

Taller 1 de Algebra Lineal. Agosto de 2009.

1. Sean $\vec{a} = [2, k]$, $\vec{b} = [3, 5]$. Encontrar k tal que:
 - a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean paralelos.
 - b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.
 - c) El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/3$.
 - d) El ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sea $\pi/4$.
2. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Establecer la identidad: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$. Dé una interpretación geométrica a esta identidad.
3. Explicar por qué cada una de las siguientes expresiones carece de sentido:
 - a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v})$.
 - b) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{w}$.
 - c) $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\|$.
 - d) $k \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, $k \in \mathbb{R}$.
4. Probar que $\text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.
5. Demostrar que si A es $n \times n$ no singular, entonces la matriz transpuesta A^T es también no singular y, además, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
6. Hallar la inversa de la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño ¿ $(AB)^2 = A^2B^2$ es una identidad válida?
8. La suma de dos matrices invertibles, ¿necesariamente es invertible?
9. Probar que si A es una matriz no singular, entonces:
 - a) A es simétrica si y solo si A^{-1} es simétrica.
 - b) A es antisimétrica si y solo si A^{-1} es antisimétrica.
10. Encontrar los valores de A, B y C que hacen la ecuación $\frac{x^2 + x - 2}{(3x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{3x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$ una identidad.
11. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
 - a) Demostrar que la ecuación $A\vec{x} = \vec{x}$ se puede reescribir como $(A - \mathbb{I}_3)\vec{x} = 0$ para $\vec{x}$.
 - b) Resolver la ecuación $A\vec{x} = 4\vec{x}$.
12. Encontrar enteros positivos que cumplan: $x + y + z = 9$ y $x + 5y + 10z = 44$.
13. Encontrar valores a, b y c de modo que la gráfica del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $(-1, 0)$ y tenga una tangente horizontal en $(2, 9)$.

14. ¿Para qué valores de a el siguiente sistema lineal no tiene solución? ¿exactamente una solución? ¿infinidad de soluciones?

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & - & 3z = 4 \\ 3x - y & + & 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z & = & a + 2. \end{array}$$

15. Consideremos el subespacio H de $\mathbb{R}^4$, $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0\}$

- a) Determinar una base del subespacio H .
- b) ¿Está el vector $[-2, 5, 2, 4]$ en el subespacio H ?
- c) Expresar el vector $[-2, 5, 2, 4]$ como combinación lineal de los vectores hallados en a).
- d) Hallar el espacio nulo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

16. Comprobar si los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

- a) $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 1\}$.
- b) $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + \alpha x_3 = x_2 + x_3 = 0\}$.
- c) $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) / 8x_1 + x_3 = 2, x_2 + x_3 = 0\}$.