

Índice general

Prefacio a la Segunda Edición	2
Prefacio a la Primera Edición	3
0. ESPACIOS MÉTRICOS	4
0.1. Definiciones y ejemplos	4
0.2. Topología inducida por una métrica	7
0.3. Espacios métricos completos. Teorema de Baire.	14
0.4. Espacios métricos compactos	34
1. ESPACIOS DE BANACH	47
1.1. Definiciones y ejemplos.	47
1.2. Subespacios - Transformaciones lineales - Espacios cocientes	69
1.3. El espacio dual - Teorema de Hahn-Banach	81
1.4. La topología débil en un espacio normado	105
1.5. Teoremas de Banach-Steinhaus, de la aplicación abierta y del gráfico cerrado	134
1.6. Aplicaciones y ejemplos	147
1.6.1. Funciones holomorfas	147
1.6.2. Series de Fourier	149
1.6.3. Subespacios cerrados de ℓ^1 que no admiten complemen- to topológico	155
1.7. Operadores adjuntos	160
2. ESPACIOS DE HILBERT	171
2.1. Definiciones y ejemplos.	171
2.2. Ortogonalidad	179
2.3. Operadores continuos - Convergencia de operadores	199

2.4. Operadores hermitianos, normales y unitarios.	207
2.5. Proyecciones ortogonales	218
3. OPERADORES COMPACTOS	224
3.1. Espectro de los operadores compactos en en espacios de Banach.	224
3.2. Operadores compactos en espacios de Hilbert.	242
Bibliografia	254

Prefacio a la Segunda Edición

Durante los más de veinte años transcurridos desde su aparición, este libro se ha usado frecuentemente como texto para el curso de Análisis Funcional en la Universidad de los Andes y en la Universidad Nacional de Colombia. Varios colegas y estudiantes me han comentado repetidamente sobre la conveniencia de hacer una nueva edición. Era mi intención reescribir el libro completamente, ampliando y actualizando el contenido y la bibliografía, e incluyendo dos capítulos adicionales sobre teoría espectral. Como esta labor demandaría todavía algún tiempo y el libro se encuentra agotado, decidí sacar esta segunda edición, en la presente forma, para lo cual se corrigieron numerosos errores de mecanografía y varios yerros matemáticos, se modificaron algunos ejercicios, se actualizó la bibliografía y se agregó un índice analítico. Por lo demás, el contenido es el mismo de la primera edición.

En las últimas décadas se han escrito excelentes tratados de Análisis Funcional, y los progresos alcanzados por la teoría son enormes. Para una información extensa al respecto, se recomiendan [13] y [14]. En los libros [26] y [27] pueden consultarse además aplicaciones muy importantes del Análisis Funcional. Este trabajo contó con la financiación del Fondo de Docencia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, al cual agradezco su apoyo. Igualmente agradezco al profesor J. Darío López G. del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes por su invaluable colaboración en la elaboración de esta edición.

Quiero dedicar la segunda edición de este libro a la memoria del coautor, mi antiguo alumno y colaborador Dr. Teófilo Abuabara, fallecido prematuramente hace varios años.

Bogotá, abril de 2008

J. Lesmes

Prefacio a la Primera Edición

Este libro se basa en las notas de un curso de Análisis Funcional que dicté varias veces en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) de Río de Janeiro. El contenido de los capítulos 1 a 3 es apropiado para un primer curso de Análisis Funcional, omitiendo algunos temas, a juicio del profesor (por ejemplo, para un curso introductorio se puede omitir una parte de la sección 1.4 y todo el capítulo 3). Se ha agregado un capítulo preliminar sobre espacios métricos, esencialmente autocontenido, para referencia rápida y para que eventualmente facilite el estudio o el repaso de algún tema particular.

Quiero expresar mi agradecimiento al coautor, Dr. T. Abuabara, a quien se deben la recolección de las notas en forma unificada, la redacción del Capítulo 0 y gran parte de los ejemplos y ejercicios. Igualmente quiero agradecer a quienes con sus observaciones y sugerencias contribuyeron para mejorar y completar estas notas, en especial a mis colegas Ricardo Mañé (a quien se deben varios de los ejercicios) y Carlos Isnard, del IMPA, y a mis alumnos del IMPA y de la Universidad de los Andes. En particular, agradezco a Adriana Camacho por su ayuda en la corrección de las pruebas.

Originalmente se pensó elaborar la presente obra para la colección de monografías publicadas con motivo de los 25 años de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, pero debido a la forma de presentación y al volumen se decidió publicarla por separado.

J. Lesmes

Bogotá, octubre de 1981

Capítulo 0

ESPACIOS MÉTRICOS

0.1. Definiciones y ejemplos

Definición 0.1.1. Una *métrica* en un conjunto no vacío M es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el producto cartesiano $M \times M$ y con valores reales, que satisface a las siguientes condiciones, para x, y, z elementos cualesquiera de M :

- $M_1)$ $d(x, y) \geq 0$, y, $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$.
- $M_2)$ $d(x, y) = d(y, x)$.
- $M_3)$ $d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y)$.

El número real positivo $d(x, y)$ se llama *distancia* de x a y . La condición $M_3)$ es conocida como la desigualdad triangular, cuyo nombre se origina en el hecho de que en el plano, la longitud de uno de los lados de un triángulo no excede a la suma de las longitudes de los otros dos.

Si d es una métrica en M , a la pareja (M, d) se la llama *espacio métrico* y si no hay lugar a dudas, nos referiremos simplemente a M como el espacio métrico.

Ejemplo 0.1.1. El ejemplo más simple e importante de espacio métrico es la recta $\mathbb{R}$ con la distancia entre dos puntos dada por la función

$$d(x, y) = |x - y|$$

A menos que se diga explícitamente otra cosa, $\mathbb{R}$ se considerará dotado de esta métrica, la cual comúnmente se llama métrica usual de $\mathbb{R}$

Ejemplo 0.1.2. Sean (M, d) un espacio métrico y S un subconjunto de M . La función $d_s : S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_s(x, y) = d(x, y),$$

es una métrica en S , llamada *métrica inducida* por d en S . En este caso se dice que S es subespacio métrico de M .

Ejemplo 0.1.3. Sea $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$ el espacio euclidiano de dimensión n . Las tres funciones reales siguientes, definidas sobre $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \\ d'(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ d''(x, y) &= \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

son ejemplos de métricas en $\mathbb{R}^n$. La métrica d se llama métrica euclidiana en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 0.1.4. Sea (M, d) un espacio métrico. La función $\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es una métrica en M . En efecto, las condiciones $M_1)$ y $M_2)$ son inmediatas. Demostremos la desigualdad triangular: cualesquiera que sean $x, y, z \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} \\ &= \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Por consiguiente ρ es una métrica en M .

Ejemplo 0.1.5. Dados n espacios métricos (M_i, d_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, el producto cartesiano $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ es un espacio métrico, para una cualquiera de las siguientes métricas:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}, \\ d'(x, y) &= \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i), \\ d''(x, y) &= \max\{d_i(x_i, y_i); 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

en donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son elementos de M . Además, tenemos las siguientes desigualdades:

$$d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq nd''(x, y).$$

La primera y tercera desigualdades son inmediatas, y en cuanto a la segunda es suficiente observar que

$$d'(x, y)^2 = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2 + \sum_{i \neq j} d_i(x_i, y_i) d_j(x_j, y_j),$$

y por consiguiente $d(x, y) \leq d'(x, y)$.

El lector puede observar que el ejemplo 0,1,3 es un caso particular de este último.

Ejercicios de la sección 0.1

1. Sea M un conjunto cualquiera. Demuestre que la función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

es una métrica en M . Esta es llamada *métrica discreta* sobre M .

2. Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$

Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{R}$.

3. Si d es una métrica en M , demuestre que la función $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\},$$

es una métrica en M .

0.2. Topología inducida por una métrica

Definición 0.2.1. Sea X un conjunto cualquiera. Una *topología* en X es una familia τ de subconjuntos de X , tal que

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. Si $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una colección de elementos de τ , entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$. En otras palabras, una reunión cualquiera de elementos de τ es un elemento de τ .
3. Si $A_1, A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Equivalentemente, la intersección de un número finito de elementos de τ es un elemento de τ

Si τ es una topología en X , a la pareja (X, τ) se la llama un *espacio topológico* y los elementos de τ se llaman abiertos de X (o en X).

Si (X, τ) es un espacio topológico y si Y es un subconjunto de X , la familia τ_Y de subconjuntos de Y definida por

$$\tau_Y = \{A \cap Y; A \in \tau\}$$

es una topología en Y , llamada la *topología inducida* en Y por la topología de X o la topología inducida por τ en Y . Por consiguiente un subconjunto U de Y es abierto en Y (o con relación a Y) si y solamente si $U = A \cap Y$, para algún abierto A de X .

Definición 0.2.2. Sean (X, τ) un espacio topológico y S un subconjunto de X .

1. Se dice que S es un subconjunto *cerrado* en X si y solamente si su complemento S^c es un subconjunto abierto de X .
2. Se dice que un punto x_0 es *interior* a S cuando existe un abierto A de X tal que $x_0 \in A \subset S$. Se denota por $\text{int}(S)$ el conjunto de todos los puntos de X interiores a S .
3. Un punto x_0 se llama *punto de acumulación* de S si y solamente si para todo abierto A de X que contenga al punto x_0 , se tiene que $(A \setminus \{x_0\}) \cap S \neq \emptyset$, o sea, A contiene un punto de S distinto de x_0 . Se denota por S' el conjunto de todos los puntos de X que son puntos de acumulación de S .

4. Se dice que un punto x_0 de S es un *punto aislado* (de S) si no es punto de acumulación de S , esto es, si existe un abierto A de X que contenga al punto x_0 tal que $(A \setminus \{x_0\}) \cap S = \emptyset$. Si todos los puntos de S son puntos aislados, se dice que S es *discreto*.
5. Un punto x_0 de X se llama *punto adherente* a S cuando para todo abierto A de X que contiene al punto x_0 , se tiene que $A \cap S \neq \emptyset$. Se denota por $\overline{S}$ el conjunto de todos los puntos de X que son adherentes a S . El conjunto $\overline{S}$ se llama la *clausura o adherencia* de S . Se dice que S es *denso* en X si $\overline{S} = X$.
6. La *frontera* de S , $\text{fr}(S)$, se define como el conjunto

$$\text{fr}(S) = \overline{S} \cap \overline{S^c}$$

Se dice que un subconjunto de V de X es una *vecindad* de un punto $x_0 \in X$, cuando existe un abierto A de X tal que $x_0 \in A \subset V$. Por consiguiente, en las definiciones anteriores se puede usar el concepto de vecindades en lugar del de abiertos.

El lector podrá demostrar fácilmente las siguientes afirmaciones:

1. $\text{int}(S)$ es el mayor conjunto abierto de X contenido en S . Por consiguiente S es abierto en X si y solamente si $\text{int}(S) = S$.
2. $\overline{S}$ es el menor conjunto cerrado en X que contiene a S . Por consiguiente S es cerrado en X si y solamente si $S = \overline{S}$.
3. $\overline{S} = S \cup S'$ y por lo tanto, S es cerrado si y solamente si $S \supset S'$.
4. $\overline{S} = \text{int}(S) \cup \text{fr}(S)$ (unión disyunta) y también $\overline{S} = S \cup \text{fr}(S)$. De estas dos igualdades se sigue que S es cerrado si y sólo si $S \supset \text{fr}(S)$.

Definición 0.2.3. Una *base* para una topología τ en X es una familia $\mathcal{B}$ de elementos de τ tal que todo elemento de τ (esto es, todo conjunto abierto de X) se puede expresar como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposición 0.2.1. Sean X un conjunto cualquiera y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X . Para que $\mathcal{B}$ sea una base para una topología en X es necesario y suficiente que satisfaga las dos condiciones siguientes:

1. X es la unión de los elementos de $\mathcal{B}$.
2. Dados B_1, B_2 elementos de $\mathcal{B}$, y, $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Demostración. Es claro que las condiciones son necesarias. Las condiciones son también suficientes. En efecto, si

$$\tau = \{A \subset X; A \text{ es unión de una familia de elementos de } \mathcal{B}\} \cup \{\emptyset\},$$

entonces τ es una topología en X y $\mathcal{B}$ es una base para τ . $\square$

Definición 0.2.4. Sean (M, d) un espacio métrico, x_0 un elemento de M y $\epsilon > 0$. El conjunto

$$B_\epsilon(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) < \epsilon\},$$

se llama la *bola abierta* en M de centro x_0 y radio ϵ ; el conjunto

$$\overline{B}_\epsilon(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) \leq \epsilon\},$$

se llama *bola cerrada* en M de centro x_0 y radio ϵ , y el conjunto

$$S_\epsilon(x_0) = \{x \in M; d(x, x_0) = \epsilon\},$$

se llama la *esfera* en M de centro x_0 y de radio ϵ .

Teorema 0.2.1. Sean (M, d) un espacio métrico y $\mathcal{B}_d = \{B_\epsilon(X); \epsilon > 0, x \in M\}$ la familia de todas las bolas abiertas en M . Entonces, $\mathcal{B}_d$ es una base para una topología τ_d en M , llamada la topología inducida por la métrica d .

Demostración. Por la proposición 0,2,1, es suficiente demostrar que dados $x_1, x_2 \in M, \epsilon > 0, \delta > 0$ y $z \in B_\epsilon(x_1) \cap B_\delta(x_2)$, existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta(z) \subset B_\epsilon(x_1) \cap B_\delta(x_2)$. Ahora, como $d(z, x_1) < \epsilon$ y $d(z, x_2) < \delta$, entonces haciendo

$$\eta = \min \{\epsilon - d(z, x_1), \delta - d(z, x_2)\} > 0$$

tenemos que $B_\eta(z) \subset B_\epsilon(x_1) \cap B_\delta(x_2)$ $\square$

Un espacio métrico siempre se considera dotado de la topología inducida por su métrica.

Corolario 0.2.1. *Un subconjunto A de M es abierto para la topología τ_d si y solamente si A es unión de bolas abiertas en M . En particular, las bolas abiertas en M son conjuntos abiertos de M .*

Se sigue de este corolario que los conceptos de la definición 2 pueden ser redefinidos en términos de bolas abiertas (o cerradas, ya que éstas son vecindades). Así, por ejemplo, un punto x_0 de M es interior a un subconjunto S de M si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset S$.

Debe tenerse en cuenta que, en general, una bola cerrada puede no ser igual a la adherencia de la bola abierta del mismo centro y del mismo radio. Por ejemplo, si M es un espacio con más de un punto, dotado de la métrica discreta definida en el ejercicio 1 de la sección 0,1, tenemos que para todo $a \in M$, la bola cerrada de radio 1 y centro a es todo M , pero $\overline{B_1(a)} = \{a\} \neq M$.

Definición 0.2.5. Sean (M, d_1) y (N, d_2) dos espacios métricos. Se dice que una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es *continua* en $x_0 \in M$ si y solamente si toda bola abierta en N centrada en $f(x_0)$ contiene la imagen por f de alguna bola abierta en M con centro en x_0 . En otras palabras, f es continua en x_0 si (y solamente si) dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $y \in B_\delta(x_0)$ implica $f(y) \in B_\epsilon(f(x_0))$. Se dice que $f : M \longrightarrow N$ es continua, si es continua en todos los puntos M .

Del corolario 0,2,1 se sigue la siguiente proposición

Proposición 0.2.2. *Para que una aplicación $f : M \longrightarrow N$ sea continua es necesario y suficiente que la imagen inversa $f^{-1}(A)$ de cualquier abierto A en N sea abierto en M .*

Ya que $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$, la proposición puede ser enunciada en términos de conjuntos cerrados en lugar de abiertos, como también en términos de vecindades.

Definición 0.2.6. Si M, N son espacios métricos y $f : M \longrightarrow N$ es una aplicación biyectiva continua, cuya inversa $f^{-1} : N \longrightarrow M$ también es continua, se dice que f es un *homeomorfismo* de M sobre N , y que M y N son espacios métricos *homeomorfos*.

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ dos espacios topológicos. Se dice que una aplicación $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ es continua si $f^{-1}(A) \in \tau_1$, para todo $A \in \tau_2$, esto es, si la imagen inversa $f^{-1}(A)$ de cualquier abierto A en Y es un abierto en X . Una aplicación $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ que es continua y biyectiva y cuya inversa $f^{-1} : (Y, \tau_2) \longrightarrow (X, \tau_1)$ es también continua, se llama un homeomorfismo de X sobre Y . En este caso se dice que los espacios X e Y son homeomorfos.

Sean τ_1, τ_2 dos topologías en el mismo conjunto X . Se dice que τ_1 es más fina que τ_2 si $\tau_1 \supset \tau_2$. esto es, si la aplicación identidad $id : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ es continua.

Definición 0.2.7. Sean M un conjunto, d_1 y d_2 dos métricas en M .

