multiplicidad contable. Entonces*

$$mp(\text{dgm}) = 2d_B(\text{dgm}, \text{dgm}_\Delta)$$

**Demostración 3.1.1.** Sea  $\phi : \text{dgm} \rightarrow \text{dgm}_\Delta$  una biyección. Note que al solucionar el problema de optimización:

$$\min_{x \in \text{dgm}} \|x - \phi(x)\|_\infty$$

obtenemos que el resultado es mayor o igual

$$\max \left\{ \frac{|x-y|}{2}, \frac{|y-x|}{2} \right\}$$

que surge de minimizar la distancia de la pareja a  $\Delta$ . Esto implica que

$$\|x - \phi(x)\|_\infty \geq \frac{1}{2} \text{pers}(x).$$

A su vez, esto también está relacionado con que las normas son equivalentes en  $\mathbb{R}^2$  y por tanto la distancia se minimiza cuando se calcula la proyección del punto sobre  $\Delta$ . Ahora al maximizar a ambos lados sobre  $x$  concluimos que

$$\max_{x \in \text{dgm}} \geq \frac{1}{2} mp(\text{dgm})$$

y note que como esto no depende de la biyección que se escoja concluimos que  $2d_B(\text{dgm}, \text{dgm}_\Delta) \geq mp(\text{dgm})$ . Para mostrar la otra desigualdad consideramos la función

$$\phi_0(x, y) = \left( \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$$

y observe primero que  $\phi_0(\Delta) = \Delta$ . En general esta función no es inyectiva, sin embargo, si consideramos  $\phi_0 : \text{dgm} \rightarrow \text{dgm}_\Delta$  entonces se convierte en una biyección de multiconjuntos. Eso nos permite concluir que para todo  $x$  en  $\text{dgm}$  se cumple la igualdad

$$\|x - \phi_0(x)\|_\infty = \frac{1}{2} \text{pers}(x)$$

y por tanto al maximizar sobre  $x$  obtenemos la desigualdad buscada  $\square$

Con esto podemos resumir los resultados de esta sección en el teorema de aproximación:

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $T \subseteq \mathbb{T}$ ,  $f \in C^k(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ,  $X = SW_{M,\tau} f(T)$  y  $Y = SW_{M,\tau} S_N f(T)$ . Entonces*

1.  $d_H(X, Y) \leq \frac{\sqrt{2(M+1)}}{N^{k-1/2} \sqrt{2k-1}} \|R_N f^{(k)}\|_2$
2.  $|mp(\text{dgm}(X)) - mp(\text{dgm}(Y))| \leq 2d_B(\text{dgm}(X), \text{dgm}(Y))$
3.  $d_B(\text{dgm}(X), \text{dgm}(Y)) \leq \frac{2\sqrt{2(M+1)}}{N^{k-1/2} \sqrt{2k-1}} \|R_N f^{(k)}\|_2$

El teorema anterior es muy conveniente porque dice que basta con estudiar la truncación de la serie de Fourier de una función  $f$  para entender la homología persistente de la nube de puntos de la ventana deslizante de  $f$ .

## 3.2. Resultados de convergencia

Recordemos por un momento que el espacio  $\ell_0(\mathbb{N})$  es el espacio de sucesiones que a partir de algún punto son siempre 0. En ese sentido dada una función  $f$ , podemos entender a su ventana deslizante como un elemento de  $\ell_0(\mathbb{N})$  de la siguiente forma:

$$(f(t), f(t+\tau), \dots, f(t+M\tau), 0, 0, \dots) \in \ell_0(\mathbb{N}).$$

Con la norma del máximo,  $\ell_0$  es un espacio completo, sin embargo, cuando lo dotamos por ejemplo con la norma de  $\ell_2$  deja de ser completo. Lo mismo sucede

en el espacio de diagramas con la distancia de cuello de botella. El espacio no es completo y nada asegura la convergencia de una sucesión. Sin embargo, el espacio se puede completar agregando ciertos diagramas con multiplicidad a lo sumo contable y condiciones básicas de fitness. Esto entonces nos permite comparar distintos diagramas y presentar el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.1.** *Sea  $f$  una función  $L$  periódica,  $N < N'$ ,  $M = 2N$ ,  $M' = 2N'$  y*

$$\tau = \frac{2\pi}{L(M+1)} \quad \tau' = \frac{2\pi}{L(M'+1)}.$$

*Si  $T \subseteq \mathbb{T}$  es finito y  $Y = SW_{M,\tau} S_N f(T)$  y  $Y' = SW_{M',\tau'} S_{N'} f(T)$  entonces*

$$d_B \left( \frac{\text{dgm}(Y)}{\sqrt{M+1}}, \frac{\text{dgm}(Y')}{\sqrt{M'+1}} \right) \leq 2 \|S_{N'} f - S_N f\|_2.$$

