

Taller 1. Álgebra Lineal. Agosto de 2008.

Prof: J. López

1. a) Encontrar los coeficientes a, b, c para que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 4)$, $(2, 8)$ y $(3, 14)$.

Rta. $a = 1, b = 1, c = 2$.

- b) Una fábrica de muebles tiene dos divisiones: una taller donde se fabrican las partes de los muebles y una división ensamble, donde se unen las partes para obtener el producto terminado. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división, y que cada empleado trabaja 8 horas diarias. Suponga que se producen solo sillas y mesas. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinado y $\frac{480}{17}$ horas de ensamblaje. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinado y $\frac{640}{17}$ horas de ensamblaje. Suponga que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante quiere mantener ocupados todos los empleados. ¿Cuántas sillas y cuántas mesas al día puede producir esa fábrica?

Rta. 3 sillas y 2 mesas.

2. Considere el sistema: $x - y + 2z = 7$, $ax + z = 0$ y $2x - y + z = b$, donde a, b son parámetros. Responda las siguientes preguntas.

- a) ¿Para qué valores de a y b el sistema tiene más de una solución?
 b) ¿Para qué valores de a y b el sistema es inconsistente?
 c) ¿Para qué valores de a y b el sistema tiene solución única? ¿Cuál es esa solución?

Rta. a) $a = -1, b = 7$. b) $a = -1, b \neq 7$. c) $a \neq -1, b \in \mathbb{R}$.

3. Muestre que si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ conmuta con toda matriz 2×2 , entonces existe un escalar k tal que $A = k\mathbb{I}_2$.

Sugerencia: Considere los productos AB, BA , con $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Considere la matriz $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

- a) Calcule R^n , n un entero positivo.
 b) Para que valores de θ la matriz R es invertible?
 c) Halle R^{-1} .

Rta. a) $\begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$, b) para todo θ , c) $R^{-1} = R^T$.

5. Pruebe que si A es simétrica e invertible, A^{-1} es simétrica.

Sugerencia: Haga ver que $(A^{-1})^T = A^{-1}$.

6. Si $x \cdot y = x \cdot z$, entonces siempre $y = z$? Justifique su respuesta.

Sugerencia: Construya unos ejemplos.

7. Pruebe que si $\vec{b} + \vec{c} = 0$ y $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\|$, entonces $(\vec{a} - \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{c}) = 0$.

Sugerencia: Distribuya el producto punto y use las hipótesis.

8. Sean $u = [-2, 5]$ y $v = [\alpha, -2]$. Determine α tal que:

- a) u y v son ortogonales.
- b) El ángulo entre u y v es de $2\pi/3$.
- c) u y v son paralelos.
- d) El ángulo entre u y v es de $\pi/3$.

Rta. a) $\alpha = -5$, b) $\alpha = \frac{80 \pm 58\sqrt{3}}{13}$, c) $\alpha = \frac{4}{5}$, d) para ningún α .

9. a) Sea $H_1 = \{X \in \mathbb{R}^n : A \cdot X = 0, A \in M_{n \times n}\}$. Es H_1 un subespacio de $\mathbb{R}^n$?
 b) Sea $H_2 = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) : a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = 1\}$. Es H_2 un subespacio de $\mathbb{R}^n$?
 c) Sea $H_3 = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) : a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0\}$. Es H_3 un subespacio de $\mathbb{R}^n$?

Rta. a) Si, b) No, c) Si.

10. Considere el espacio $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

- a) Es $K_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(-x), \forall x\}$ un subespacio de $C(\mathbb{R})$?
- b) $K_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = 0\}$ un subespacio de $C(\mathbb{R})$?
- c) $K_3 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}\}$ un subespacio de $C(\mathbb{R})$?

Rta. a) Si, b) Si, c) No.

11. Considere el espacio $M_{n \times n}$ de todas las matrices $n \times n$. ¿Es $T = \{a_{ij} = 0, \forall i \geq j\}$ un subespacio de $M_{n \times n}$?

Rta. Si.

12. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Halle una base para el espacio nulo de la matriz A .

13. Una matriz A cuadrada se dice nulpotente de orden k si $A^k = 0$. ¿Si A y B son matrices nulpotente, es $A + B$ nulpotente?

Rta. No.

14. ¿Si A es una matriz invertible, es $A + A^T$, invertible?

Rta. No.

15. Responda las siguientes preguntas:

- a) Halle el valor(es) de c para que el vector $3\vec{i} - 2\vec{j} + c\vec{k}$ este en el generado por los vectores $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{j} + 3\vec{k}$.

- b) ¿Existen matrices B y C de tamaño 3×1 tales que $B[1, 1, 0] = \mathbb{I}_3$ y $[1, 1, 0]C = 1$.

- c) Encuentre la inversa de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- d) Es el conjunto $H = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 a_2 \dots a_n = 1\}$ un subespacio del espacio euclideo $\mathbb{R}^n$?

- e) Para que valor(es) de α son linealmente independientes los vectores $[2, 4, 6], [2, -1, 4], [2, 1, \alpha]$?