1. Se dice que d_1 es *más fina* que d_2 , si la aplicación identidad $id : (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ es continua, esto es, si toda bola abierta en M según la métrica d_2 contiene alguna bola abierta con el mismo centro según la métrica d_1 .
2. Se dice que d_1 y d_2 son métricas *equivalentes* en M , lo cual se denota $d_1 \sim d_2$, si la aplicación identidad $id : (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ es un homeomorfismo, esto es, si toda bola abierta en M según d_1 contiene alguna bola abierta con el mismo centro según d_2 y viceversa.

Observación 0.2.1. Una métrica d_1 es más fina que una métrica d_2 si y solamente si la topología inducida por d_1 es más fina que la topología inducida por d_2 en M . Por consiguiente dos métricas d_1, d_2 en M son equivalentes cuando inducen sobre M la misma topología.

Ejemplo 0.2.1. Si $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo, entonces la métrica d' en $\mathbb{R}$ definida por

$$d'(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|,$$

es equivalente a la métrica usual de $\mathbb{R}$. En particular, la métrica

$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$

es equivalente a la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Veremos más adelante que, aunque la métrica d' definida arriba es equivalente a la métrica usual de $\mathbb{R}$, la cual es completa, d' no es completa. (El concepto de completez se definirá en la sección 0,3).

Ejemplo 0.2.2. Sean d_1, d_2 dos métricas en M para las cuales existen constantes $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y),$$

para todos los $x, y \in M$. Entonces las métricas d_1 y d_2 son equivalentes en M .

Observación 0.2.2. Es conveniente observar que la afirmación recíproca de la del ejemplo anterior es falsa. En efecto, sea d una métrica cualquiera en M . La métrica $\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

es equivalente a la métrica d (ver ejercicio 1). Ahora bien, si d no es acotada no puede existir ninguna constante $\alpha > 0$ tal que $d(x, y) \leq \alpha \rho(x, y)$, para todo $x \in M$ y todo $y \in M$, pues $\rho(x, y) < 1$.

Ejemplo 0.2.3. Sea $I = [a, b]$ (con $a < b$) un intervalo compacto¹ de $\mathbb{R}$. Se denota por $C(I; \mathbb{R})$ el conjunto (espacio vectorial) de todas las funciones reales continuas definidas sobre I . En $C(I; \mathbb{R})$ definimos las dos métricas siguientes:

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \sup \{|f(t) - g(t)|; t \in I\}, \\ d_2(f, g) &= \int_a^b |f(t) - g(t)| dt. \end{aligned}$$

Las métricas d_1, d_2 no son equivalentes. En efecto la aplicación identidad

$$id : (C(I; \mathbb{R}), d_2) \longrightarrow (C(I; \mathbb{R}), d_1)$$

no es continua. Para demostrar esta afirmación, sean $f_0 \equiv 0$ la función constante idénticamente nula, $\epsilon = 1$, y $\delta > 0$ cualquiera. Escogemos $n \in \mathbb{N}, n > 1$ tal que $a + \frac{\delta}{n} < b$. Sea $f_\delta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la función continua definida por la figura:

¹esto es, cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ (ver la definición 0,4,1)

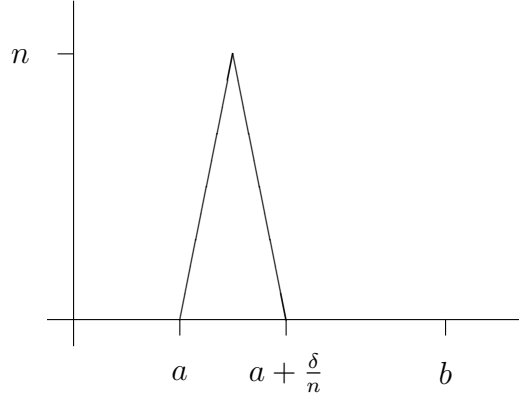


Figura 1:

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
 d_2(f_\delta, f_0) &= \int_a^b |f_\delta(t)| dt \\
 &= \int_a^{a+\frac{\delta}{n}} |f_\delta(t)| dt \\
 &= \frac{\delta}{2} < \delta
 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$d_1(f_\delta, f_0) = \sup \{|f_\delta(t)|; t \in I\} = n > 1,$$

de donde se sigue la afirmación.

Nótese, sin embargo, que como $d_2(f, g) \leq (b-a)d_1(f, g)$, cualesquiera que sean $f, g \in C(I; \mathbb{R})$, entonces la aplicación identidad

$$id : (C(I; \mathbb{R}), d_1) \longrightarrow (C(I; \mathbb{R}), d_2),$$

es continua y por lo tanto d_1 es más fina que d_2 .

Definición 0.2.8.

1. Se dice que un espacio topológico X es *separado* o de *Hausdorff*, si dos puntos distintos cualesquiera de X poseen vecindades disyuntas.

2. Si X es un espacio topológico y $a \in X$, un *sistema fundamental de vecindades* de a es una familia $\mathcal{V}$ de vecindades de a , tal que dada W , vecindad cualesquiera de a , existe $V \in \mathcal{V}$ con $V \subset W$.

Todo espacio métrico es de Hausdorff. En un espacio métrico, las bolas centradas en un punto dado constituyen un sistema fundamental de vecindades de ese punto.

Ejercicios de la sección 0.2

1. Si d es una métrica en M , demuestre que la métrica ρ en M definida por

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

es equivalente a la métrica d .

2. Sean $(M, d_1), (N, d_2)$ dos espacios métricos. Demuestre que para que la aplicación $f : (M, d_1) \rightarrow (N, d_2)$ sea continua es necesario y suficiente que la métrica $d_f : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_f(x, y) = d_1(x, y) + d_2(f(x), f(y)),$$

sea equivalente a d_1 .

3. Demuestre que para todo subconjunto A no vacío de un espacio métrico M , y todo punto $x \in M$, se tiene que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$, en donde se define: $d(a, S) = \inf \{d(a, s); s \in S\}$, para cualquier subconjunto S de M y $a \in M$.

0.3. Espacios métricos completos. Teorema de Baire.

Definición 0.3.1. Sea (M, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión (x_n) de elementos de M *converge* a $x_0 \in M$, o que tiene límite x_0 (lo cual se denota $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, ó, $x_n \rightarrow x_0$), si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_0) = 0$. Una sucesión en un espacio métrico converge a lo más a un punto. En efecto, si (x_n) es una sucesión tal que $x_n \rightarrow x_0, x_n \rightarrow y_0$, entonces se tiene que

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \rightarrow 0,$$

de donde $d(x_0, y_0) = 0$, y por consiguiente $x_0 = y_0$.

Tenemos también que si una sucesión converge a x_0 , entonces cualquier subsucesión es convergente hacia el mismo punto x_0 .

Proposición 0.3.1. *Una sucesión (x_n) en un espacio métrico M converge a x_0 si y sólo si para todo abierto A que contenga al punto x_0 , existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, para todo $n > n_0$.*

Demostración. Sea A un abierto en M tal que $x_0 \in A$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x_0) \subset A$. Como $x_n \rightarrow x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \epsilon$ si $n > n_0$, de donde $x_n \in A$, para todo $n > n_0$. Por consiguiente la condición es necesaria. Para la recíproca, recuérdese que las bolas abiertas son conjuntos abiertos en M . $\square$

Como toda vecindad de un punto contiene un abierto que contiene al punto, tenemos el siguiente corolario

Corolario 0.3.1. *Una sucesión (x_n) en un espacio métrico M es convergente a un punto $x_0 \in M$ si y sólo si para toda vecindad V de x_0 en M , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n > n_0$.*

Corolario 0.3.2. *Si dos métricas d_1, d_2 en M son equivalentes, entonces una sucesión (x_n) converge a x_0 según d_1 si y sólo si también converge a x_0 según d_2 .*

Observación 0.3.1.

1. La importancia de la proposición 0.3.1 (o de su corolario 0.3.1) es que permite extender la definición de límite de una sucesión a un espacio topológico cualquiera: Se dice que una sucesión (x_n) converge a x_0 en X (espacio topológico) si para toda vecindad V de x_0 , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n > n_0$.
2. En espacios métricos, una condición necesaria y suficiente para que un punto sea adherente a un conjunto es que el punto sea límite de una sucesión de puntos del conjunto. En espacios topológicos cualesquiera, esta condición siempre es suficiente y si X es de Hausdorff y satisface al primer axioma de enumerabilidad (esto es, si todo punto de X posee un sistema fundamental enumerable de vecindades), entonces la condición también es necesaria.

3. También en espacios métricos una condición necesaria y suficiente para que x_0 sea punto de acumulación de un conjunto S , es que x_0 sea límite de una sucesión de puntos del conjunto, dos a dos distintos. En efecto, supongamos que x_0 sea punto de acumulación de S ; entonces cualquiera que sea $\delta > 0$, existe al menos un punto $x \in S$, tal que $0 < d(x, x_0) < \delta$. Sea $\delta_1 = 1$; escogemos $x_1 \in S$ tal que $0 < d(x_1, x_0) < 1$. Para $\delta_2 = \min \left\{ d(x_1, x_0), \frac{1}{2} \right\}$, escogemos $x_2 \in S$ tal que $0 < d(x_2, x_0) < \delta_2$. Para $\delta_3 = \min \left\{ d(x_2, x_0), \frac{1}{3} \right\}$, escogemos $x_3 \in S$ tal que $0 < d(x_3, x_0) < \delta_3$. Continuando en esta forma, construimos una sucesión (x_n) de elementos de S tal que

$$0 < d(x_{n+1}, x_0) < d(x_n, x_0); d(x_n, x_0) < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $\lim x_n = x_0$. Además, si $n \neq m$, entonces $x_n \neq x_m$. En efecto, si $n > m$,

$$d(x_n, x_0) < d(x_{n-1}, x_0) < \dots < d(x_{m-1}, x_0) < d(x_m, x_0),$$

de donde $x_n \neq x_m$. Se concluye que la condición es necesaria; su suficiencia es evidente.

Debemos observar que en espacios topológicos cualesquiera, esta condición es suficiente, pero en general no es necesaria.

Dejamos al lector la demostración de la siguiente proposición:

Proposición 0.3.2. Sean M, N dos espacios métricos. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es continua en $x_0 \in M$ si y sólo si para toda sucesión (x_n) de elementos de M convergente a x_0 , la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$ en N .

Definición 0.3.2. Una sucesión (x_n) es un espacio métrico (M, d) se llama *sucesión de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ podemos hallar un índice $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cualquier pareja de índices $m, n > n_0$, se tiene que $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Definición 0.3.3. Se dice que un subconjunto S de un espacio métrico es *acotado* cuando existe una bola abierta $B_\alpha(x_0)$ tal que $S \subset B_\alpha(x_0)$, esto es, $d(x, x_0) < \alpha$, para toda $x \in S$.

Observación 0.3.2. Se define el diámetro de un subconjunto S no vacío de un espacio métrico M , como el número real extendido ²

$$\text{diam}(S) = \sup \{d(x, y); x, y \in S\}.$$

S es acotado si y sólo si $\text{diam}(S) < \infty$.

Proposición 0.3.3. *Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico es acotada.*

Demostración. Sean (x_n) una sucesión de Cauchy en (M, d) . Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < 1;$$

en particular,

$$n > n_0 \implies d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

Si $\frac{\alpha}{2} = \max \{1, d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\}$, entonces se tiene que $d(x_n, x_{n_0}) \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposición 0.3.4. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy y por consiguiente, acotada.*

Definición 0.3.4. Se dice que un espacio métrico (M, d) es *completo* cuando toda sucesión de Cauchy en (M, d) es convergente hacia algún punto de M . En este caso se dice también que la métrica d es *completa* en M .

Un subconjunto S de un espacio métrico M se dice completo, si S dotado de la métrica inducida por la de M (ver ejemplo 0.1.2) es un espacio métrico completo.

Ejemplo 0.3.1.

1. Todo subconjunto completo de un espacio métrico es cerrado. En efecto, sean (M, d) un espacio métrico y S un subconjunto completo de M . Si $x \in \overline{S}$, entonces conforme a la observación 0.3.1.2, existe una sucesión (x_n) de elementos de S convergente hacia x . Por la proposición 0.3.4, la sucesión (x_n) es de Cauchy en S y por consiguiente convergente hacia algún punto $x_1 \in S$. Por la unicidad del límite, $x = x_1 \in S$. Por lo tanto, S es cerrado.

²o sea, eventualmente puede ser $+\infty$

2. Recíprocamente si (M, d) es un espacio métrico completo, entonces todo subconjunto cerrado S de M es completo. En efecto, si (x_n) es una sucesión de Cauchy en S , entonces también es de Cauchy en M y por lo tanto converge hacia algún punto $x \in M$. De acuerdo con la observación 0,3,1,2), $x \in \overline{S} = S$. Por lo tanto, S es completo.

Ejemplo 0.3.2. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ es un espacio métrico completo. Ahora bien, conforme al ejercicio 1 de la sección 2, la métrica en $\mathbb{R}$, $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_1(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|,$$

es equivalente a la usual de $\mathbb{R}$, pero para esta métrica d_1 , $\mathbb{R}$ no es completo. En efecto, la sucesión (n) es de Cauchy en $\mathbb{R}$ según la métrica d_1 , pero no es convergente a ningún punto de $\mathbb{R}$ según esta métrica, pues en caso contrario, conforme al corolario 0,3,2, la sucesión (n) sería convergente hacia algún punto de $\mathbb{R}$ según la métrica usual, lo que es absurdo.

Así, dos métricas pueden ser equivalentes, siendo una de ellas completa y la otra no. En particular, un espacio métrico completo puede ser homeomorfo a otro no completo (en otras palabras, la propiedad de que un espacio métrico sea completo no es topológica). Otro ejemplo de este hecho nos lo dan la recta $\mathbb{R}$ y el intervalo abierto $(0, 1)$ con la métrica usual. Sin embargo, si dos espacios son *uniformemente homeomorfos* (esto es, si existe una biyección de uno de ellos sobre el otro que es uniformemente continua (ver la definición siguiente), así como su inversa) y si uno de ellos es completo, necesariamente el otro también lo es. Esto se sigue del hecho de que la imagen de una sucesión de Cauchy por una aplicación uniformemente continua, es una sucesión de Cauchy. La noción de aplicación uniformemente continua es como sigue:

Definición 0.3.5. Sean $(M, d_1), (N, d_2)$ dos espacios métricos. Se dice que una aplicación $f : (M, d_1) \longrightarrow (N, d_2)$ es *uniformemente continua* cuando para todo $\epsilon > 0$ dado, existe un $\delta > 0$ correspondiente con la propiedad de que si x, y son dos puntos cualesquiera de M tales que $d_1(x, y) < \delta$, entonces se tiene $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Definición 0.3.6. Sean $(M, d_1), (N, d_2)$ dos espacios métricos.

1. Se dice que una aplicación $f : (M, d_1) \longrightarrow (N, d_2)$ es una *inmersión*

isométrica si preserva distancias, esto es, si

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y),$$

para todo $x \in M$ y todo $y \in M$.

2. Una aplicación $f : (M, d_1) \longrightarrow (N, d_2)$ se llama una *isometría* si es una inmersión isométrica sobreyectiva. En este caso se dice que los espacios son *isométricos*.

Observación 0.3.3.

1. Conviene observar que toda inmersión isométrica es necesariamente una aplicación uniformemente continua e inyectiva.
2. Sean X un conjunto cualquiera, (M, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow M$ una aplicación inyectiva. Entonces la función $d_f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_f(x, y) = d(f(x), f(y)),$$

es una métrica en X , llamada *métrica inducida* por f en X . Si X se dota de esta métrica, f se torna una inmersión isométrica.

Definición 0.3.7. Un *completado* de un espacio métrico M es un espacio métrico completo $\widehat{M}$ para el cual existe una inmersión isométrica $f : M \rightarrow \widehat{M}$ tal que $f(M)$ es denso en $\widehat{M}$ (esto es, $\overline{f(M)} = \widehat{M}$).

En la práctica, M se iguala al subconjunto $f(M)$ de $\widehat{M}$. Así, un completado de un espacio métrico M es un espacio métrico completo $\widehat{M}$ en el cual M es denso.