**Demostración 3.2.1.** Denotemos  $u_n$  y  $v_n$  los vectores asociados a la ventana  $SW_{M,\tau}$  y  $u'_n$  y  $v'_n$  los vectores asociados a  $SW_{M',\tau'}$ . Ahora en la sección 2.4 demostramos que los  $u'_n$  y los  $v'_n$  forman una base para  $\mathbb{R}^{M'+1}$  por ser linealmente independientes. Luego podemos definir el siguiente operador lineal  $P : \mathbb{R}^{M'+1} \rightarrow \mathbb{R}^{M'+1}$  en términos de esa base de la siguiente forma:

$$P \left( \sum_{n=0}^{N'} \alpha_n u'_n + \beta_n v'_n \right) = \sum_{n=0}^N \alpha_n u'_n + \beta_n v'_n.$$

Varias observaciones sobre el operador  $P$ : en primer lugar, como mostramos en la proposición 2.4.3  $P$  es una proyección ortogonal cuando se restringe a  $Y'$ . Adicionalmente, podemos calcular la norma entre  $y \in Y'$  y su imagen y mostrar que es constante:

$$\begin{aligned} \langle y' - P(y'), y' - P(y') \rangle &= \sum_{n=N+1}^{N'} \langle r_n(\cos(nt)x'_n + \sin(nt)y'_n), r_n(\cos(nt)x'_n + \sin(nt)y'_n) \rangle \\ &= \sum_{n=N+1}^{N'} r_n^2 (\cos^2(nt) \|x'_n\|^2 + \sin^2(nt) \|y'_n\|^2) \\ &= \frac{M'+1}{2} \sum_{n=N+1}^{N'} r_n^2 \end{aligned}$$

donde  $r_n$ ,  $x'_n$  y  $y'_n$  se definen igual que en el teorema 2.4.1. Esto tiene una implicación sobre la distancia entre  $Y'$  y  $P(Y')$  bajo la distancia Hausdorff:

$$d_H(Y', P(Y')) \leq \sqrt{\frac{M'+1}{2} \sum_{n=N+1}^{N'} r_n^2}$$

Ahora definamos el operador  $Q : \text{Img}(P) \rightarrow \mathbb{R}^{M+1}$  en termino de bases ortogonales:

$$Q(u'_n) = \sqrt{\frac{M'+1}{M+1}} u_n \quad Q(v'_n) = \sqrt{\frac{M'+1}{M+1}} v_n.$$

No es difícil notar que por como está definido el operador,  $Q$  es una isometría en  $P(Y')$ . Un último comentario antes de calcular el resultado: note que  $Q(P(Y')) = \sqrt{\frac{M'+1}{M+1}} Y$  y que  $\text{dgm}(\cdot)$  es invariante bajo isometrías. Con esto tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sqrt{M'+1} d_B \left( \frac{\text{dgm}(Y')}{\sqrt{M'+1}}, \frac{\text{dgm}(Y)}{\sqrt{M+1}} \right) &= d_B \left( \text{dgm}(Y'), \sqrt{\frac{M'+1}{M+1}} \text{dgm}(Y) \right) \\ &= d_B (\text{dgm}(Y'), \text{dgm}(Q(P(Y')))) \\ &= d_B (\text{dgm}(Y'), \text{dgm}(P(Y'))) \\ &\leq 2d_H(Y', P(Y')) \\ &\leq \sqrt{2(M'+1) \sum_{n=N+1}^{N'} r_n^2} \\ &= 2 \|S_{N'} f - S_N f\|_2 \sqrt{M+1} \end{aligned}$$

Luego concluimos que

$$d_B \left( \frac{\text{dgm}(Y)}{\sqrt{M+1}}, \frac{\text{dgm}(Y')}{\sqrt{M'+1}} \right) \leq 2 \|S_{N'} f - S_N f\|_2.$$

El resultado anterior combinado con el teorema 3.1.2 (El teorema de aproximación) y el hecho que la serie de fourier converge a  $f$  en la norma de  $\ell_2$ .

