

Taller 2. Álgebra Lineal. Septiembre de 2008.

Prof: J. López

- Si H y K son subespacios vectoriales de un espacio vectorial V ,
 - Probar que $A \cap B$ es un subespacio de V . Extender el resultado a la intersección finita de subespacios.
 - ¿Es siempre $A \cup B$ un subespacio de V ? En caso negativo, especificar bajo qué condiciones relativas a A y a B , $A \cup B$ es un subespacio de V .
- Sea $H = \{x(t) : x'' + \omega^2 x(t) = 0\}$. Mostrar que $\{\sin \omega t, \cos \omega t\}$ es una base de H .
- Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, encontrar todas las matrices $M_{2 \times 2}$ que conmutan con ella. Probar que dichas matrices constituyen un subespacio vectorial de $M_{2 \times 2}$ y determinar una base para este subespacio.
- Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de números reales positivos dotado de las operaciones: $a \oplus b = ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \odot a = a^\lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$.
 - Demostrar que $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial.
 - Indicar la dimensión y una base de $\mathbb{R}^+$.
 - ¿Son $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ subespacios de $\mathbb{R}^+$?
- Sea F el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sean los conjuntos $P = \{f \in F : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, $I = \{f \in F : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$. Probar que el conjunto de funciones pares P y el conjunto de las funciones impares I es un subespacio vectorial de F .
- Considere el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) tales que $\{3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0\}$.
 - Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio.
 - Determinar una base del subespacio.
 - Hallar las coordenadas del vector $[-2, 5, 2, 4]$ en esta base.
- Determinar la ecuación del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que tiene por base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
- Estudiar si la familia de polinomios de $P_{\leq 3}$, $A = \{1, at^2, 2t^2 - 1, 2t^3 - 3t\}$, con $a \neq 0$, es linealmente independiente.
- Probar que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial $x''(t) = 0$ es un subespacio vectorial de dimensión 2 en $C^2(\mathbb{R})$.
- Sea $S = \{A \in M_{n \times n} : A^T = A\}$ y $H = \{A \in M_{n \times n} : A^T = -A\}$.
 - Probar que el conjunto de matrices simétricas S y el conjunto de las matrices antisimétricas H son subespacios vectoriales de las $M_{n \times n}$.
 - Hallar la dimensión de S y de H .
 - Probar que $M_{n \times n}$ es suma directa de S y de H .
- Hallar la matriz de representación de la transformación lineal $f : P_{\leq 3} \rightarrow P_{\leq 3}$, dada por $f(p(t)) = t^2 p''(t) + 2tp'(t) + p(t)$ respecto a la base $B = \{t^3, t^2, t, 1\}$.
- Considere la transformación $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(x) = Ax$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

- a)* ¿Es T inyectiva?
 - b)* ¿Es T sobreyectiva?
- 13. Se considera la transformación lineal $f : P_{\leq 2} \rightarrow P_{\leq 2}$, dada por $f(1) = 1$, $f(t-1) = t+1$ y $f((t-1)^2) = (t+1)^2$.
 - a)* Evaluar $f(t^2 + t + 1)$.
 - b)* Calcular la $\text{Imag}(f)$ y su dimensión. ¿Es f sobre?
 - c)* Hallar la matriz de f