Ejemplo 0.3.3. Sean $(0, 2\pi)$ y $[0, 2\pi]$ los intervalos abierto y cerrado, respectivamente, con extremos 0 y 2π , con la métrica usual. Entonces $[0, 2\pi]$ es un completado de $(0, 2\pi)$, ya que la función inclusión $i : (0, 2\pi) \longrightarrow [0, 2\pi]$, $i(x) = x$, es una inmersión isométrica e $i(0, 2\pi)$ es denso en $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 0.3.4. Sea $(0, 2\pi)$ el intervalo abierto de $\mathbb{R}$ con extremos 0, 2π . Se denota por S^1 el círculo unitario de $\mathbb{R}^2$, esto es,

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

En $\mathbb{R}^2$ consideramos la métrica euclidiana:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

en donde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ son elementos de $\mathbb{R}^2$. S^1 con la métrica inducida por ρ es un espacio métrico completo (ver ejemplo 0,3,1,2). La función $f : (0, 2\pi) \longrightarrow S^1$, dada por $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, es inyectiva, luego (por la observación 0,3,3,2), la función $d_f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} d_f(\theta_1, \theta_2) &= \rho(f(\theta_1), f(\theta_2)) \\ &= \sqrt{(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2}, \end{aligned}$$

es una métrica en $(0, 2\pi)$ y la aplicación $f : ((0, 2\pi), d_f) \longrightarrow (S^1, \rho)$ es una inmersión isométrica. Ahora bien, $f(0, 2\pi) = S^1 - \{(1, 0)\}$ es denso en S^1 . Se concluye que el espacio métrico (S^1, ρ) es un completado del espacio métrico $((0, 2\pi), d_f)$, esto es,

$$((0, 2\pi), d_f)^\wedge = (S^1, \rho)$$

Teorema 0.3.1. *Todo espacio métrico posee un completado.*

Demostración. Sea (M, d) un espacio métrico cualquiera. Denotemos por S el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en (M, d) . Definimos en S la siguiente relación $\sim$ de equivalencia:

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Sea $\widehat{M} = S / \sim$ el conjunto de todas las clases de equivalencia de los elementos de S . Se define una métrica $\widehat{d}$ en $\widehat{M}$ de la siguiente manera: Para $\dot{x}, \dot{y}$ dos elementos de $\widehat{M}$, si $(x_n), (y_n)$ son elementos de S representantes de las clases $\dot{x}, \dot{y}$, respectivamente, se define

$$\widehat{d}(\dot{x}, \dot{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Se tienen las siguientes propiedades:

1. El límite en el lado derecho efectivamente existe. En efecto, sean $(x_n), (y_n)$ dos elementos de S . Entonces, para m, n enteros positivos,

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

o sea,

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

Análogamente,

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

de donde se sigue que

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

De esta desigualdad, junto con la hipótesis de que $(x_n), (y_n)$ son sucesiones de Cauchy en M , se sigue que $(d(x_n, y_n))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por consiguiente, convergente. Por lo tanto la afirmación está demostrada.

2. $\widehat{d}$ está bien definida, esto es, la definición de $\widehat{d}(\dot{x}, \dot{y})$ no depende de los representantes $(x_n), (y_n)$ de las clases $\dot{x}, \dot{y}$, respectivamente. En efecto, sean también $(u_n), (v_n)$ representantes de las clases $\dot{x}, \dot{y}$, respectivamente. Se tiene la siguiente desigualdad:

$$d(u_n, v_n) \leq d(u_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, v_n).$$

Tomando límites a ambos lados de esta desigualdad y teniendo en cuenta que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, x_n) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y_n, v_n)$, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Análogamente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n),$$

y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$, lo que demuestra la afirmación.

3. $\widehat{d}$ es una métrica en $\widehat{M}$. Esto es fácil de verificar y lo dejamos al lector.

Demostremos ahora que M es isométrico a un subconjunto denso de $\widehat{M}$ y que $\widehat{M}$ es completo, de donde $\widehat{M}$ es entonces un completado de M . En efecto, definimos la aplicación $f : M \longrightarrow \widehat{M}$, por $f(x) = \widehat{x}$, en donde para cada $x \in M$, $\widehat{x}$ denota la clase de equivalencia de la sucesión (de Cauchy) (x_n) tal que $x_n = x$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Resulta inmediatamente que f es

una isometría de M sobre el subconjunto $M_0 = f(M) = \{\widehat{x}; x \in M\}$ de $\widehat{M}$. M_0 es un subconjunto denso en $\widehat{M}$. En efecto, sea $\dot{x} \in \widehat{M}$ cualquiera y escojamos una sucesión (x_n) en S que represente a la clase $\dot{x}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $\widehat{x}_n$ la imagen por f del elemento $x_n \in M$, esto es, $\widehat{x}_n$ es la clase de la sucesión (y_m) tal que $y_m = x_n$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que

$$\widehat{d}(\dot{x}, \widehat{x}_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n),$$

y como por otra parte (x_n) es de Cauchy en M , resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\dot{x}, \widehat{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$$

Por lo tanto M_0 es denso en $\widehat{M}$.

Finalmente demostraremos que $\widehat{M}$ es completo. En efecto, sea $(\dot{x}_n)$ una sucesión de Cauchy en $\widehat{M}$. Como M_0 es denso en $\widehat{M}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\widehat{y}_n \in M_0$ tal que $d(\dot{x}_n, \widehat{y}_n) \leq \frac{1}{n}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &= \widehat{d}(\widehat{y}_n, \widehat{y}_m) \\ &\leq \widehat{d}(\widehat{y}_n, \dot{x}_n) + \widehat{d}(\dot{x}_n, \dot{x}_m) + \widehat{d}(\dot{x}_m, \widehat{y}_m) \\ &< \frac{1}{n} + d(\dot{x}_n, \dot{x}_m) + \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

y siendo la sucesión $(\dot{x}_n)$ de Cauchy en $\widehat{M}$, se sigue que (y_n) es una sucesión de Cauchy en M y por consiguiente define un elemento $\dot{x} \in \widehat{M}$. La sucesión $(\dot{x}_n)$ converge a $\dot{x}$ en $\widehat{M}$. En efecto, en la demostración de que M_0 es denso en $\widehat{M}$ vimos que la sucesión $(\widehat{y}_n)$ converge a $\dot{x}$ en $\widehat{M}$ y como por otra parte,

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\dot{x}_n, \dot{x}) &\leq \widehat{d}(\dot{x}_n, \widehat{y}_n) + \widehat{d}(\widehat{y}_n, \dot{x}) \\ &< \frac{1}{n} + \widehat{d}(\widehat{y}_n, \dot{x}), \end{aligned}$$

se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(\dot{x}_n, \dot{x}) = 0$ y por consiguiente, la afirmación. $\square$

Observación 0.3.4. Un espacio métrico puede tener más de un completado. En efecto, consideremos los intervalos $(0, 2\pi)$, $[0, 2\pi]$ y $[2\pi, 4\pi]$, con la métrica usual. La función

$$\begin{aligned} f : (0, 2\pi) &\longrightarrow [2\pi, 4\pi], \\ \theta &\longmapsto \theta + 2\pi \end{aligned}$$

es una inmersión isométrica y $f(0, 2\pi) = (2\pi, 4\pi)$ es denso en $[2\pi, 4\pi]$. Por consiguiente $[0, 2\pi]$ y $[2\pi, 4\pi]$ son completados del mismo espacio métrico $(0, 2\pi)$ (ver ejemplo 0,3,3). Sin embargo, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 0.3.5. *Dos completados cualesquiera de un mismo espacio métrico son isométricos.*

Demostración. Sean $(\widehat{M}, \widehat{d}), (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ completados de un mismo espacio métrico (M, d) y $f : M \longrightarrow \widehat{M}, g : M \longrightarrow \widetilde{M}$ inmersiones isométricas tales que $f(M)$ y $g(M)$ son densos en $\widehat{M}$ y $\widetilde{M}$, respectivamente. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_0 : f(M) &\longrightarrow \widetilde{M} \\ f(x) &\longmapsto \phi_0(f(x)) = g(x) \quad (x \in M), \end{aligned}$$

la cual es una inmersión isométrica. En efecto, por la definición de ϕ_0 y en virtud de que g y f son inmersiones isométricas, se tiene que

$$\widetilde{d}(\phi_0(f(x)), \phi_0(f(y))) = \widetilde{d}(g(x), g(y)) = d(x, y) = \widehat{d}(f(x), f(y)),$$

para todo $x \in M$ y todo $y \in M$, o sea,

$$\widetilde{d}(\phi_0(z_1), \phi_0(z_2)) = \widehat{d}(z_1, z_2), \quad (*)$$

para todo $z_1 \in f(M)$ y todo $z_2 \in f(M)$, de donde ϕ_0 es una inmersión isométrica.

Como $f(M)$ es denso en $\widehat{M}$, de acuerdo con el ejercicio 7 existe una (única) aplicación continua $\phi : \widehat{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ que extiende a ϕ_0 , esto es, $\phi(z) = \phi_0(z)$ para todo $z \in f(M)$. La aplicación ϕ es una isometría. En efecto, por el mismo ejercicio 7, si $z_1, z_2 \in \widehat{M}$ y $(x_n), (y_n)$ son sucesiones en $f(M)$ tales que $x_n \rightarrow z_1, y_n \rightarrow z_2$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_0(x_n); \\ \phi(z_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_0(y_n), \end{aligned}$$

de donde, usando la continuidad de las métricas $\widetilde{d}, \widehat{d}$ y la igualdad $(*)$, se

sigue que

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(\phi(z_1), \phi(z_2)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{d}(\phi_0(x_n), \phi_0(y_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(x_n, y_n) \\ &= \widehat{d}(z_1, z_2),\end{aligned}$$

y por lo tanto, ϕ es una inmersión isométrica. Ahora bien, como $\widehat{M}$ es completo, $\phi(\widehat{M})$ también es completo, en particular es un subconjunto cerrado de $\widetilde{M}$ (ver ejemplo 0,3,1,1) y como

$$\phi(\widehat{M}) \supset \phi_0(f(M)) = g(M),$$

entonces,

$$\phi(\widehat{M}) = \overline{\phi(\widehat{M})} \supset \overline{g(M)} = \widetilde{M},$$

de donde $\phi(\widehat{M}) = \widetilde{M}$. Por lo tanto ϕ es una isometría. $\square$

Observación 0.3.5.

1. Con las notaciones de la demostración anterior, la isometría ϕ satisface la igualdad $\phi \circ f = g$ y el lector puede fácilmente verificar que sujeta a esta igualdad, la ϕ es única.
2. Dos espacios métricos pueden ser homeomorfos sin que sus completados lo sean. En efecto, indiquemos por d la métrica usual en el intervalo $(0, 2\pi)$: $d(\theta_1, \theta_2) = |\theta_1 - \theta_2|$. La aplicación

$$\begin{aligned}f : ((0, 2\pi), d) &\longrightarrow (S^1 - \{1, 0\}, \rho) \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta),\end{aligned}$$

(en donde ρ es como en el ejemplo 0,3,4) es un homeomorfismo, y siendo d_f como en el ejemplo 0,3,4, la aplicación

$$\begin{aligned}f : ((0, 2\pi), d_f) &\longrightarrow (S^1 - \{1, 0\}, \rho) \\ \theta &\longmapsto f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta),\end{aligned}$$

es una isometría, en particular un homeomorfismo. Por consiguiente la función identidad

$$id : ((0, 2\pi), d) \longrightarrow ((0, 2\pi), d_f)$$

es un homeomorfismo. De acuerdo con los ejemplos 0,3,3 y 0,3,4 se tiene que

$$((0, 2\pi), d)^\wedge = ([0, 2\pi], d) \quad \text{y} \quad ((0, 2\pi), d_f)^\wedge = (S^1, \rho).$$

Ahora bien, los espacios $([0, 2\pi], d)$ y (S^1, ρ) no son homeomorfos (¿por qué?).

Otro ejemplo simple de este hecho está dado por la recta y el intervalo abierto $(0, 2\pi)$, con las métricas usuales.

Definición 0.3.8. Sea X un espacio topológico.

1. Un subconjunto E de X se llama *raro* si $\text{int}(\overline{E}) = \emptyset$.
2. Se dice que un subconjunto E de X es *magro* o *de primera categoría* en X , cuando es unión enumerable, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, de subconjuntos raros E_n de X .
3. Un subconjunto E de X que no es magro (en X) se llama *de segunda categoría*. Más explícitamente, un subconjunto E de X es de segunda categoría si y sólo si, dada una sucesión (E_n) de subconjuntos de X tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces existe un n_0 tal que $\text{int}(\overline{E_{n_0}}) \neq \emptyset$.

Observación 0.3.6. Para que un subconjunto E de X sea magro (en X) es necesario y suficiente que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, en donde para cada n , F_n es un subconjunto cerrado de X con $\text{int}(F_n) = \emptyset$. En efecto, obviamente la condición es necesaria. Recíprocamente, supongamos que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, con F_n cerrado en X e $\text{int}(F_n) = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E \cap F_n}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\text{int}(E \cap F_n) \subset \text{int}(F_n) = \emptyset;$$

por lo tanto E es magro en X , luego la condición también es suficiente.

Definición 0.3.9. Un espacio topológico se llama *espacio de Baire* cuando todo subconjunto magro en X tiene interior vacío, esto es, si todo subconjunto T de X tal que $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, con $\text{int}(\overline{E_n}) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tiene interior vacío.

Si X es un espacio de Baire y (F_n) es una sucesión de subconjuntos de X tal que cada F_n es un conjunto cerrado en X con interior vacío, entonces la

unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es un conjunto con interior vacío. Recíprocamente, supongamos que X es un espacio topológico con la propiedad de que la unión de cualquier sucesión de subconjuntos cerrados con interior vacío es un conjunto con interior vacío. Entonces X es un espacio de Baire. En efecto, sea E un subconjunto magro en X , y sea (E_n) una sucesión de subconjuntos de X tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y para cada n , $\text{int}(\overline{E_n}) = \emptyset$. Si $F_n = \overline{E_n}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces (F_n) es una sucesión de subconjuntos cerrados de X con $\text{int}(F_n) = \emptyset$, y $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Por hipótesis, $\text{int}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \emptyset$, luego $\text{int}(E) = \emptyset$. Por consiguiente, X es un espacio de Baire. Así, hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 0.3.6. *Para que un espacio topológico X sea un espacio de Baire es necesario y suficiente que para cada sucesión (F_n) de subconjuntos cerrados de X con interior vacío, la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ sea un conjunto con interior vacío.*

Ya que un subconjunto de un espacio topológico tiene interior vacío si y sólo si su complemento es denso, la proposición 0.3.6 es equivalente a la

Proposición 0.3.7. *Un espacio topológico X es un espacio de Baire si y sólo si la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ de toda sucesión (A_n) de subconjuntos abiertos y densos en X , es un subconjunto denso en X .*

Proposición 0.3.8. *Todo subconjunto abierto de un espacio de Baire es un espacio de Baire.*

Demostración. Sean A un subconjunto abierto de un espacio de Baire X y (A_n) una sucesión de abiertos densos en A . Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $B_n = A_n \cup \overline{A}^c$ es un abierto en X . Supongamos ya demostrado que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ es denso en X ; de aquí se concluye (ver la observación 0,3,7 al final de la demostración), que el conjunto

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right) \cap A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

es denso en A , que es lo que queríamos demostrar. Ahora bien, por la proposición 0,3,7 para ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ es denso en X , basta mostrar que cada conjunto B_n es denso en X . En efecto, Sea U un abierto no vacío en X ; existen dos posibilidades:

1. $U \cap A \neq \emptyset$. En este caso $U \cap A$ es un abierto no vacío de A y como A_n es denso en A , entonces $(U \cap A) \cap A_n \neq \emptyset$, y en particular $U \cap A_n \neq \emptyset$, luego $U \cap B_n \neq \emptyset$.
2. $U \cap A = \emptyset$. En este caso se tiene que $U \cap \text{fr}(A^c) = \emptyset$ y que $U \subset A^c = \text{int}(A^c) \cup \text{fr}(A^c)$, de donde se sigue que $U \subset \text{int}(A^c) = \overline{A}^c$. Por consiguiente $U \cap B_n \neq \emptyset$.

De 1 y 2 se concluye que cada B_n es denso en X . $\square$

Observación 0.3.7. Si B es denso en X y A es abierto en X , entonces $B \cap A$ es denso en A . En efecto, sea U un abierto no vacío en A ; entonces U es abierto en X y por consiguiente $U \cap B \neq \emptyset$. Además como $U \subset A$, entonces se tiene la igualdad

$$U \cap (B \cap A) = U \cap B \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $B \cap A$ es denso en A .