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$  una función  $L$ -periódica. Para cada  $N \in \mathbb{N}$  definimos*

$$\tau_N = \frac{2\pi}{L(2N+1)}$$

*y sea  $T \subseteq \mathbb{T}$ . Si  $\bar{Y}_n$  es la nube de puntos que resulta después de centrar y normalizar el conjunto*

$$SW_{2N, \tau_N} S_N f(T) \subseteq \mathbb{R}^{2N+1}$$

*, entonces para cualquier  $\mathbb{F}$  campo de coeficientes la sucesión  $(\text{dgm}(\bar{Y}))_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy con respecto a  $d_B$ .*

Una vez el espacio de diagramas se ha completado podemos introducir la siguiente notación para facilitar el trabajo:

**Definición 3.2.1.** Sea  $w = \frac{2\pi}{L}$  y denotemos  $\text{dgm}_\infty(f, T, w)$  el limite en la distancia de cuello de botella de la sucesión  $(\text{dgm}(\bar{Y}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ .

Antes de proceder a los resultados de convergencia importantes necesitamos de un resultado técnico que facilite la demostración:

**Proposición 3.2.3.** *Sea  $f \in C(\mathbb{T})$  una función  $L$  periódica y para cada  $N \in \mathbb{N}$  defina  $\tau_N$  como antes. Entonces*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\|C(SW_{2N, \tau_N} f(t))\|}{\sqrt{2N+1}} = \|f - \hat{f}(0)\|_2$$

y la convergencia es uniforme para  $t \in \mathbb{T}$ .

**Demostración 3.2.2.** Si  $f$  es constante entonces el resultado es trivial. Supongamos entonces que  $f \neq \hat{f}(0)$  y defina

$$g(t) = \frac{f(t) - \hat{f}(0)}{\|f - \hat{f}(0)\|_2}.$$

Observe que  $g$  es la composición de  $f$  con un movimiento rígido y por tanto  $g$  hereda el periodo de  $f$ . Ahora calculemos algunas propiedades de  $g$ :

$$\begin{aligned} \hat{g}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{f(t) - \hat{f}(0)}{\|f - \hat{f}(0)\|_2} dt \\ &= \frac{1}{\|f - \hat{f}(0)\|_2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt - \hat{f}(0) \right) \\ &= \frac{\hat{f}(0) - \hat{f}(0)}{\|f - \hat{f}(0)\|_2} = 0 \end{aligned}$$

Adicionalmente calculemos la norma de  $g$  en  $L^2(\mathbb{T})$ :

$$\begin{aligned} \|g\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(t) - \hat{f}(0)}{\|f - \hat{f}(0)\|_2} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\|f - \hat{f}(0)\|_2} \|f - \hat{f}(0)\|_2 = 1 \end{aligned}$$

Si la función  $c_N(t)$  se define de la siguiente forma:

$$c_N(t) = \frac{g(t) + g(t + \tau_N) + \cdots + g(t + 2N\tau_N)}{2N+1}$$

y usamos la identidad  $L(2N+1)\tau_N = 2\pi$ , el hecho que  $g$  es  $L$  periódica y las propiedades de las sumas de Riemman podemos calcular el limite de  $c_N(t)$  para

cada  $t \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} c_N(t) &= \lim_{\tau_N \rightarrow 0} \frac{L}{2\pi} (\tau_N g(t) + \tau_N g(t + \tau_N) + \cdots + \tau_N g(t + 2N\tau_N)) \\
&= \frac{L}{2\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{L}} g(s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s) ds \\
&= \hat{g}(0) = 0
\end{aligned}$$

La tercera línea usa dos substituciones y el hecho que  $g$  es  $L$ -periódica. Eso muestra que  $\forall t \in \mathbb{T}$  hay convergencia puntual a 0. Sin embargo, quisiéramos afirmar que la convergencia es uniforme. Por hipótesis,  $g$  es continua en un compacto, luego es uniformemente continua. Esto implica que  $c_N(t)$  es una sucesión uniformemente equicontinua; es decir  $\forall \varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $\forall N \in \mathbb{N}$  y para cada  $t, t' \in \mathbb{T}$

$$\text{si } |t - t'| < \delta \text{ implica que } |c_N(t) - c_N(t')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora sea  $N_t \in \mathbb{N}$  de forma que si  $N \geq N_t$  entonces  $|c_N(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Eso implica que si  $N \geq N_t$  y  $|t - t'| < \delta$  entonces:

$$\begin{aligned}
|c_N(t')| &= |c_N(t') - c_N(t) + c_N(t)| \\
&\leq |c_N(t') - c_N(t)| + |c_N(t)| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Ahora escojamos un cubrimiento abierto finito de  $[0, 2\pi]$  con intervalos de radio  $\delta$  y sea  $N_0$  el máximo de los  $N_t$ 's asociados a los centros de los intervalos. Eso implica que si  $N \geq N_0$  entonces para todo  $t \in \mathbb{T}$  mostramos que  $c_N(t) < \varepsilon$  y por tanto la convergencia es uniforme. Ahora note que si  $C(\cdot)$  es la función que centra entonces no es difícil mostrar que

$$C(SW_{2N, \tau_N} g(t)) = SW_{2N, \tau_N} g(t) - c_N(t) 1$$

y con un argumento similar podemos mostrar la siguiente convergencia uniforme en  $\mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\|C(SW_{2N, \tau_N} g(t))\|^2}{2N + 1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=0}^{2N} (g(t + n\tau_N) - c_N(t))^2 \\
&= \lim_{\tau_N \rightarrow 0} \frac{L}{2\pi} \sum_{n=0}^{2N} \tau_N (g(t + n\tau_N) - c_N(t))^2 \\
&= \frac{L}{2\pi} \int_t^{t + \frac{2\pi}{L}} g(s)^2 ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(s)|^2 ds = \|g\|_2 = 1
\end{aligned}$$

Por último al volver a la definición de  $g$  y usar que  $C(\cdot)$  es lineal y su kernel son vectores con todas las componentes iguales combinado con el teorema 2.3.1 llegamos al resultado buscado  $\square$

Con este resultado llegamos a uno de los teoremas claves del documento.

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $f \in C^1(\mathbb{T})$  una función  $L$ -periódica,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\tau_N$  definido como antes y  $T \subseteq \mathbb{T}$  finito. Sea  $(\bar{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida como en la proposición 3.2.2 y  $\bar{X}_n$  la nube de puntos que resulta de centralizar y normalizar*

$$SW_{2N, \tau_N} f(T) \subseteq \mathbb{R}^{2N+1}.$$

*Entonces para cualquier campo de coeficientes la sucesión  $(\text{dgm}(\bar{X}_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de diagramas persistentes es de Cauchy con respecto a  $d_B$  y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dgm}(\bar{X}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dgm}(\bar{Y}_n) = \text{dgm}_\infty(f, T, w).$$

**Demostración 3.2.3.** Sin pérdida de generalidad asumamos que  $\hat{f}(0) = 0$  y  $\|f\|_2 = 1$  y sean  $X_N$  y  $Y_N$  los conjuntos que resultan de centralizar puntualmente las nubes de puntos  $SW_{2N, \tau_N} f(T)$  y  $SW_{2N, \tau_N} S_N f(T)$  respectivamente. Ahora usando la convergencia uniforme de la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} d_H \left( \bar{X}_N, \frac{X_N}{\sqrt{2N+1}} \right) &= d_H \left( \frac{X_N}{\|X_N\|}, \frac{X_N}{\sqrt{2N+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2N+1}} d_H \left( \frac{X_N \sqrt{2N+1}}{\|X_N\|}, X_N \right) \end{aligned}$$

tiende a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$ . Más aún como  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f\|_2 = \|f\|_2 = 1$  y por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_H \left( \frac{X_N}{\sqrt{2N+1}}, \frac{X_N}{\sqrt{2N+1} \|S_N f\|_2} \right) = 0.$$

Adicionalmente, el teorema 2.4.1 nos da una forma alterna de escribir  $\bar{Y}_N$ :

$$\bar{Y}_N = \frac{Y_N}{\sqrt{2N+1} \|S_N f\|_2}.$$

Esta forma alterna de escribir  $\bar{Y}_N$  en combinación con la primera parte del teorema 3.1.2 nos da el siguiente resultado

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_H \left( \frac{X_N}{\sqrt{2N+1} \|S_N f\|_2}, \bar{Y}_N \right) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\|R_N f'\|_2}{\sqrt{N} \|S_N f\|_2} = 0.$$