Teorema 0.3.2 (Baire). *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea M un espacio métrico completo y sean (F_n) una sucesión de subconjuntos cerrados de M con $\text{int}(F_n) = \emptyset, n \in \mathbb{N}$, y $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Demostremos que $\text{int}(T) = \emptyset$ o, equivalentemente, que T^c es denso en M . En efecto, sea A cualquier abierto no vacío en M . Como F_1^c es abierto y denso en M , entonces $A \cap F_1^c$ es un abierto no vacío en M , luego existe una bola abierta $B_{\epsilon_1}(x_1)$ con $\epsilon_1 < 1$ tal que $\overline{B_{\epsilon_1}(x_1)} \subset A \cap F_1^c$. Análogamente, como F_2^c es abierto y denso en M , entonces $B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_2^c$ es un abierto no vacío en M , luego existe una bola abierta $B_{\epsilon_2}(x_2)$ con $\epsilon_2 < \frac{1}{2}$ tal que $\overline{B_{\epsilon_2}(x_2)} \subset B_{\epsilon_1}(x_1) \cap F_2^c$. Continuando en esta forma, encontramos una sucesión $(B_{\epsilon_n}(x_n))$ de bolas abiertas tal que

$$B_{\epsilon_1}(x_1) \supset \overline{B_{\epsilon_2}(x_2)} \supset \dots \supset B_{\epsilon_n}(x_n) \supset \overline{B_{\epsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \supset \dots,$$

y para cada $n, \epsilon_n < \frac{1}{n}$ y $\overline{B_{\epsilon_n}(x_n)} \subset F_n^c$. La sucesión (x_n) es de Cauchy. En efecto, dado $\epsilon > 0$, escogemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < \epsilon$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} m, n \geq n_0 &\implies x_n, x_m \in B_{\epsilon_{n_0}}(x_{n_0}) \\ &\implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_m) < 2\epsilon_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \epsilon \end{aligned}$$

Siendo M completo, existe $x \in M$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como para $p > n$ se tiene $x_p \in B_{\epsilon_n}(x_n)$, se sigue que $x \in \overline{B_{\epsilon_n}(x_n)} \subset F_n^{\mathbb{C}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y, $x \in \overline{B_{\epsilon_1}(x_1)} \subset A \cap F_1^{\mathbb{C}}$. Por consiguiente $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^{\mathbb{C}} = T^{\mathbb{C}}$, y, $x \in A$ de donde $A \cap T^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$. $\square$

Corolario 0.3.3. *Si M es un espacio métrico completo y (F_n) una sucesión de subconjuntos cerrados tal que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.*

Observación 0.3.8. Antes de dar algunas aplicaciones del teorema de Baire, recordemos algunos resultados sobre la oscilación de una aplicación. Sean M, N espacios métricos y $f : M \rightarrow N$ una aplicación. Por simplicidad, se denotará por d la métrica tanto en M como en N . Se llama *oscilación* de f en el punto $x \in M$ al número real extendido $\omega_f(x)$ definido por

$$\omega_f(x) = \inf \{ \text{diam}[f(B_\delta(x))]; \delta > 0 \}$$

en donde $\text{diam}(S)$ denota el diámetro del conjunto S (ver observación 2). La función $\omega_f : x \in M \mapsto \omega_f(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, tiene las siguientes propiedades:

1. *Para que f sea continua en $x_0 \in M$ es necesario y suficiente que $\omega_f(x_0) = 0$.*
2. *Para todo $\alpha < \infty$, si $\omega_f(x_0) < \alpha$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\omega_f(x) < \alpha$, cualquiera que sea $x \in B_\delta(x_0)$. Consecuentemente el conjunto $A_\alpha = \{x \in M; \omega_f(x) < \alpha\}$, es abierto en M , para todo $\alpha < \infty$.*

Demostremos la afirmación 1. En efecto, supongamos que f es continua en x_0 y sea $\epsilon > 0$ cualquiera. Existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in M$ y $d(x, x_0) < \delta$, entonces $d(f(x), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{4}$, esto es,

$$y \in f(B_\delta(x_0)) \implies d(y, f(x_0)) < \frac{\epsilon}{4},$$

luego,

$$y_1, y_2 \in f(B_\delta(x_0)) \implies d(y_1, y_2) \leq d(y_1, f(x_0)) + d(y_2, f(x_0)) < \frac{\epsilon}{2},$$

de lo cual resulta que $\text{diam}[f(B_\delta(x_0))] < \epsilon$, de donde $\omega_f(x_0) < \epsilon$, cualquiera que sea $\epsilon > 0$. Se sigue que $\omega_f(x_0) = 0$. Por consiguiente la condición es

necesaria. Recíprocamente, supongamos que $\omega_f(x_0) = 0$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\text{diam}[f(B_\delta(x_0))] < \epsilon$, de donde resulta que

$$x \in M, \quad d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Por consiguiente, f es continua en x_0 , luego la condición también es suficiente.

Demostremos ahora la afirmación 2. Sean $\alpha < \infty$ y $x_0 \in M$ tales que $\omega_f(x_0) < \alpha$; entonces, existe $\delta > 0$ tal que $\text{diam}[f(B_\delta(x_0))] < \alpha$. Demostremos que para todo $x \in B_\delta(x_0)$ se tiene $\omega_f(x) < \alpha$. En efecto sean $x \in B_\delta(x_0)$ y $\epsilon = \delta - d(x, x_0) > 0$; para $x_1, x_2 \in B_\epsilon(x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} d(x_1, x) &< \epsilon, \quad d(x_2, x) < \epsilon \\ \implies d(x_1, x_0) &< \delta, \quad d(x_2, x_0) < \delta \\ \implies f(x_1), f(x_2) &\in f(B_\delta(x_0)) \\ \implies d(f(x_1), f(x_2)) &\leq \text{diam}[f(B_\delta(x_0))]. \end{aligned}$$

Se sigue que,

$$\text{diam}[f(B_\epsilon(x))] \leq \text{diam}[f(B_\delta(x_0))] < \alpha,$$

y por consiguiente $\omega_f(x) < \alpha$, cualquiera que sea $x \in B_\delta(x_0)$.

Ejemplo 0.3.5. Sean M, N espacios métricos, siendo M completo, $f : M \longrightarrow N$ una aplicación, y $f_n : M \longrightarrow N, n \in \mathbb{N}$, una sucesión de aplicaciones continuas, convergente puntualmente a la aplicación f , esto es, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, para cada $x \in M$. Entonces, el conjunto de los puntos de M en donde f es discontinua tiene interior vacío o, equivalentemente, f es continua sobre un conjunto denso en M . En efecto, en virtud de la observación 0,3,8,1, si D es el conjunto de puntos de discontinuidad de f , entonces

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

en donde para cada $n, F_n = \{x; \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ que es, por la observación 0.3.8.2, un subconjunto cerrado de M . Si demostramos que $\text{int}(F_n) = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el teorema de Baire, $\text{int}(D) = \emptyset$, esto, es, D^c , el conjunto de puntos de M en que f es continua, es un subconjunto denso en M , de donde se sigue nuestra afirmación.

Demostremos entonces que para todo $\epsilon > 0$ el conjunto (cerrado) $F_\epsilon = \{x; \omega_f(x) \geq \epsilon\}$ tiene interior vacío, o sea que toda bola cerrada de

M intersecta al complemento, F_ϵ^c , de F_ϵ (recuérdese que toda bola abierta contiene una bola cerrada, y viceversa). En efecto, sean B una bola cerrada en M y

$$E_n = \bigcap_{i,j \geq n}^\infty \left\{ x \in M; \quad d(f_i(x), f_j(x)) \leq \frac{\epsilon}{5} \right\},$$

$n = 1, 2, \dots$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es un conjunto cerrado, pues es la intersección de conjuntos cerrados. Por otra parte, como para cada $x \in M$, la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy, ya que es convergente, entonces

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{n=1}^\infty E_n, & \text{y por consiguiente} \\ B &= \bigcup_{n=1}^\infty (E_n \cap B). \end{aligned}$$

Ahora bien, $\text{int}(B) \neq \emptyset$ y, para cada n , $E_n \cap B$ es cerrado en M ; entonces, como M es completo, el teorema de Baire implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(E_{n_0} \cap B) \neq \emptyset$, esto es, existe una bola abierta $B_\delta(x_0) \subset E_{n_0} \cap B$. Se sigue que para todo $x \in B_\delta(x_0)$ y todo par de índices $i, j \geq n_0$,

$$d(f_i(x), f_j(x)) \leq \frac{\epsilon}{5},$$

y por lo tanto haciendo $j = n_0$ e $i \rightarrow \infty$, se tiene que

$$x \in B_\delta(x_0) \implies d(f(x), f_{n_0}(x)) \leq \frac{\epsilon}{5}.$$

Demostremos que $\omega_f(x) < \epsilon$ si $x \in B_\delta(x_0)$, de donde, como $B_\delta(x_0) \subset B$, se seguirá que $B \cap F_\epsilon^c \neq \emptyset$. En efecto, sea $x \in B_\delta(x_0)$. Por la continuidad de f_{n_0} en x , existe una bola abierta $B_\eta(x) \subset B_\delta(x_0)$ tal que

$$y \in B_\eta(x) \implies d(f_{n_0}(y), f_{n_0}(x)) < \frac{\epsilon}{5}.$$

Por lo tanto,

$$y \in B_\eta(x) \implies d(f(y), f_{n_0}(x)) \leq d(f(y), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f_{n_0}(x)) < \frac{2\epsilon}{5},$$

luego,

$$y_1, y_2 \in B_\eta(x) \implies d(f(y_1), f(y_2)) \leq d(f(y_1), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f(y_2)) < \frac{4\epsilon}{5},$$

de donde se sigue que $\text{diam}[f(B_\eta(x))] \leq \frac{4\epsilon}{5} < \epsilon$, y por consiguiente $\omega_f(x) < \epsilon$, esto es $x \in F_\epsilon^{\mathbb{C}}$, cualquiera que sea $x \in B_\delta(x_0)$.

Ejemplo 0.3.6. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función y $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones holomorfas que converge puntualmente a f , esto es, $f_n(z) \rightarrow f(z)$ para cada $z \in \Omega$. Si V es el conjunto de los puntos de Ω en donde f es holomorfa, entonces V es un conjunto (abierto) denso en Ω . En efecto, por su propia definición, V es un subconjunto abierto de Ω . Para mostrar que es denso en Ω , hay que demostrar que todo abierto en Ω intersecta a V . Ahora bien, como todo abierto en Ω es un abierto en $\mathbb{C}$ contenido en Ω , y como todo abierto en $\mathbb{C}$ contiene un disco abierto, el cual a su vez contiene un disco cerrado, entonces basta mostrar que cualquier disco cerrado contenido en Ω intersecta a V .

En efecto, sea B un disco cerrado en $\mathbb{C}$, contenido en Ω y

$$F_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{z \in \Omega; |f_n(z)| \leq k\},$$

$k = 1, 2, \dots$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, F_k es un subconjunto cerrado de Ω . Por otra parte, como para cada $z \in \Omega$, la sucesión $(f_n(z))$ es convergente, luego acotada, entonces

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

de donde

$$B = \Omega \cap B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap B).$$

Ahora bien, $\text{int}_\Omega(B) = \text{int}(B) \neq \emptyset$ (interior de B relativo a Ω), y para cada $k \in \mathbb{N}$, $F_k \cap B$ es subconjunto cerrado de Ω ; entonces, como Ω es un espacio de Baire (Teorema 0,3,2), existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}_\Omega(F_{k_0} \cap B) \neq \emptyset$, y por consiguiente $\text{int}(F_{k_0} \cap B) \neq \emptyset$ (pues Ω es abierto en $\mathbb{C}$), esto es, existe un disco abierto en $\mathbb{C}$, $B_\delta(z_0) \subset F_{k_0} \cap B$. Por consiguiente, $|f_n(z)| \leq k_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in K$, cualquiera que sea el compacto³ $K \subset B_\delta(z_0)$. Luego, por el teorema de Montel ([1], teorema 12, sección 4, cap 5, 6 ó [23], teorema 14.6) existe una subsucesión (f_{n_i}) de f_n que converge a alguna función g definida y holomorfa en $B_\delta(z_0)$, uniformemente sobre los compactos

³La definición del espacio topológico compacto se encuentra en la sección 4

de $B_\delta(z_0)$. Por otra parte, como $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(z) = f(z)$, para cada $z \in B_\delta(z_0)$, entonces $f(z) = g(z)$, para $z \in B_\delta(z_0)$, y por consiguiente f es holomorfa en $B_\delta(z_0)$, de donde $B_\delta(z_0) \subset V$. Como también $B_\delta(z_0) \subset B$, entonces $B \cap V \neq \emptyset$, y se concluye que V es denso en Ω .

Observación 0.3.9. Con las notaciones del ejemplo anterior, en realidad la propia sucesión (f_n) converge a f , uniformemente sobre los compactos de $B_\delta(z_0)$. A continuación damos un esbozo de la demostración de este hecho:

1. Sean X un espacio topológico, M un espacio métrico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones $f : X \longrightarrow M$.

- a) Se dice que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en un punto $x_0 \in X$ cuando para todo $\epsilon > 0$, existe una vecindad V_{x_0} de x_0 tal que,

$$y \in V_{x_0} \implies d(f(y), f(x_0)) < \epsilon,$$

para cualquier aplicación $f \in \mathcal{F}$.

- b) Se dice que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua (en X) cuando es equicontinua en cada punto de X .
- c) Mostraremos en el ejemplo 0,4,5, que dadas una aplicación $f : X \longrightarrow M$ y una sucesión $f_n : X \longrightarrow M$, de aplicaciones equicontinuas que converge puntualmente a f , se tiene que f es continua y la convergencia es uniforme sobre los subconjuntos compactos de X , esto es, dados cualquier compacto $K \subset X$ y $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \epsilon,$$

cualquiera que sea $x \in K$.

2. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas en Ω tal que para cada compacto $K \subset \Omega$, existe $\alpha_K > 0$ (dependiente de K) tal que $|f(z)| \leq \alpha_K$, para toda $f \in \mathcal{F}$, y todo $z \in K$ (una tal familia se llama *acotada en el interior de Ω*). Entonces la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua. Para la demostración de este hecho, remitimos al lector a [10], ejemplo 2, sección 9, cap. 3.

Ahora bien, en el ejemplo 0,3,6 se demostró que la sucesión (f_n) es *acotada en el interior de $B_\delta(z_0)$* , luego las restricciones de las funciones f_n , $n \in \mathbb{N}$,

a la bola $B_\delta(z_0)$ forman una sucesión equicontinua en $B_\delta(z_0)$ y como (f_n) converge puntualmente a f , entonces c) implica que (f_n) converge a f uniformemente sobre los compactos contenidos en $B_\delta(z_0)$.

Ejercicios de la sección 0.3

1. a) Demuestre que para cualquier subconjunto A de un espacio métrico M , se tiene que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.
 b) Si A y B son subconjuntos acotados no vacíos de un espacio métrico M , demuestre que $A \cup B$ es acotado y

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B),$$

en donde $d(A, B) = \inf \{d(x, y); x \in A, y \in B\}$.

2. Demostrar que la sucesión (x_n) en un espacio métrico M converge a un punto $x_0 \in M$ si y sólo si toda subsucesión de (x_n) posee a su vez una subsucesión convergente al mismo punto x_0 .
3. Supongamos que una sucesión de Cauchy (x_n) en un espacio métrico M posee una subsucesión (x_{n_i}) convergente a un punto $x_0 \in M$. Demostrar que la propia sucesión (x_n) converge a x_0 .
4. Sean $(x_n), (y_n)$ sucesiones de un espacio métrico M tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Demostrar que si (x_n) converge hacia x_0 , entonces (y_n) también converge hacia x_0 .
5. Sean M un espacio métrico completo y (α_n) una sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$. Si una sucesión (x_n) en M es tal que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha_n, n \in \mathbb{N}$, demuestre que la sucesión (x_n) es convergente en M .
6. a) Sea M un espacio métrico. Demuestre que para que un conjunto A sea abierto en M es necesario y suficiente que para toda sucesión (x_n) en M convergente hacia un punto $x_0 \in A$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, para todo $n \geq n_0$.
 b) Sean d_1 y d_2 dos métricas en M . Usando a), demuestre la recíproca del corolario 2 de la proposición 1: si para toda sucesión (x_n) en M y para todo punto $x_0 \in M$, se tiene que las afirmaciones $d_1(x_n, x_0) \rightarrow 0$ y $d_2(x_n, x_0) \rightarrow 0$ son equivalentes, entonces $d_1 \sim d_2$.

7. Sean M, N espacios métricos, siendo N completo, S un subconjunto denso en M , y $f_0 : S \longrightarrow N$ una aplicación uniformemente continua. Demuestre que existe una única extensión continua de f_0 , $f : M \longrightarrow N$, que también es uniformemente continua.
8. (Cantor) Demuestre que para que un espacio métrico M sea completo es necesario y suficiente que para cualquier sucesión decreciente $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ de subconjuntos no vacíos de M tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, se tenga $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$, en donde $x_0 \in M$ es un punto conveniente.
9. Demuestre que un espacio topológico X es un espacio de Baire si y sólo si todo subconjunto abierto no vacío de X es de segunda categoría.
10. Sean X un espacio de Baire y E un conjunto de funciones reales continuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in X$, $E(x) = \{f(x); f \in E\}$ es un conjunto acotado de números reales. Demostrar que existen un subconjunto abierto $U \subset X$ y una constante $\alpha > 0$ tales que $|f(x)| \leq \alpha$, para todo $x \in U$ y todo $f \in E$. (*Sugerencia:* Para $n \in \mathbb{N}$, defina el conjunto $F_n = \bigcap_{f \in E} \{x \in X; |f(x)| \leq n\}$).

0.4. Espacios métricos compactos

Definición 0.4.1. Sean X un espacio topológico y S un subconjunto de X .

1. Un *recubrimiento* de S es una familia $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in I}$ de subconjuntos de X tal que $S \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$. Además, si los elementos de la familia $\mathcal{A}$ son subconjuntos abiertos de X , entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un *recubrimiento abierto* de S .
2. Sea $\mathcal{A} = (A_\lambda)_{\lambda \in I}$ un recubrimiento de S . Un *subrecubrimiento* de $\mathcal{A}$ es cualquier subfamilia $\mathcal{A}' = (A_\lambda)_{\lambda \in J}$ de $\mathcal{A}$ ($J \subset I$) que también es recubrimiento de S .
3. Se dice que X es un espacio *compacto*, si cualquier recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.
4. Un subconjunto $K \subset X$ llámase compacto si K , dotado de la topología inducida por la de X , es un espacio compacto.