Usando la desigualdad triangular concluimos que  $\lim_{N \rightarrow \infty} d_H(\bar{X}_N, \bar{Y}_N) = 0$  y por la estabilidad de la distancia de cuello de botella

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_B(\text{dgm}(\bar{X}_N), \text{dgm}(\bar{Y}_N)) = 0$$

con lo que llegamos al resultado buscado  $\square$

En los últimos teorema vemos que la continuidad uniforme ha sido un factor clave para demostrar convergencia uniforme. Por tanto introducimos una noción muy relacionada con la continuidad uniforme para el siguiente teorema:

**Definición 3.2.2.** Sea  $f$  una función real. Definimos el modulo de continuidad de  $f$  como  $\omega : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  que satisface la siguiente condición:

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega|x - y|$$

y es minimal.

El modulo de continuidad es una forma de medir que tan uniformemente continua es una función. Con esta definición ya estamos listos para presentar el segundo teorema de convergencia.

**Teorema 3.2.2.** Sean  $T, T' \subseteq \mathbb{T}$  finitos y sea  $f \in C^1(\mathbb{T})$  una función  $L$ -periódica con módulo de convergencia  $\omega$ . Si  $w = \frac{2\pi}{L}$  y  $\lambda = \|f - \hat{f}(0)\|_2$  entonces

$$d_B(\mathbf{dgm}_\infty(f, T, w), \mathbf{dgm}_\infty(f, T', w)) \leq 2\lambda\omega(d_H(T, T')) + 4|1 - \lambda^2|$$

y por tanto existe un diagrama de persistencia  $\mathbf{dgm}_\infty(f, w)$  tal que

$$\lim_{T \rightarrow \mathbb{T}} \mathbf{dgm}_\infty(f, T, w) = \mathbf{dgm}_\infty(f, w).$$

**Demostración 3.2.4.** Fije  $t \in T$  y  $t' \in T'$ . Para relajar la notación denotemos  $x_N = SW_{2N, \tau_N} f(t)$ ,  $x'_N = SW_{2N, \tau_N} f(t')$  donde  $\tau_N$  está definido como antes. Ahora usando desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{C(x_N)}{\|C(x_N)\|} - \frac{C(x'_N)}{\|C(x'_N)\|} \right\| &\leq \left\| \frac{C(x_N)}{\|C(x_N)\|} - \frac{\lambda C(x_N)}{\sqrt{2N+1}} \right\| + \frac{\lambda \|C(x_N) - C(x'_N)\|}{\sqrt{2N+1}} \\ &+ \left\| \frac{C(x'_N)}{\|C(x'_N)\|} - \frac{\lambda C(x'_N)}{\sqrt{2N+1}} \right\| \end{aligned}$$

Ahora note que dos de los términos convergen a  $|1 - \lambda^2|$  cuando  $N$  tiende a infinito usando la proposición 3.2.3. En efecto note que

$$\left\| \frac{C(x_N)}{\|C(x_N)\|} - \frac{\lambda C(x_N)}{\sqrt{2N+1}} \right\| = \frac{\|C(x_N)\|}{\sqrt{2N+1}} \left| \frac{\sqrt{2N+1}}{\|C(x_N)\|} - \lambda \right|$$

y lo mismo para el termino con  $x'_N$ . Es decir que dado  $\varepsilon > 0$  existe un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $N \geq N_0$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{C(x_N)}{\|C(x_N)\|} - \frac{C(x'_N)}{\|C(x'_N)\|} \right\| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda \|C(x_N) - C(x'_N)\|}{\sqrt{2N+1}} + 2|1 - \lambda^2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda \|x_N - x'_N\|}{\sqrt{2N+1}} + 2|1 - \lambda^2| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \lambda \left( \sum_{n=0}^{2N} \frac{|f(t + n\tau_N) - f(t' + n\tau_N)|^2}{2N+1} \right)^{1/2} + 2|1 - \lambda^2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda\omega(|t - t'|) + 2|1 - \lambda^2| \end{aligned}$$

Sean  $\bar{X}_N$  y  $\bar{X}'_N$  los conjuntos que resultan de centrar y normalizar  $SW_{2N, \tau_N} f(T)$  y  $SW_{2N, \tau_N} f(T')$  respectivamente. Como los cálculos hechos antes son independientes de  $t$  y  $t'$  y las convergencias son uniformes por la proposición 3.2.3 se sigue que siempre que  $N \geq N_0$  entonces

$$d_H(\bar{X}_n, \bar{X}'_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda\omega(d_H(T, T')) + 2|1 - \lambda^2|$$

Ahora al usar la estabilidad de la distancia de cuello de botella surge la desigualdad:

$$d_B(\text{dgm}(\bar{X}_N), \text{dgm}(\bar{X}'_N)) \leq \varepsilon + 2\lambda\omega(d_H(T, T')) + 4|1 - \lambda^2|$$

Si hacemos que  $N \rightarrow \infty$  entonces podemos hacer que  $\varepsilon \rightarrow 0$  y usando el primer teorema de convergencia concluimos que:

$$d_B(\text{dgm}_\infty(f, T, w), \text{dgm}_\infty(f, T', w)) \leq 2\lambda\omega(d_H(T, T')) + 4|1 - \lambda^2|.$$

La existencia de  $\text{dgm}_\infty(f, w)$  se sigue del hecho que ya hemos completado el espacio de diagramas de persistencia con respecto a  $d_B$   $\square$

### 3.3. Una cota inferior para $mp$

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $f \in C^1(\mathbb{T})$  una función  $L$ -periódica,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $M \geq 2N$ ,  $L(M+1)\tau = 2\pi$  y sea  $T \subseteq \mathbb{T}$  finito. Además asuma que  $d_H(T, \mathbb{T}) < \delta$  para algún  $\delta$  que satisface*

$$0 < \delta < \max_{1 \leq n \leq N} \frac{\sqrt{3}\tilde{r}_n}{\kappa_N}, \quad \text{donde } \kappa_N = \frac{2\sqrt{2}\|S_N f'\|_2}{\|S_N(f - \hat{f}(0))\|_2}.$$

Sea  $\bar{Y}$  la nube de puntos que resulta de centrar y normalizar el conjunto

$$SW_{M, \tau} S_N f(T)$$

y sea  $p > N$  un primo. Si  $\text{dgm}(\bar{Y})$  es el  $\mathbb{F}_p$  diagrama de persistencia 1 dimensional para la filtración de Rips en  $\bar{Y}$ , entonces

$\text{varphi}_\tau$  genera un elemento  $x_\varphi \in \text{dgm}(\bar{Y})$  que satisface:

1.  $\text{birth}(x_\varphi) \leq \delta\kappa_N$
2.  $\text{death}(x_\varphi) \geq \sqrt{3} \max_{1 \leq n \leq N} \tilde{r}_n$

y por tanto

$$mp(\text{dgm}(\bar{Y})) \geq \left( \sqrt{3} \max_{1 \leq n \leq N} \tilde{r}_n \right) - \delta\kappa_N$$

**Demostración 3.3.1.** Recordemos que el teorema 2.4.1 da una descomposición lineal en términos de un conjunto ortonormal:

$$\varphi_\tau(t) = \frac{C(\phi_\tau(t))}{\|C(\phi_\tau(t))\|} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N \tilde{r}_n (\cos(nt)\tilde{x}_n + \sin(nt)\tilde{y}_n)$$

si entonces definimos  $P_n : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{C}$  de la siguiente forma

$$P_n(\varphi_\tau(t)) = \tilde{r}_n e^{int}$$

se puede entender como la restricción a  $\bar{Y}$  de la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^{M+1}$  a  $Span(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ . Como las proyecciones ortogonales son lineales y no crecientes en norma entonces  $\|P_n(x) - P_n(y)\| \leq \|x - y\|$  para todo par  $x, y \in \bar{Y}$ . Luego si definimos

$$S^1(\tilde{r}_n) = \{\tilde{r}_n e^{int} | t \in T\}$$

es fácil ver que  $P_n$  induce un mapa simplicial

$$\begin{aligned} P_{n\#} : VR(\bar{Y}, \varepsilon) &\rightarrow VR(S^1(\tilde{r}_n), \varepsilon) \\ [x_0, \dots, x_k] &\mapsto [P_n(x_0), \dots, P_n(x_k)] \end{aligned}$$

para cada  $\varepsilon > 0$  que a la vez induce una transformación lineal

$$P_{n\star} : H_k(VR(\bar{Y}, \varepsilon); \mathbb{F}_p) \rightarrow H_k(VR(S^1(\tilde{r}_n), \varepsilon); \mathbb{F}_p)$$