Ya que todo abierto de un subconjunto K de X es la intersección de K con un conjunto abierto de X , entonces para que K sea compacto es necesario y suficiente que todo recubrimiento $(V_\lambda)_{\lambda \in I}$ de K por abiertos V_λ de X admita un subrecubrimiento finito.

Se dice que una familia de conjuntos tiene la propiedad de la intersección finita si la intersección de cualquier subfamilia finita es no vacía.

Proposición 0.4.1. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si cualquier familia $(F_\lambda)_{\lambda \in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda$ no vacía*

Demostración. Supongamos que X es compacto y sea $(F_\lambda)_{\lambda \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita. Si $\bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda = \emptyset$, entonces $(F_\lambda^c)_{\lambda \in I}$ es un recubrimiento abierto de X , y, por hipótesis, existe un subrecubrimiento finito $(F_{\lambda_i}^c)_{1 \leq i \leq n}$, $\lambda_i \in I$, $i = 1, 2, \dots, n$, de donde $(F_{\lambda_i})_{1 \leq i \leq n}$ es una subfamilia finita con intersección vacía, lo que es una contradicción. Recíprocamente, supongamos que X tiene la propiedad enunciada, y sea $(V_\lambda)_{\lambda \in I}$ un recubrimiento abierto de X . Entonces $\bigcap_{\lambda \in I} V_\lambda^c = \emptyset$, de donde, por hipótesis, existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en I tales que $\bigcap_{i=1}^n V_{\lambda_i}^c = \emptyset$, o sea $X = \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i}$. Por lo tanto X es compacto. $\square$

Dejamos al lector las demostraciones de las dos proposiciones siguientes:

Proposición 0.4.2. 1. *Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

2. *Si X es un espacio topológico de Hausdorff, entonces todo subconjunto compacto K de X es cerrado.*

3. *Todo espacio topológico compacto y discreto es finito.*

Proposición 0.4.3. *Sean X, Y espacios topológicos y $F : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si K es un subconjunto compacto de X , entonces la imagen de K por F es un subconjunto compacto de Y .*

Proposición 0.4.4. (Weierstrass). *Si X es un espacio topológico compacto y $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $F(x_1) \leq F(x) \leq F(x_2)$, para todo $x \in X$, esto es, F asume sus valores máximo y mínimo en X ; en particular, F es acotada.*

Demostración. Como F es continua, entonces $F(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y por consiguiente cerrado y acotado. Sean

$$\alpha = \inf \{F(x); x \in X\} \quad , \quad \beta = \sup \{F(x); x \in X\}$$

como α y β son puntos adherentes al conjunto $F(X)$, que es cerrado, entonces $\alpha, \beta \in F(X)$, de donde se deduce la proposición. $\square$

En la demostración de la proposición anterior hemos usado el resultado de Análisis, de que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (o más generalmente de $\mathbb{R}^n$) es acotado. Esto aún es válido en cualquier espacio métrico.

Proposición 0.4.5. *Todo subconjunto compacto de un espacio métrico M es acotado. En particular, si el propio M es compacto, entonces es acotado.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto de M . La familia de las bolas abiertas en M , $(B_1(x))_{x \in K}$ con centro en los puntos de K y radio 1, es un recubrimiento abierto de $K : K \subset \bigcup_{x \in K} B_1(x)$, luego, existen $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementos de K tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_1(x_i)$. En virtud del ejercicio 0,3,1.b, se sigue que $\text{diam}(K) < \infty$ y por consiguiente K es acotado. $\square$

Observación 0.4.1. Por las proposiciones 0,4,2,2 y 0,4,5, todo subconjunto compacto de cualquier espacio métrico es cerrado y acotado. En $\mathbb{R}^n$ vale la recíproca: todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es compacto. Sin embargo, esto no es cierto en cualquier espacio métrico. En efecto, sea

$$M = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{R}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

el conjunto (espacio vectorial) de todas las sucesiones sumables de números reales. La función $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|,$$

en donde $x = (x_n), y = (y_n)$, es una métrica en M . Ahora bien, el conjunto $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$, en donde $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ es la sucesión cuyo n -ésimo valor es 1 y cuyos restantes valores son cero, es un subconjunto cerrado y acotado de M , pero no compacto. En efecto, como $d(e_n, e_m) = 2$

si $m \neq n$, entonces S es acotado y ninguna sucesión de elementos de S es de Cauchy. Por lo tanto, el conjunto de puntos de acumulación de S es vacío, pues todo punto de acumulación de un subconjunto de un espacio métrico es el límite de alguna sucesión de puntos dos a dos distintos del conjunto. Se sigue que S es cerrado y acotado. Pero S no es compacto, pues la familia de las bolas abiertas $(B_1(e_n))$ de centro en los elementos de S y radio 1, es un recubrimiento abierto de S que no admite ningún subrecubrimiento finito ya que $B_1(e_n) \cap S = \{e_n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es, cualquier bola $B_1(e_n)$ contiene exactamente un elemento de S .

Definición 0.4.2.

1. Se dice que un espacio métrico M es *precompacto* o *totalmente acotado* si para todo $\epsilon > 0$, existe un recubrimiento finito de M formado por subconjuntos de M de diámetro menor que ϵ .
2. Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico M es precompacto (o totalmente acotado) cuando A , dotado de la métrica inducida por la de M , es un espacio métrico precompacto.

Observación 0.4.2.

1. Como todo subconjunto S de un espacio métrico M , con $\text{diam}(S) < \epsilon$, está contenido en una bola abierta en M de radio $\epsilon > 0$, entonces M es precompacto si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existen elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ en M tales que $M = \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$.
2. Ya que toda bola (abierta) de un subconjunto A de un espacio métrico M es la intersección de A con una bola (abierta) de M , entonces se sigue que A es precompacto si y sólo si dado un $\epsilon > 0$ cualquiera, existen elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ en M tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$.

Si A es precompacto, dado $\epsilon > 0$, los elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de M tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$ pueden ser escogidos en A . En efecto, para $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ existen $x_1, x_2, \dots, x_n$ en M tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$. escogemos $a_i \in A \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces se tiene que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(a_i)$.

3. Si A es un subconjunto precompacto de un espacio métrico y $B \subset A$, entonces B también es precompacto.
4. Evidentemente, todo subconjunto compacto de un espacio métrico es precompacto.

Definición 0.4.3. Si S es un subconjunto no vacío de un espacio métrico (M, d) y $x \in M$, entonces el número real $d(x, S)$, definido por

$$d(x, S) = \inf \{d(x, y); y \in S\},$$

se llama *distancia* del punto x al conjunto S ⁴. Se demuestra fácilmente que $d(x, S) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{S}$.

Proposición 0.4.6. *Todo espacio métrico compacto posee un subconjunto enumerable denso.*

Demostración. Sea M un espacio métrico compacto. Como M es precompacto, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito F_n tal que $d(x, F_n) < \frac{1}{n}$, para cada $x \in M$. El conjunto $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es enumerable, ya que es unión enumerable de conjuntos finitos. D también es denso en M . En efecto, si $x \in M$, como $F_n \subset D$ para todo n , entonces se tiene que $d(x, D) \leq d(x, F_n) \leq \frac{1}{n}$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, luego $d(x, D) = 0$ y por consiguiente $x \in \overline{D}$, cualquiera que sea $x \in M$. Por lo tanto D es un conjunto enumerable denso en M . $\square$

Definición 0.4.4. Se dice que un espacio métrico M es *separable* si posee un subconjunto enumerable denso. Se sigue de la proposición 0,4,6 que todo espacio métrico compacto es separable.

Teorema 0.4.1. *Sea M un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M es compacto.
2. Todo subconjunto infinito de M tiene un punto de acumulación.
3. Toda sucesión en M posee una subsucesión convergente.
4. M es completo y precompacto.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que M es compacto y sea S un subconjunto de M sin puntos de acumulación en M . Se sigue que S es cerrado y discreto. Además, como M es compacto y S es cerrado, entonces S es compacto. Así, S es discreto y compacto, luego finito.

⁴ $d(x, \emptyset) = +\infty$

2) $\Rightarrow$ 3): Sea (x_n) una sucesión en M . Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ es finito, esto es, el conjunto de los valores x_n de la sucesión es finito, entonces $x_n = x_{n_1}$, para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente la sucesión (x_n) tiene una subsucesión convergente en M . Ahora bien, si S es infinito, entonces, por hipótesis, posee un punto de acumulación $x_0 \in M$. Luego, existe una sucesión de elementos de S , dos a dos distintos, que converge a x_0 (ver observación 0,3,1,2). Por consiguiente la sucesión (x_n) admite una subsucesión convergente.

3) $\Rightarrow$ 4):

a) Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en M . Por hipótesis, (x_n) posee una subsucesión convergente en M , luego la propia sucesión (x_n) es convergente en M (ver ejercicio 0,3,3). Por consiguiente M es completo.

b) Mostremos ahora que M es precompacto, esto es, que para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto finito F de M tal que $d(x, F) < \epsilon$, cualquiera que sea $x \in M$. En efecto, supongamos que este no sea el caso; entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo conjunto finito $F \subset M$ podemos hallar $x \in M$ con $d(x, F) \geq \epsilon$. Fijemos $x_1 \in M$. Para $F_1 = \{x_1\}$ existe $x_2 \in M$ tal que $d(x_2, x_1) = d(x_2, F_1) \geq \epsilon$. Para $F_2 = \{x_1, x_2\}$ existe $x_3 \in M$ tal que $d(x_3, F_2) \geq \epsilon$. Prosiguiendo de esta manera, encontramos una sucesión (x_n) en M tal que $d(x_{n+1}, F_n) \geq \epsilon$, en donde $F_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si $n, m \in M$ y $n > m$, entonces

$$d(x_n, x_m) \geq d(x_n, F_{n-1}) \geq \epsilon,$$

ya que $n > m$ implica que $x_m \in F_{n-1}$. Se sigue que (x_n) es una sucesión en M que no admite ninguna subsucesión de Cauchy, y por consiguiente, ninguna convergente.

4) $\Rightarrow$ 1): Supongamos que M es completo y precompacto, pero no compacto. Entonces existe un recubrimiento abierto $(V_\lambda)_{\lambda \in I}$ de M , $M = \bigcup_{\lambda \in I} V_\lambda$, que no admite ningún subrecubrimiento finito. Ahora bien, como M es precompacto, se puede expresar como unión de un número finito de subconjuntos cerrados con diámetro menor que 1. Por lo menos uno de estos subconjuntos, que denotaremos por F_1 , no está contenido en ninguna unión finita de los conjuntos V_λ , $\lambda \in I$. Como F_1 también es precompacto, entonces puede expresarse como una unión finita de subconjuntos cerrados con diámetro menor que $\frac{1}{2}$. Por lo menos uno de estos subconjuntos, que denotaremos por F_2 , no puede ser cubierto con una unión finita de conjuntos V_λ , $\lambda \in I$. Continuando de esta manera, encontramos una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de M ,

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots,$$

con $\text{diam}(F_n) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Como M es completo, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$, para algún punto $x_0 \in M$ (ver ejercicio 0,3,8). Por otra parte, existe $\lambda \in I$ tal que $x_0 \in V_\lambda$ y como V_λ es abierto, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m}}(x_0) \subset V_\lambda$. Ahora bien, como $x_0 \in F_m$ y $\text{diam}(F_m) < \frac{1}{m}$, entonces se tiene que $F_m \subset B_{\frac{1}{m}}(x_0) \subset V_\lambda$; lo que es una contradicción, pues ningún F_n está contenido en ninguna unión finita de conjuntos V_λ , $\lambda \in I$. Por consiguiente d) $\Rightarrow$ a). $\square$

Corolario 0.4.1. *Un espacio métrico es precompacto si y sólo si su completado es compacto.*

Demostración. Sean M un espacio métrico y $\widehat{M}$ su completado. El corolario se deduce inmediatamente de la equivalencia de las afirmaciones 1. y 4. del Teorema 0,4,1, observando que la adherencia de M en $\widehat{M}$ es precisamente $\widehat{M}$. $\square$

Corolario 0.4.2. *Sea M un espacio métrico completo. Un subconjunto $S \subset M$ es precompacto si y sólo si la adherencia de S en M es un conjunto compacto.*

Corolario 0.4.3. *Para que un subconjunto S de un espacio métrico M sea precompacto es necesario y suficiente que la adherencia de S en el completado $\widehat{M}$ de M , sea un subconjunto compacto de $\widehat{M}$.*

Definición 0.4.5. Sea M un espacio métrico. Se dice que un subconjunto S de M , es *relativamente compacto* si $\overline{S}$, la adherencia de S en M , es un subconjunto compacto de M (esto es, toda sucesión de elementos de S posee una subsucesión convergente a algún punto de M , el cual no necesariamente está en S).

Observación 0.4.3.

1. Evidentemente, en cualquier espacio métrico M , todo subconjunto relativamente compacto de M es precompacto. Sin embargo, en general la recíproca no es verdadera. En efecto, sean $M = (0, 1)$ el intervalo abierto en $\mathbb{R}$ con extremos $0, 1$, con la métrica usual, y $S = (0, 1)$ el propio M . Entonces, S no es un subconjunto relativamente compacto de M , pues la adherencia de S en M es el propio $S = (0, 1)$ que no es compacto, pero por el corolario 3, S es precompacto.
2. Del corolario 3 se sigue que los conceptos precompacto y relativamente compacto coinciden en espacios métricos completos.
3. Se dice que un espacio topológico X es *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X posee una subsucesión convergente en X . El teorema 1 nos dice que en espacios métricos este concepto coincide con el de compacidad. Sin embargo, existen espacios topológicos secuencialmente compactos que no son compactos, como también existen espacios compactos que no son secuencialmente compactos (ver [17], ejemplo 26, pág 192, y ejercicio 5-b, pág 209). Todo espacio topológico compacto de Hausdorff que satisfaga al primer axioma de enumerabilidad, es secuencialmente compacto.

Ejemplo 0.4.1. Sean X un espacio compacto y M un espacio métrico. Denotamos por $C(X, M)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas $f : X \longrightarrow M$. La función $\rho : C(X, M) \times C(X, M) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)); x \in M\},$$

es una métrica en $C(X, M)$. El subconjunto

$$N = \{f \in C(X, M); f \text{ es sobreyectiva}\}$$

es cerrado en $C(X, M)$, o, equivalentemente, el complemento de N en $C(X, M)$, N^c , es abierto. En efecto, sea $f \in N^c$. entonces existe $y_0 \in M$ tal que $d(y_0, f(x)) > 0$, para todo $x \in X$. Además, como f es continua, entonces la función $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = d(y_0, f(x))$ es continua, y siendo X un espacio compacto. entonces existe $x_0 \in X$ tal que

$$0 < d(y_0, f(x_0)) = \inf F(x) = \inf \{d(y_0, f(x)); x \in X\}$$

Si $2\epsilon = d(y_0, f(x_0)) > 0$, entonces $B_\epsilon(f) \subset N^c$. En efecto, si $g \in B_\epsilon(f)$ entonces $d(g(x), f(x)) < \epsilon$, para todo $x \in X$; ahora bien,

$$d(y_0, f(x)) \leq d(y_0, g(x)) + d(g(x), f(x)),$$

para todo $x \in X$, luego

$$d(y_0, g(x)) \geq d(y_0, f(x)) - d(g(x), f(x)) > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon > 0,$$

para todo $x \in X$, y por consiguiente g no es sobreyectiva.

Ejemplo 0.4.2. Sea M un espacio métrico. Si toda función continua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces M es compacto. En efecto supongamos que M no es compacto. Entonces (por el teorema 0,4,1) existe un subconjunto infinito enumerable $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ sin puntos de acumulación en M . Se deduce que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta_n > 0$ tal que

- a) $B_{\delta_n}(x_n) \cap S = \{x_n\}$, y
- b) $B_{\delta_n}(x_n) \cap B_{\delta_m}(x_m) = \emptyset$, si $m \neq n$

En efecto, como ningún punto de S es punto de acumulación del propio S , entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\epsilon_n > 0$ tal que $B_{\epsilon_n}(x_n) \cap S = \{x_n\}$. Pongamos $\delta_n = \frac{1}{2} \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$; a) es evidente y si $n > m$ y $z \in B_{\delta_n}(x_n) \cap B_{\delta_m}(x_m)$, se sigue que $x_n \in B_{\epsilon_m}(x_m)$, lo que es una contradicción, de donde se obtiene la afirmación b). Consideremos ahora la función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\delta_n}(x_n) \\ \frac{n}{\delta_n}(\delta_n - d(x, x_n)), & \text{si } x \in B_{\delta_n}(x_n). \end{cases}$$

f es una función continua sobre M , que no es acotada, pues $f(x_n) = n$.