entre  $\mathbb{F}_p$  espacios vectoriales en el nivel de homología dado. Queremos mostrar que a través  $P_{n\star}$ , la máxima persistencia 1-dimensional de  $\bar{Y}$  puede acotarse por la de  $S^1(\tilde{r}_n)$ . Para eso fijemos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  de forma que

$$\delta\kappa_N < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \sqrt{3}\tilde{r}_m$$

donde  $\tilde{r}_m = \max\{\tilde{r}_n | 1 \leq n \leq N\}$ . Ahora escribamos  $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_J\}$  y notemos que por hipótesis  $d_H(T, \mathbb{T}) < \delta$  y por tanto  $|t_j - t_{j-1}| < 2\delta$ . Ahora calculemos una cota para la distancia entre dos términos consecutivos luego de ser evaluados bajo  $\varphi_\tau(\cdot)$ . Antes de hacer los cálculos note que

$$\varphi_\tau(t_j) - \varphi_\tau(t_{j-1}) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N \tilde{r}_n (\tilde{x}_n (\cos(nt_j) - \cos(nt_{j-1})) + \tilde{y}_n (\sin(nt_j) - \sin(nt_{j-1})))$$

y ahora para calcular la norma al cuadrado usamos el producto interno de  $\ell_2$  y

el hecho que los  $\tilde{x}_n$  y  $\tilde{y}_n$  son un conjunto ortonormal:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\tau(t_j) - \varphi_\tau(t_{j-1})\| &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N \tilde{r}_n^2 ((\cos(nt_j) - \cos(nt_{j-1}))^2 + (\sin(nt_j) - \sin(nt_{j-1}))^2) \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N \tilde{r}_n^2 (2 - 2\cos(nt_j)\cos(nt_{j-1}) - 2\sin(nt_j)\sin(nt_{j-1})) \\
&\quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N 2\tilde{r}_n^2(1 - \cos(n(t_j - t_{j-1}))) \\
&\leq \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0 \pmod{L}}}^N 2\tilde{r}_n^2(n(t_j - t_{j-1}))^2 \\
&= (t_j - t_{j-1})^2 \sum_{n=1}^N \frac{8n^2|\hat{f}(n)|^2}{\|S_N f\|_2^2 - \hat{f}(0)^2} \\
&\leq \frac{8\delta^2}{\|S_N(f - \hat{f}(0))\|_2^2} \sum_{n=1}^N 2|\hat{f}'(n)|^2 \\
&= \frac{8\delta^2\|S_N f'\|_2^2}{\|S_N(f - \hat{f}(0))\|_2^2} = (\delta\kappa_N)^2
\end{aligned}$$

Si definimos

$$\nu = [\varphi_\tau(t_0), \varphi_\tau(t_1)] + \cdots + [\varphi_\tau(t_{J-1}), \varphi_\tau(t_1)] + [\varphi_\tau(t_J), \varphi_\tau(t_0)]$$

entonces gracias a los cálculos hechos anteriormente  $\nu$  es un ciclo 1-dimensional en  $VR(\bar{Y}, \varepsilon_1)$  y por tanto obtenemos una clase de homología

$$P_{m\star}([\nu]) \in H_1(VR(S^1(\tilde{r}_m), \varepsilon_1); \mathbb{F}_p)$$

Ahora sea  $\{\theta_{0m} < \theta_{1m} < \cdots < \theta_{Jm}\} = \{t \pmod{2\pi/m} | t \in T\}$  y sea  $c_j = \tilde{r}_m e^{im\theta_j}$ . Un calculo similar al anterior nos permite concluir que

$$\|c_j - c_{j-1}\|^2 \leq (\theta_j - \theta_{j-1})^2 \frac{4|\hat{f}'(n)|^2}{\|S_N(f - \hat{f}(0))\|_2^2} \leq (\delta\kappa_N)^2$$

y por tanto el 1-ciclo

$$\mu = [c_{0m}, c_{1m}] + \cdots + [c_{J-1m}, c_{Jm}] + [c_{Jm}, c_{0m}]$$

hace que la clase de homología  $[\mu] \in H_1(VR(S^1(\tilde{r}_m), \varepsilon_1); \mathbb{F}_p)$  satisface que  $i_\star([\mu]) \neq 0$  donde  $i_\star$  es la transformación lineal inducida por la inclusión

$$i : VR(S^1(\tilde{r}_m), \varepsilon_1) \rightarrow VR(S^1(\tilde{r}_m), \varepsilon_2).$$

Ahora, antes habíamos dicho que  $\varphi_\tau(\cdot)$  es una curva cerrada que recorre un círculo  $m$  veces a velocidad constante. Por tanto  $P_{m\star}([\nu]) = m[\mu]$  y como  $1 \leq m \leq N < p$  entonces  $m$  es invertible en  $\mathbb{F}_p$  y por consiguiente  $i_\star(P_{m\star}([\nu])) \neq 0$ . Ahora considere el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_1(VR(\bar{Y}, \varepsilon_1); \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{i_\star} & H_1(VR(\bar{Y}, \varepsilon_2); \mathbb{F}_p) \\ P_{m\star} \downarrow & & \downarrow P_{m\star} \\ H_1(VR(S^1(\tilde{r}_m), \varepsilon_1); \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{i_\star} & H_1(VR(S^1(\tilde{r}_m), \varepsilon_2); \mathbb{F}_p) \end{array}$$

Como el diagrama conmuta entonces  $i_\star([\nu]) \neq 0$  y por tanto  $[\nu]$  genera un elemento  $x_\varphi \in \text{dgm}(\bar{Y})$  que satisface

$$\text{birth}(x_\varphi) \leq \varepsilon_1 \quad \text{death}(x_\varphi) \geq \varepsilon_2.$$

Como la escogencia de los  $\varepsilon$  es irrelevante siempre que  $\varepsilon_1 > \delta\kappa_N$  y  $\varepsilon_2 < \sqrt{3}\tilde{r}_m$  podemos hacerlos tender hacia sus cotas y con eso concluimos la demostración  $\square$

Varios comentarios sobre el teorema anterior. En primer lugar es evidente de donde surge la cota inferior, más sin embargo la cota superior está escogida para que el complejo de Rips no sea contractil. Adicionalmente, en la demostración solo usamos  $\mathbb{F}_p$  para poder asegurar que  $m$  es un elemento invertible. Esto implica que  $\mathbb{F}_p$  podría remplazarse por  $\mathbb{Q}$  y entender a la homología como  $\mathbb{Q}$  espacios vectoriales. Por último, al combinar los dos teoremas de convergencia junto con las cotas para la máxima persistencia el siguiente teorema como resultado inmediato.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $f \in C^1(\mathbb{T})$  una función  $L$ -periódica que satisface  $\hat{f}(0)$  y  $\|f\|_2 = 1$ . Sea  $T \subseteq \mathbb{T}$  finito de forma que  $d_H(T, \mathbb{T}) < \delta$  para algún*

$$0 < \delta < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\|f'\|_2} \max_{n \in \mathbb{N}} |\hat{f}(n)|.$$

*Entonces si  $H_1$  es un  $\mathbb{Q}$  espacio vectorial, el diagrama de persistencia 1 dimensional  $\text{dgm}_\infty(f, T, w)$  satisface*

$$\frac{1}{2} mp(\text{dgm}_\infty(f, T, w)) \geq \sqrt{3} \max_{n \in \mathbb{N}} |\hat{f}(n)| - \sqrt{2}\delta\|f'\|_2$$

*y por tanto*

$$mp(\text{dgm}_\infty(f, w)) \geq 2\sqrt{3} \max_{n \in \mathbb{N}} |\hat{f}(n)|$$

# Bibliografía

- [1] Rotman, Joseph J. (1998) *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer, New York, 4th edition.
- [2] Perea, Jose A. Harer, John. (2013) *Sliding Windows and persistence: An application of topological methods to signal analysis*.
- [3] Afra Zomorodian. (2010) *Topological Data Analysis*.
- [4] Carlsson, Gunnar. Jardine, Rick. Feichtner-Kozlov, Dmitry. Morozov, Dmitriy. (2012). *Topological Data Analysis and Machine Learning Theory*
- [5] Ghrist, Robert. (2007). *Barcodes: The persistent topology of data*. American Mathematical Society (AMS).
- [6] P. Y. Lum, G. Singh, A. Lehman, T. Ishkanov, M. Vejdemo-Johansson, M. Alagappan, J. Carlsson. G. Carlsson. (2013) *Extracting insights from the shape of complex data using topology*.
- [7] Katznelson, Yitzhak (2002). *An introduction to harmonic analysis*.