Ejemplo 0.4.3. Si un espacio métrico (M, d) es compacto y d_1 es una métrica equivalente a d , entonces (M, d_1) también es compacto y por consiguiente, acotado. Recíprocamente, si (M, d) es un espacio métrico que es acotado con respecto a todas las métricas equivalentes a d , entonces (M, d) es compacto. En efecto, supongamos que (M, d) no es compacto. Entonces por el ejemplo 0,4,2, existe una función continua no acotada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Ahora bien, la métrica $d_f : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_f(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|,$$

es equivalente a la métrica d (ver ejercicio 0,2,2) y (M, d_f) no es acotado. En efecto, si existiera $\alpha > 0$ tal que $d_f(x, y) \leq \alpha$ para todos los $x, y \in M$, entonces f sería acotada, lo que es una contradicción.

Ejemplo 0.4.4. Sean M, N espacios métricos y $f : M \longrightarrow N$ una aplicación continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) Si una sucesión (x_n) en M no admite subsucesiones convergentes en M , entonces lo mismo sucede con la sucesión $(f(x_n))$ en N .
- b) Para todo compacto $K \subset N$, $f^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de M .

En efecto, supongamos que se cumple la condición a) y que existe un compacto $K \subset N$ tal que $f^{-1}(K) \subset M$ no es compacto. Por el teorema 0,4,1, existe una sucesión $(x_n) \subset f^{-1}(K)$ que no admite subsucesiones convergentes en $f^{-1}(K)$, y por consiguiente en M , pues $f^{-1}(K)$ es cerrado, ya que f es continua y K es cerrado. Por consiguiente, a) implica que la sucesión $(f(x_n)) \subset K$ no posee subsucesiones convergentes en N , y por lo tanto en K , de donde K no sería compacto, lo que es una contradicción. Por consiguiente a) $\Rightarrow$ b). Veamos ahora que b) $\Rightarrow$ a): supongamos válida la condición b) y que la condición a) no es verdadera, esto es, que existe una sucesión (x_n) que no posee ninguna subsucesión convergente en M , pero tal que $(f(x_n))$ posee una subsucesión $(f(x_{n_k}))$ convergente en N , digamos a y_0 . Entonces, $K = \{f(x_{n_k}); k \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}$ es un conjunto compacto de N (ver ejercicio 1), luego, por hipótesis, $f^{-1}(K)$ es compacto, de donde, en virtud de que

$$(x_{n_k}) \subset f^{-1}(\{f(x_{n_k}); k \in \mathbb{N}\}) \subset f^{-1}(K),$$

la sucesión (x_{n_k}) (y por consiguiente (x_n)) posee una subsucesión convergente en M , lo que es una contradicción.

Ejemplo 0.4.5. Sean X un espacio topológico, M un espacio métrico y $f : X \longrightarrow M$ una aplicación. Si una sucesión equicontinua de aplicaciones $f_n : X \longrightarrow M$, $n \in \mathbb{N}$, converge puntualmente a f , entonces f es continua y la convergencia es uniforme sobre los conjuntos compactos de X . En efecto, sean $K \subset X$ un compacto y $\epsilon > 0$; para cada $x \in X$ existe una vecindad V_x de x tal que

$$y \in V_x \implies d(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\epsilon}{3},$$

$n = 1, 2, \dots$. Haciendo $n \rightarrow \infty$, se sigue que

$$y \in V_x \implies d(f(y), f(x)) < \frac{\epsilon}{3},$$

de donde f es continua. Ahora bien, como K es compacto y $K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$, entonces existen elementos $x_1, x_2, \dots, x_s$ de K tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^s V_{x_i}$. Por hipótesis, para cada $i = 1, 2, \dots, s$, existe un $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_i \implies d(f_n(x_i), f(x_i)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_s\}$ y demostremos que

$$n > n_0 \implies d(f_n(x), f(x)) < \epsilon,$$

para todo $x \in K$, lo cual implica que la convergencia es uniforme sobre K . En efecto, sea $x \in K$. Entonces, existe $i, 1 \leq i \leq s$, tal que $x \in V_{x_i}$. Por lo tanto, si $n > n_0$, entonces se tiene que

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \epsilon$$

cualquiera que sea $x \in K$.

Ejercicios de la sección 0.4

1. Sean X un espacio topológico y (x_n) una sucesión en X convergente hacia $x_0 \in X$. Demuestre que $K = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ es un subconjunto compacto de X .
2. Demostrar que un espacio métrico M es compacto si y sólo si todo recubrimiento abierto infinito de M posee un subrecubrimiento propio.
3. Demostrar que en un espacio métrico M las siguientes condiciones son equivalentes:
 - a) M es compacto.
 - b) Todo recubrimiento enumerable de M posee un subrecubrimiento finito.
 - c) La intersección de cualquier sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de M , es no vacía.

- d) Todo subconjunto cerrado y discreto es finito.
4. Sean M, N espacios métricos, $f : M \rightarrow N$ una aplicación continua y $f_n : M \rightarrow N, n \in \mathbb{N}$, una sucesión de aplicaciones continuas. Demostrar que las dos condiciones siguientes son equivalentes:
- a) Si (x_n) es una sucesión convergente hacia x en M , entonces la sucesión $(f_n(x_n))$ converge a $f(x)$ en N .
 - b) La sucesión (f_n) converge a f , uniformemente sobre los subconjuntos compactos de M .
5. Demostrar que un subconjunto S de un espacio métrico M es precompacto si y sólo si toda sucesión de elementos de S posee una subsucesión de Cauchy.
6. Sea M un espacio métrico.
- a) Sean K un subconjunto compacto de M y U un abierto en M , $U \neq M$, tal que $K \subset U$. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) \geq \delta$, para todo $x \in K$ y todo $y \in U^c$.
 - b) Demostrar que todo subconjunto compacto K de M posee un sistema fundamental enumerable de vecindades abiertas, esto es, que existe una familia enumerable (U_n) de abiertos $U_n \supset K$, tal que si V es un abierto en M y $V \supset K$, entonces existe un n tal que $K \subset U_n \subset V$.
- Sugerencia:* Para $n = 1, 2, \dots$, defina $U_n = \{x \in M; d(x, K) < \frac{1}{n}\}$.
7. Sean X un espacio topológico, M un espacio métrico, D un subconjunto denso de X y $f : X \rightarrow M$ una aplicación continua. Demostrar que si una sucesión equicontinua de aplicaciones $f_n : X \rightarrow M$ converge puntualmente a f en D , entonces (f_n) converge puntualmente a f en todo el espacio X .
8. Sea K un espacio métrico compacto. Demostrar que si una sucesión equicontinua de funciones complejas $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, es puntualmente acotada (esto es, $(f_n(x))$ es una sucesión acotada en $\mathbb{C}$, para cada $x \in K$), entonces existen una función continua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ y una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) que converge puntualmente hacia f en K (teorema de Ascoli).

Sugerencia: Sea D un subconjunto enumerable denso de K . Demostrar que (f_n) posee una subsucesión (f_{n_k}) que converge en todo punto de D . Se sigue que (f_{n_k}) converge en todo punto de K . Definir $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$, $x \in K$. Aplicar el ejemplo 0.4.5.

Capítulo 1

ESPACIOS DE BANACH

1.1. Definiciones y ejemplos.

A lo largo de todo este libro, $\mathbb{K}$ denotará el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición 1.1.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* en E es una función real $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre E , que satisface las siguientes condiciones, cualesquiera que sean $x, y \in E$ y el escalar $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $N_1)$ $\|x\| \geq 0$, y, $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$.
- $N_2)$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $N_3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Un *espacio vectorial normado* (o, simplemente, un *espacio normado*) es una pareja $(E, \|\cdot\|)$, en donde E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\|\cdot\|$ es una norma en E . Cuando no hay lugar a dudas, el espacio normado se puede denotar sencillamente por E .

Ejemplo 1.1.1. En $\mathbb{R}^n$ las siguientes funciones son ejemplos de normas:

- $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (*norma euclidiana*)
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_\infty = \max \{|x_i|; 1 \leq i \leq n\}$

en donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Es fácil verificar que las funciones $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ son normas en $\mathbb{R}^n$ y que la función $\|\cdot\|$ satisface las condiciones $N_1)$ y $N_2)$ de la definición de norma. Antes de ver que $\|\cdot\|$ cumple la condición $N_3)$, vamos a demostrar la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (= \|x\| \|y\|) \quad (1)$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y todo $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. En efecto, cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n (x_i \pm \lambda y_i)^2 = \\ &= \|x\|^2 \pm 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Suponiendo $y \neq 0$, si hacemos $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$, entonces las desigualdades $(\pm)$ anteriores implican la de Cauchy-Schwarz, siendo ésta obvia en el caso $y = 0$.

Veamos ahora que $\|\cdot\|$ satisface la condición $N_3)$: si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

de donde $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.2. La función $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$$

en donde $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, es una norma en $\mathbb{C}^n$ (*norma euclidiana*). En efecto, N_1) y N_2) son inmediatas. Para demostrar N_3), verifiquemos primero la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{C}^n$, esto es, la desigualdad

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |w_i|^2} \quad (= \|z\| \|w\|) \quad (2)$$

para todo $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, y todo $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$: para $i = 1, 2, \dots, n$, sean $x_i = |z_i|$, $y_i = |w_i|$; como $|\sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i| \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$, la desigualdad (2) se sigue de (1). Demostremos ahora la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \|z + w\|^2 &= \sum_{i=1}^n |z_i + w_i|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (z_i + w_i)(\bar{z}_i + \bar{w}_i) = \\ &= \|z\|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right) + \|w\|^2 \leq \\ &\leq \|z\|^2 + 2 \left| \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i \right| + \|w\|^2 \leq \\ &\leq \|z\|^2 + 2\|z\| \|w\| + \|w\|^2 = \\ &= (\|z\| + \|w\|)^2, \end{aligned}$$

de donde $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$ y todo $w \in \mathbb{C}^n$.

Ejemplo 1.1.3. En todo espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ se puede definir una norma. En efecto, sea $(e_i)_{i \in I}$ una base de Hamel de E sobre $\mathbb{K}$ (todo elemento $x \in E$ se expresa entonces de modo único como $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$, en donde $\alpha_i = 0$, excepto para un número finito de índices $i \in I$); es fácil ver que la función

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \longmapsto \|x\| = \sum_{i \in I} |\alpha_i|,$$

es una norma de E .

Ejemplo 1.1.4. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios reales de grado menor que n , esto es, el conjunto de los polinomios p de la forma

$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$, en donde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. El conjunto P_n es un espacio vectorial con las dos operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}(p+q)(t) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} \\ (\alpha p)(t) &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)t + \dots + (\alpha a_{n-1})t^{n-1}\end{aligned}$$

en donde $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$, $q(t) = b_0 + b_1t + \dots + b_{n-1}t^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Además, P_n es de dimensión n . En efecto, si $p_0(t) \equiv 1$, $p_i(t) = t^i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, entonces $\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)\}$ es una base de P_n . Ahora bien, la función $\|\cdot\| : P_n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|p\| = \sup_{t \in [0,1]} |a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}|,$$

si $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1}$, es una norma en P_n . En efecto, las condiciones N_2 , N_3) son fáciles de verificar; en cuanto a la N_1) se deduce del hecho de que el conjunto $\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)\}$ es linealmente independiente.

Observación 1.1.1. Como los polinomios $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)$, son linealmente independientes, entonces los escalares que definen un polinomio de grado menor que n son únicos, y se llaman coeficientes del polinomio. Así, los polinomios están unívocamente determinados por sus coeficientes. Se sigue que si $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces la función

$$p \in P_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \|p\| = \|(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})\| \in \mathbb{R},$$

en donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son los coeficientes de p , está bien definida, y es una norma en P_n .

Definición 1.1.2. Se dice que dos normas, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, en un espacio vectorial E , son *equivalentes* cuando existen constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1,$$

para todo $x \in E$.

Observación 1.1.2.

1. Si E es un espacio normado, entonces la función $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

es una métrica sobre E , invariante por traslaciones, esto es,
 $d(x+a, y+a) = d(x, y)$. Por consiguiente E es un espacio métrico.

2. Todo espacio normado será considerado dotado de la topología generada por la métrica inducida por su norma, que se llama simplemente la *topología de la norma*.
3. Si P_n se dota de la norma $\|\cdot\|$ definida en la observación 1,1,1, entonces la aplicación $f : P_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(p(t)) = a,$$

en donde $a \in \mathbb{R}^n$ es el vector cuyas coordenadas son los coeficientes del polinomio $p(t)$, es una isometría, esto es,

$$\|f(p(t)) - f(q(t))\| = \|p(t) - q(t)\|.$$

Por consiguiente, la convergencia en el espacio métrico P_n es equivalente a la convergencia de los coeficientes de los elementos de P_n .

4. Los conjuntos $\{x \in E; \|x\| < 1\}$, $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ y $\{x \in E; \|x\| = 1\}$, se llaman la bola unitaria abierta, la bola unitaria cerrada y la esfera unitaria de E , respectivamente.

Proposición 1.1.1. *Para que dos normas en un espacio vectorial E sean equivalentes es necesario y suficiente que las métricas inducidas en E por esas normas sean equivalentes.*

Demostración. Sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas en E , y d_1, d_2 las respectivas métricas inducidas por esas normas. Es claro que la condición es necesaria. Veamos que también es suficiente. En efecto, supongamos que se verifica; como la aplicación identidad $id. : (E, d_1) \longrightarrow (E, d_2)$ es continua en el punto $x = 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, 0) < \delta$ implica $d_2(x, 0) < 1$, esto es, $\|x\|_1 < \delta \implies \|x\|_2 < 1$. Si $\beta = \frac{2}{\delta}$, entonces

$$\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1,$$

para todo $x \in E$. En efecto, si $x \in E, x \neq 0$, entonces $\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1} x \right\|_1 < \delta$, luego $\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1} x \right\|_2 < 1$, esto es $\|x\|_2 < \frac{2}{\delta} \|x\|_1$, para todo $x \neq 0$. Se sigue que $\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$, para todo $x \in E$. Análogamente, como la aplicación identidad

$id. : (E, d_2) \longrightarrow (E, d_1)$ es continua en $x = 0$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, para todo $x \in E$. $\square$

Si $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, y $\|\cdot\|_\infty$ son las normas en $\mathbb{R}^n$ definidas en el ejemplo 1.1.1, entonces se tienen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &\leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty,\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se concluye que dos cualesquiera de esas normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes. Más generalmente se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.1.2. *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos normas cualesquiera en E son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que $\dim E = n$ y sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de E ; la función

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i &\longmapsto \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}\end{aligned}$$

es una norma en E^1 . Sea ϕ cualquier otra norma en E . Entonces ϕ es (uniformemente) continua en E . En efecto, dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\epsilon}{nM}$, en donde $M = \max\{\phi(e_i); 1 \leq i \leq n\}$. Nótese que si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ son elementos de E tales que $\|x - y\| < \delta$, entonces $|\alpha_i - \beta_i| \leq \delta, i = 1, 2, \dots, n$. Por lo tanto,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \phi(x - y) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| \phi(e_i) \leq M \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| < \epsilon,$$

si $\|x - y\| < \delta$. Por consiguiente ϕ es uniformemente continua. Como la esfera unitaria de E es compacta, existen los números $\alpha = \min\{\phi(x); \|x\| = 1\}$, $\beta = \max\{\phi(x); \|x\| = 1\}$, y ambos son positivos. Por lo tanto $\alpha \leq \phi(x) \leq \beta$, para todo $x \in E$ con $\|x\| = 1$. Ahora bien, si $x \in E, x \neq 0$, entonces $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, luego $\alpha \leq \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \beta$, de donde

$$\alpha\|x\| \leq \phi(x) \leq \beta\|x\|$$

¹Esta norma hace a E isométricamente isomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{K}^n$.

para todo $x \in E$, esto es, ϕ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes en E . $\square$

Si E y F son espacios normados, entonces el producto cartesiano $E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$ es un espacio normado con una cualquiera de las siguientes normas equivalentes:

$$\begin{aligned}\|(x, y)\| &= \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \\ \|(x, y)\|_1 &= \|x\| + \|y\| \\ \|(x, y)\|_\infty &= \max\{\|x\|, \|y\|\}\end{aligned}$$

Proposición 1.1.3. *Si E es un espacio normado, entonces*

1. *La operación adición $(x, y) \in E \times E \xrightarrow{+} x + y \in E$ es (uniformemente) continua.*
2. *La norma de E , $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función uniformemente continua.*
3. *La multiplicación por escalares $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E \longmapsto \alpha x \in E$, es continua.*
4. *Para cada $\alpha_0 \in \mathbb{K}$ y cada $x_0 \in E$, las aplicaciones $x \in E \longmapsto \alpha_0 x \in E$, $y, \alpha \in \mathbb{K} \longmapsto \alpha x_0 \in E$, son uniformemente continuas.*

Demostración. Mostraremos solamente las afirmaciones 2 y 3, puesto que las otras son inmediatas. En efecto, la continuidad uniforme de la norma se sigue de la desigualdad

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Demostremos ahora la afirmación 3. Sean $\alpha_0 \in \mathbb{K}$, $x_0 \in E$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in E$, entonces se tiene la siguiente igualdad:

$$\alpha x - \alpha_0 x_0 = (\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0 + \alpha_0(x - x_0).$$

Para obtener $\|\alpha x - \alpha_0 x_0\| < \epsilon$ es suficiente tomar:

1. $|\alpha| < \sqrt{\epsilon}$, $\|x\| < \sqrt{\epsilon}$, si $\alpha_0 = 0$, $x_0 = 0$.
2. $|\alpha - \alpha_0| < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$, $\|x\| < \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2|\alpha_0|}\right\}$, si $\alpha_0 \neq 0$, $x_0 = 0$.
3. $|\alpha| < \min\left\{\sqrt{\frac{\epsilon}{2}}, \frac{\epsilon}{2\|x_0\|}\right\}$, $\|x - x_0\| < \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$, si $\alpha_0 = 0$, $x_0 \neq 0$.

4. $|\alpha - \alpha_0| < \min \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3\|x_0\|} \right\}, \quad \|x - x_0\| < \min \left\{ \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}, \frac{\epsilon}{3|\alpha_0|} \right\},$ si $\alpha_0 \neq 0, x_0 \neq 0.$ $\square$

Proposición 1.1.4. *Sea E un espacio normado. Entonces:*

1. *Para cada $x_0 \in E$, la translación en E , $x \in E \mapsto x + x_0 \in E$ es una isometría. Además,*

$$B_\epsilon(x_0) = x_0 + B_\epsilon(0)$$

(en donde $x + A = \{x + y; y \in A\}$, para $x \in E$, A un subconjunto de E).

2. *Para cada $\alpha_0 \in \mathbb{K}, \alpha_0 \neq 0$, la homotecia en $E, x \in E \mapsto \alpha_0 x$, es un homeomorfismo de E sobre E .*

Definición 1.1.3. Se dice que un espacio normado E es un *espacio de Banach* si E es un espacio métrico completo, para la métrica inducida por su norma. Note que si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces E es un espacio de Banach con cualquier norma equivalente a la norma $\|\cdot\|$.

Ejemplo 1.1.5.

1. El espacio $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach. En efecto, sea $(x^{(m)})$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Si para cada $m \in \mathbb{N}, x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, entonces para $j = 1, 2, \dots, n$, se tiene que

$$|x_j^{(p)} - x_j^{(m)}| \leq \|x^{(p)} - x^{(m)}\|,$$

para todo $p \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para $j = 1, 2, \dots, n$, la sucesión $(x_j^{(m)})_m$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego convergente a algún número real. Sea entonces

$$x_j = \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $x^{(m)} \rightarrow x$ en $\mathbb{R}^n$, esto es, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\| = 0$. En efecto, sea $\epsilon > 0$; para $j = 1, 2, \dots, n$, existe $n(j, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n(j, \epsilon) \implies |x_j^{(m)} - x_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

Si $n(\epsilon) = \max \{n(j, \epsilon); 1 \leq j \leq n\}$, entonces se tiene que

$$m > n(\epsilon) \implies \|x^{(m)} - x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j^{(m)} - x_j|^2} < \epsilon.$$

Se sigue que $x^{(m)} \rightarrow x$ en $\mathbb{R}^n$.

2. Análogamente se demuestra que $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Banach

Ejemplo 1.1.6. Sea c_0 el conjunto de todas las sucesiones de números complejos convergentes hacia cero, esto es,

$$c_0 = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$$

c_0 es un espacio vectorial con las operaciones adición y multiplicación por un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ definidas por

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n) \\ \alpha(x_n) &= (\alpha x_n). \end{aligned}$$

La función $\|\cdot\| : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|(x_n)\| = \max \{|x_n|; n \in \mathbb{N}\};$$

es una norma en c_0 , y c_0 es un espacio de Banach para esta norma. En efecto, demostremos primero que el máximo efectivamente existe: sea (x_n) un elemento no nulo de c_0 y $x_{n_1} \neq 0$. Como $x_n \rightarrow 0$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$, $m_1 > n_1$, tal que

$$n > m_1 \implies |x_n| < |x_{n_1}|$$

Si $M = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|, \dots, |x_{m_1}|\}$, entonces se tiene que $M = \max \{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$, de donde se sigue la afirmación.

Demostremos ahora que c_0 es completo. En efecto, sea $(x^{(n)})$ una sucesión de Cauchy en c_0 . Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} = (x_j^{(n)})_j$, entonces se tiene que

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|$$

para $j = 1, 2, \dots$. Se sigue que para cada $j \in \mathbb{N}$, la sucesión $(x_j^{(n)})_n$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, luego convergente. Sean

$$x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)},$$

para $j = 1, 2, \dots$, y $x = (x_j)$. Mostremos que $x \in c_0$ y que $x^{(n)} \rightarrow x$ en c_0 . En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n(\epsilon) \implies \left| x_j^{(n)} - x_j^{(m)} \right| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para $j = 1, 2, \dots$. Haciendo $m \rightarrow \infty$, se tiene que

$$n > n(\epsilon) \implies \left| x_j^{(n)} - x_j \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (1)$$

para $j = 1, 2, \dots$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n(\epsilon)$. Ya que $x^{(n_1)} \in c_0$, entonces existe $m(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$j > m(\epsilon) \implies \left| x_j^{(n_1)} \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por consiguiente,

$$j > m(\epsilon) \implies |x_j| \leq \left| x_j - x_j^{(n_1)} \right| + \left| x_j^{(n_1)} \right| < \epsilon,$$

de donde $x \in c_0$. Ahora bien, de (1) se sigue que

$$n > n(\epsilon) \implies \|x^{(n)} - x\| < \epsilon$$

y por consiguiente $x^{(n)} \rightarrow x$ en c_0 , de donde c_0 es completo.

Ejemplo 1.1.7. Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $C_{00}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que *se anulan en la frontera de* Ω . Esta última expresión significa que para cualesquier $f \in C_{00}(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $|f(x)| < \epsilon$, si $x \in \Omega \cap K^c$. Con la norma

$$\|f\| = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

$C_{00}(\Omega)$ es un espacio de Banach. En efecto, demostremos primero que el máximo en Ω de cualquier función $f \in C_{00}(\Omega)$ efectivamente existe. Sea $f \in C_{00}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$; entonces, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\epsilon = |f(x_0)| > 0$. Por hipótesis, existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$x \in \Omega \cap K^c \implies |f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De esta implicación vemos que $x_0 \in K$. Por lo tanto, si $M = \max_{x \in K} |f(x)|$, entonces $|f(x_0)| \leq M$. Por consiguiente, se tiene que

$$x \in \Omega \cap K^c \implies |f(x)| < \frac{\epsilon}{2} < |f(x_0)| \leq M.$$

Además, $|f(x)| \leq M$, si $x \in K$. Se sigue que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in \Omega$, de donde M es el máximo de f en Ω .

Demostremos ahora que $C_{00}(\Omega)$ es completo. En efecto, sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $C_{00}(\Omega)$. Ya que para cada $x \in \Omega$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|,$$

entonces para cada $x \in \Omega$, $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, luego convergente. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es la función definida por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in \Omega,$$

entonces $f \in C_{00}(\Omega)$ y (f_n) converge a f en $C_{00}(\Omega)$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

para cada $x \in \Omega$. Si hacemos $m \rightarrow \infty$, entonces se tiene que

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (2)$$

para cada $x \in \Omega$. Se sigue que (f_n) converge a f , uniformemente sobre Ω ; en particular f es continua. Fijemos $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$. Como f_{n_1} se anula en la frontera de Ω , entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$x \in \Omega \cap K^c \implies |f_{n_1}(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta (2), se tiene que

$$x \in \Omega \cap K^c \implies |f(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| < \epsilon$$

luego f se anula en la frontera de Ω . Por consiguiente, $f \in C_{00}(\Omega)$. Finalmente de (2) se sigue que

$$n > n_0 \implies \|f_n - f\| < \epsilon$$

de donde (f_n) converge a f en $C_{00}(\Omega)$.

Ejemplo 1.1.8. Sean $I = [a, b]$ (donde $a < b$) un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces el espacio $C^m(I; \mathbb{R})$ de las funciones reales m veces continuamente diferenciables en I es un espacio de Banach, con la norma

$$\|f\| = \max_{t \in I} |f(t)| + \max_{t \in I} |f^{(m)}(t)|;$$

esto es, si (f_n) es una sucesión de Cauchy en $C^m(I; \mathbb{R})$, entonces existe $f \in C^m(I; \mathbb{R})$ tal que las sucesiones (f_n) y $(f_n^{(m)})_n$ convergen uniformemente en I hacia las funciones f y $f^{(m)}$, respectivamente. Probaremos esto por inducción sobre m :

1. Para $m = 1$, $C^1(I; \mathbb{R})$ es un espacio de Banach. En efecto, sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $C^1(I; \mathbb{R})$. En virtud de que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_k(x)| &\leq \|f_n - f_k\| \\ |f'_n(x) - f'_k(x)| &\leq \|f_n - f_k\| \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, se sigue que existen funciones continuas $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que (f_n) y (f'_n) convergen uniformemente en I a f y g , respectivamente. Por lo tanto, queda por ver que f es diferenciable y que $f' = g$. En efecto,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt, \quad x \in I,$$

de donde haciendo $n \rightarrow \infty$, se sigue que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad x \in I.$$

De esta igualdad se deduce que f es diferenciable y que $f' = g$. Se sigue que $C^1(I; \mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

2. Supongamos que $C^{m-1}(I; \mathbb{R})$ es un espacio de Banach (hipótesis de inducción) y demostremos que $C^m(I; \mathbb{R})$ es de Banach: Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $C^m(I; \mathbb{R})$. Ya que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_k(x)| &\leq \|f_n - f_k\|, \\ |f_n^{(m)}(x) - f_k^{(m)}(x)| &\leq \|f_n - f_k\|, \end{aligned}$$

para cada $x \in I$, se sigue que existen funciones $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que las sucesiones (f_n) y $(f_n^{(m)})_n$ convergen uniformemente en I a las funciones f y g , respectivamente. Para concluir la afirmación, se tiene que mostrar que $f \in C^m(I; \mathbb{R})$ y que $f^{(m)} = g$. En efecto, por la fórmula de Taylor con resto integral se tiene que

$$f_n(x) = f_n(a) + f'_n(a)(x-a) + \cdots + \frac{f_n^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1} + R_n(x)$$

para todo $x \in I$ y todo $n \in \mathbb{N}$, en donde

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} f_n^{(m)}(a+t(x-a))(x-a)^m dt, \quad x \in I$$

Sea

$$p_n(x) = f'_n(a)(x-a) + \cdots + \frac{f_n^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, se tiene que

$$p_n(x) = f_n(x) - f_n(a) - R_n(x), \quad x \in I.$$

Ahora bien, el lado derecho de esta igualdad es uniformemente convergente en I , luego (p_n) es una sucesión de funciones polinómicas de grado menor que m , uniformemente convergente en I . Por consiguiente, sus coeficientes son convergentes (ver observación 1,1,1 y ejercicio 1,1,1). En particular, la sucesión $\left(f_n^{(m-1)}(a)\right)_n$ es convergente. Por consiguiente, como

$$f_n^{(m-1)}(x) = f_n^{(m-1)}(a) + \int_a^x f_n^{(m)}(t) dt, \quad x \in I,$$

y $\left(\int_a^x f_n^{(m)}(t) dt\right)_n$ es una sucesión uniformemente convergente en I , se sigue que $\left(f_n^{(m-1)}\right)_n$ converge *uniformemente* en I , de donde (f_n) es una sucesión de Cauchy en $C^{m-1}(I; \mathbb{R})$. Por hipótesis de inducción, existe $h \in C^{m-1}(I; \mathbb{R})$ tal que las sucesiones (f_n) y $\left(f_n^{(m-1)}\right)_n$ convergen uniformemente en I a las funciones h y $h^{(m-1)}$, respectivamente. En virtud de que (f_n) también converge (uniformemente) a f en I , se deduce que $h = f$. Por consiguiente, si en la igualdad

$$f_n^{(m-1)}(x) = f_n^{(m-1)}(a) + \int_a^x f_n^{(m)}(t) dt, \quad x \in I$$

hacemos $n \rightarrow \infty$, se sigue que

$$f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad x \in I,$$

y por lo tanto $f^{(m-1)}$ es diferenciable y $f^{(m)} = g$.

Ejemplo 1.1.9. El espacio ℓ^p ($1 \leq p < \infty$). Para $1 \leq p < \infty$, sea

$$\ell^p = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{K}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Es inmediato que si $p = 1$, entonces ℓ^1 es un espacio vectorial con las operaciones adición y multiplicación por un escalar, definidas respectivamente por:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n) \\ \alpha(x_n) &= (\alpha x_n) \end{aligned}$$

y que la función

$$x = (x_n) \mapsto \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

es una norma en ℓ^1 . También es claro que la operación de multiplicación por un escalar se puede definir en ℓ^p , $1 < p < \infty$, de manera análoga a como acabamos de hacerlo en ℓ^1 .

En lo que sigue mostraremos que se puede definir la operación adición en ℓ^p , $1 < p < \infty$, de la misma manera como en ℓ^1 (haciendo de ℓ^p un espacio vectorial) y que la función

$$x = (x_n) \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en ℓ^p , $1 < p < \infty$. Esto es consecuencia de la proposición 1.1.6 más adelante. Finalmente probaremos que ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) es completo con la norma arriba definida, y por lo tanto, es un espacio de Banach.

Proposición 1.1.5. (*Desigualdad de Hölder*) Sean $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (en este caso se dice que p y q son exponentes conjugados). Entonces, para todo $x = (x_n) \in \ell^p$, y todo $y = (y_n) \in \ell^q$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ es absolutamente convergente y se tiene la siguiente desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3)$$

Demostración.

1. Sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$, y $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$. Entonces vale la siguiente desigualdad:

$$\mu^\alpha \nu^\beta \leq \alpha\mu + \beta\nu \quad (4)$$

En efecto, si $\nu = 0$, (ó $\mu = 0$) la desigualdad es trivial. Supongamos entonces que $\nu > 0$. La función

$$t \longmapsto h(t) = \alpha t + \beta - t^\alpha$$

para $t \geq 0$, tiene la siguientes propiedades:

- a) $h(0) = \beta$, $h(1) = 0$.
- b) $h'(t) = \alpha \left(1 - \frac{1}{t^\beta}\right)$, $t > 0$.
- c) $0 < t < 1 \implies h'(t) < 0$.
- d) $h'(1) = 0$, y $h'(t) > 0$, si $t > 1$.

De las propiedades a) y c) se concluye que $h(t) \geq 0$, para $t \in [0, 1]$, y como $h(1) = 0$, d) implica que $h(t) \geq 0$, para $t \geq 1$. Por consiguiente, $h(t) \geq 0$, para $t \geq 0$, esto es,

$$t^\alpha \leq \alpha t + \beta$$

para $t \geq 0$. Por lo tanto, haciendo $t = \frac{\mu}{\nu}$ y teniendo en cuenta que $\alpha + \beta = 1$, se sigue que

$$\mu^\alpha \nu^\beta \leq \alpha\mu + \beta\nu$$

2. Demostremos ahora la desigualdad (3), de Hölder. En efecto, si $x = 0$ ó $y = 0$ la desigualdad es obvia. Supongamos entonces que $x \neq 0$, $y \neq 0$. Para $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, pero fijo, sean

$$\mu = \frac{|x_k|^p}{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} \quad , \quad \nu = \frac{|y_k|^q}{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}$$
$$\alpha = \frac{1}{p} \quad , \quad \beta = \frac{1}{q}.$$

Se sigue de (4) que

$$\frac{|x_k y_k|}{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}$$

Por consiguiente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ es convergente. Además se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k y_k|}{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Proposición 1.1.6. (*Desigualdad de Minkowski*) Sea $1 \leq p < \infty$. Si $x = (x_n) \in \ell^p$, $y = (y_n) \in \ell^p$, entonces $x + y = (x_n + y_n) \in \ell^p$, y se tiene la siguiente desigualdad:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5)$$

Demostración. Para $p = 1$ la demostración es inmediata. Supongamos, pues, $1 < p < \infty$, y sea $1 < q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Teniendo en cuenta la desigualdad de Hölder, se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m |x_n + y_n|^p &= \sum_{n=1}^m |x_n + y_n|^{p-1} |x_n + y_n| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^m |x_n| |x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^m |y_n| |x_n + y_n|^{p-1} \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^m |x_n + y_n|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \\ &+ \left(\sum_{n=1}^m |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^m |x_n + y_n|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^m |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^m |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Suponiendo el lado izquierdo de esta desigualdad no nulo, y como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se sigue que

$$\left(\sum_{n=1}^m |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^m |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Se sigue que si $x = (x_n) \in \ell^p$, $y = (y_n) \in \ell^p$, entonces $(x + y) \in \ell^p$ y vale la desigualdad (5), de Minkowski. $\square$

Es una consecuencia de la proposición anterior que la función

$$x = (x_n) \longmapsto \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

es una norma en ℓ^p ($1 \leq p < \infty$). Mostremos ahora que ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) es completo para esta norma, y que, por lo tanto, es un espacio de Banach. En efecto, sea $(x^{(m)})$, $x^{(m)} = \left(x_n^{(m)} \right)_n$, una sucesión de Cauchy en ℓ^p . En virtud de que

$$\left| x_j^{(m)} - x_j^{(k)} \right| \leq \|x^{(m)} - x^{(k)}\|_p$$

para $j = 1, 2, \dots$, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$, $\left(x_j^{(m)} \right)_m$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego convergente hacia algún $x_j \in \mathbb{K}$. Sea $x = (x_j)$. Mostremos que $x \in \ell^p$ y que la sucesión $(x^{(m)})$ converge a x en ℓ^p . En efecto, ya que la sucesión $(x^{(m)})$ es acotada en ℓ^p , existe $\alpha > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^s \left| x_j^{(m)} - x_j^{(k)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^{(m)} - x^{(k)}\|_p \leq \alpha,$$

para todo $s \in \mathbb{N}$, todo $m \in \mathbb{N}$, y todo $k \in \mathbb{N}$. Haciendo $m \rightarrow \infty$, se sigue que

$$\left(\sum_{j=1}^s |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{j=1}^s \left| x_j^{(k)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^s \left| x_j - x_j^{(k)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha,$$

para todo $s \in \mathbb{N}$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, se tiene que

$$\left(\sum_{j=1}^s |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha + \|x^{(k)}\|_p,$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Luego $x = (x_j) \in \ell^p$.

Demostremos finalmente que la sucesión $(x^{(m)})$ converge a x en ℓ^p . En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, k > n_0 \implies \left(\sum_{j=1}^s |x_j^{(m)} - x_j^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^{(m)} - x^{(k)}\|_p < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Haciendo $k \rightarrow \infty$, se sigue que

$$m > n_0 \implies \left(\sum_{j=1}^s |x_j^{(m)} - x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $s \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $s \rightarrow \infty$, entonces se tiene que

$$m > n_0 \implies \|x^{(m)} - x\|_p < \epsilon.$$

Se sigue que $x^{(m)} \rightarrow x$ en ℓ^p .

Ejemplo 1.1.10. Sea ℓ^∞ el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, de todas las sucesiones acotadas en $\mathbb{K}$, esto es,

$$\ell^\infty = \left\{ (x_n) \subset \mathbb{K}; \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

Entonces ℓ^∞ es un espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

(Ver ejercicio 1,1,5).

Una propiedad importante de los espacios ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) es la caracterización de sus subconjuntos precompactos dada por la siguiente proposición:

Proposición 1.1.7. *Para que un subconjunto S de ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) sea precompacto es necesario y suficiente que satisfaga las dos condiciones siguientes:*

1. S es acotado, y

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{x \in S} \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p] = 0.$$

Demostración. Sea S un subconjunto precompacto de ℓ^p . Es claro que S es acotado; mostremos la condición 2. En efecto, sea $K = \overline{S}$ la adherencia de S en ℓ^p . Entonces K es un subconjunto compacto de ℓ^p (ver Obs.0,4,3,2). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \left(\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Entonces, para todo $x = (x_n) \in \ell^p$ y todo $y = (y_n) \in \ell^p$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= \left| \left(\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sum_{i=n}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \|x - y\|_p \end{aligned}$$

Por consiguiente, (f_n) es una sucesión (uniformemente) equicontinua en el espacio métrico ℓ^p . Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

para cada $x \in \ell^p$. Por lo tanto, la sucesión (f_n) converge a la función idénticamente nula, uniformemente en los compactos de ℓ^p (ejemplo 0,4,5). Se sigue que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |f_n(x)| < \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x = (x_n) \in K$, en particular para todo $x \in S$. Por consiguiente,

$$n > n_0 \implies \sup_{x \in S} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \epsilon$$

de donde se sigue la condición 2). Por consiguiente las condiciones son necesarias. Las condiciones también son suficientes. En efecto, supongamos que S las satisfaga. 2) implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies \sup_{x \in S} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (6)$$

Sean $E_{n_0} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, 0, 0, \dots); x_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n_0\}$ y S_0 el subconjunto de E_{n_0} formado por los elementos de E_{n_0} cuyas coordenadas son las primeras n_0 coordenadas de elementos de S . Ya que S es acotado en ℓ^p , entonces S_0 es un subconjunto acotado de E_{n_0} , el cual es un espacio vectorial de dimensión finita n_0 . Se sigue que S_0 es un subconjunto precompacto de E_{n_0} . Por lo tanto, existen elementos $a^1, \dots, a^m$ en S_0 , $a^k = (a_1^k, \dots, a_{n_0}^k, 0, \dots)$, $k = 1, 2, \dots, m$, tales que

$$S_0 \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\frac{\epsilon}{2}}(a^k) \quad (7)$$

Demostremos que $S \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\epsilon}(a^k)$: sea $x = (x_1, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots) \in S$; entonces el punto $x^0 = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, 0, \dots) \in S_0$, luego por (7) existe k , $1 \leq k \leq m$, tal que $x^0 \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(a^k)$, esto es, $\|x^0 - a^k\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto, teniendo en cuenta (6), se tiene que

$$\|x - a^k\|_p = \|x^0 - a^k\|_p + \left(\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

de donde $x \in B_{\epsilon}(a^k)$. Se concluye que S es precompacto, y por consiguiente las condiciones 1) y 2) también son suficientes. $\square$

Observación 1.1.3.

1. Se puede demostrar directamente, usando la mera definición, que si $S \subset \ell^p$ es precompacto, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{x \in S} \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^p] = 0$.
2. Cualquier espacio vectorial normado E de dimensión finita n , es naturalmente isométrico a $\mathbb{K}^n$ y por consiguiente tiene las mismas propiedades topológicas (y algebraicas) que $\mathbb{K}^n$. En particular, un subconjunto de E es acotado si y sólo si es precompacto. Ahora bien las propiedades

de que un conjunto sea acotado, precompacto, compacto, etc., en un espacio normado son preservados por normas equivalentes, y como en un espacio vectorial de dimensión finita dos normas cualesquiera son equivalentes, entonces las propiedades de que un conjunto sea acotado, precompacto, compacto, etc., en un espacio vectorial de dimensión finita no dependen de la norma en él definida.

Ejercicios de la sección 1.1

1. Sea P_n el espacio vectorial de todas las funciones polinómicas reales de grado menor que n , y consideremos un intervalo cerrado $[a, b]$ (donde $a < b$) de $\mathbb{R}$.

a) Demostrar que P_n es un espacio de Banach con la norma

$$\|p\| = \|(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})\|,$$

en donde $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ es el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas son los coeficientes de p (ejemplo 1,1,4) y $\|\cdot\|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$.

b) Usando a), demostrar que P_n también es un espacio de Banach para cualquier norma en él definida. En particular, P_n es un espacio de Banach con la norma

$$\|p\| = \sup_{t \in [a, b]} |a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1}|.$$

c) Usando a) y b), concluya que si una sucesión (p_k) en P_n converge a una función real f , uniformemente sobre $[a, b]$, entonces $f \in P_n$ (o sea, f es una función polinómica real de grado menor que n) y cada coeficiente de p_k converge hacia el coeficiente correspondiente de f .

2. Sea K un espacio topológico compacto. Demostrar que el espacio $C(K; \mathbb{R}^n)$ de todas las aplicaciones continuas $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in K} \|f(x)\|.$$

3. Demuestre que el espacio $C_0(\mathbb{R})$ de todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto (esto es, tales que el conjunto $\{t \in \mathbb{R}; f(t) \neq 0\}$ es relativamente compacto) no es un espacio completo para la norma

$$\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

4. Sean S un conjunto cualquiera no vacío, $\mathcal{F}(S)$ la familia de todos los subconjuntos finitos de S y $c_0(S)$ el espacio de las funciones $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que para cada $\epsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{F}(S)$ tal que $|f(t)| < \epsilon$, para $t \in S \setminus F$. Demostrar que la función

$$f \longmapsto \|f\|_s = \max_{t \in S} |f(t)|$$

es una norma en $c_0(S)$, para la cual $c_0(S)$ es un espacio de Banach.

5. Demuestre que el espacio ℓ^∞ de todas las sucesiones acotadas de números complejos es un espacio de Banach con la norma

$$x = (x_n) \longmapsto \|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

6. Sean $I = [a, b]$ (donde $a < b$) un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$, y

$$\text{Lip}(\alpha) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{C}; M_f = \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} < \infty \right\}.$$

- a) Demostrar que el espacio $\text{Lip}(\alpha)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_1 = \sup_{t \in I} |f(t)| + M_f.$$

- b) Demostrar que $\text{Lip}(\alpha)$ también es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_2 = |f(a)| + M_f.$$

Sugerencia: Demostrar que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en el espacio $\text{Lip}(\alpha)$.

7. Demostrar que un subconjunto S de c_0 (ejemplo 1,1,6) es precompacto si y sólo si satisface las condiciones siguientes:

a) S es acotado, y

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|x_n|; x = (x_n) \in S\} = 0$.

1.2. Subespacios - Transformaciones lineales - Espacios cocientes

Si E es un espacio vectorial y S un subconjunto de E , entonces denotaremos por $[S]$ el subespacio lineal de E generado por S , o sea, el formado por todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S . Además, si $x_0 \in E$, denotaremos por $[x_0, S]$ el subespacio lineal de E generado por $\{x_0\} \cup S$. En particular, si S es un subespacio lineal de E , entonces se tiene que

$$[x_0, S] = \{\lambda x_0 + s; \lambda \in \mathbb{K}, s \in S\}.$$

Proposición 1.2.1. Sean E un espacio normado y F un subespacio lineal de E . Entonces la adherencia $\overline{F}$ de F también es un subespacio lineal de E .

Demostración. Sean $x \in \overline{F}$, $y \in \overline{F}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{K}$. Vamos a demostrar que $(\alpha x + \beta y) \in \overline{F}$. En efecto, existen sucesiones $(x_n), (y_n)$ en F convergentes a x e y , respectivamente. Como F es un subespacio lineal de E y las operaciones en E , adición y multiplicación por un escalar, son continuas, entonces $(\alpha x_n + \beta y_n)$ es una sucesión de elementos de F que converge a $\alpha x + \beta y$, de donde $(\alpha x + \beta y) \in \overline{F}$. $\square$

Un *subespacio cerrado* de un espacio normado E es un subespacio lineal F de E que es cerrado en el espacio métrico E .

Observación 1.2.1. En un espacio normado E , todo subespacio M de dimensión finita es un subespacio cerrado. En efecto, si $\dim M = n$, entonces M es isométricamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$, y por consiguiente M es un subespacio *completo* (luego cerrado) del espacio métrico E .

Definición 1.2.1. Sean E un espacio normado y F un subespacio cerrado de E . Se dice que una familia $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de F es *total* en F ,

si F es el subespacio lineal cerrado generado por la familia $(x_i)_{i \in I}$, o sea, si todo elemento de F se puede aproximar por una sucesión de elementos que son combinaciones lineales finitas de los $x_i, i \in I$.

Ejemplo 1.2.1. En $\mathbb{K}^n$ cualquier base es una familia total.

Ejemplo 1.2.2. En el espacio ℓ^p ($1 \leq p \leq \infty$), o en el espacio c_0 , denotemos $e_n (n \in \mathbb{N})$ al vector que tiene 1 como n -ésima componente y cuyas otras componentes son 0, ó sea:

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, \overset{\text{n-ésima}}{\underset{\uparrow}{1}}, 0, 0, \dots).$$

Es inmediato que la familia (e_n) es total en ℓ^p ($1 \leq p < \infty$). Sin embargo, (e_n) no es total en ℓ^∞ . En efecto, si $x = (1, 1, \dots, 1, \dots)$, entonces $x \in \ell^\infty$, pero $x \notin \overline{[(e_n)]}$, pues

$$[(e_n)] = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i; \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N} \right\}$$

y

$$\left\| x - \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\|_\infty = \sup \{ |1 - \alpha_1|, |1 - \alpha_2|, \dots, |1 - \alpha_m|, 1 \} \geq 1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, m$. Por consiguiente, ninguna sucesión de elementos de $[(e_n)]$ puede converger a x .

Ejemplo 1.2.3. Si I es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, entonces la familia de funciones $\{t \mapsto t^n; n \geq 0\}$ es total en el espacio $C(I, \mathbb{R})$ de todas las funciones reales continuas definidas en I (teorema de Weierstrass).

Definición 1.2.2. Se dice que una familia $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de un espacio normado E es *topológicamente libre* si $x_k \notin \overline{[\{x_i; i \neq k\}]}$, para todo $k \in I$.

Ejemplo 1.2.4. En ℓ^p ($1 \leq p \leq \infty$), la familia (e_n) es topológicamente libre. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$; si $\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ es cualquier combinación lineal finita de los vectores $e_n, n \neq k$, entonces la k -ésima componente del vector

$e_k - \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ tiene el valor de 1, luego

$$\left\| e_k - \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \right\|_p \geq 1,$$

cualesquiera que sean $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \dots, m$.² Por lo tanto, $e_k \notin \overline{\{e_n; n \neq k\}}$.

Es claro que cualquier familia topológicamente libre en un espacio normado es linealmente independiente. Sin embargo, la recíproca es falsa, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.5. En ℓ^2 la familia $\{e_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)\}$ es linealmente independiente, pero no topológicamente libre.

Proposición 1.2.2. Sean E, F espacios normados sobre $\mathbb{K}$, y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Si T es continua en el origen de E , entonces T es continua en E .

Demostración. Es consecuencia inmediata del hecho de que en un espacio normado, toda translación es un homeomorfismo del espacio sobre sí mismo. $\square$

Proposición 1.2.3. Sean E, F espacios normados sobre K . Para que una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ sea continua es necesario y suficiente que exista una constante real $\alpha > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq \alpha \|x\|,$$

para todo $x \in E$.

Demostración. Es inmediato que la condición es suficiente. La condición también es necesaria. En efecto, supongamos por reducción al absurdo, que la condición no se cumple; entonces, para todo entero $n \geq 1$, existirá un vector $x_n \in E$, tal que

$$\|T(x_n)\| > n \|x_n\|$$

Poniendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}$, se tiene que

$$y_n \rightarrow 0, \quad y, \quad \|T(y_n)\| = \frac{\|T(x_n)\|}{n \|x_n\|} > 1$$

Por consiguiente, T no es continua en el origen de E . $\square$

²se entiende que $\alpha_k = 0$, si $m \geq k$

Corolario 1.2.1. Si E y F son espacios normados sobre $\mathbb{K}$, toda aplicación lineal continua $T : E \longrightarrow F$ es uniformemente continua sobre E .

Observación 1.2.2. Si E y F son espacios normados, entonces una aplicación (o transformación) lineal continua $T : E \longrightarrow F$ también se llama aplicación lineal acotada u operador (lineal) acotado u operador (lineal) continuo. Las aplicaciones lineales continuas $T : E \longrightarrow F$ forman un espacio vectorial que se denota por $L(E; F)$. Es fácil verificar que la función

$$T \longmapsto \|T\| = \inf \{ \alpha > 0; \|T(x)\| \leq \alpha \|x\|, \forall x \in E \},$$

es una norma en $L(E; F)$. Además, valen las siguientes igualdades:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|. \quad (8)$$

En efecto, por una parte,

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1, x \neq 0} \|x\| \left(\left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \right) \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

de donde

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Por otra parte, tenemos que si $\alpha > 0$ es tal que $\|T(x)\| \leq \alpha \|x\|$ para todo $x \in E$, se tiene que $\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leq \alpha$, y por lo tanto

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leq \|T\|;$$

además, para $x \in E, x \neq 0$, tenemos que

$$\frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

de donde $\|T(x)\| \leq (\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|) \|x\|$ para todo $x \in E$, y por consiguiente

$$\|T\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

Teorema 1.2.1. Sean E, F espacios normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces la función

$$T \mapsto \|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

es una norma en $L(E; F)$. Además, si F es completo, entonces $L(E; F)$ es de Banach.

Demostración. Ejercicio

Definición 1.2.3. Sean E, F espacios normados y $T \in L(E; F)$ una aplicación lineal continua.

1. Se dice que T es un *isomorfismo* si es biyectiva y la aplicación inversa $T^{-1} : F \longrightarrow E$ es continua. Si, además $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, entonces se dice que T es un *isomorfismo isométrico*.
2. Se dice que T es un *homomorfismo topológico*, si $T : E \longrightarrow T(E)$ es una aplicación abierta de E sobre $T(E)$ (o sea, la imagen por T de todo abierto de E es un abierto en $T(E)$).

Teorema 1.2.2. Sea E un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\widehat{E}$ que contiene un subespacio denso E_0 isométricamente isomorfo a E . Además, $\widehat{E}$ es único, salvo isomorfismos isométricos.

Demostración. Demostremos primero la unicidad. En efecto, si $\widehat{F}$ es otro espacio de Banach que contiene también un subespacio denso F_0 isométricamente isomorfo a E , entonces E_0 y F_0 son isométricamente isomorfos. Luego, por continuidad uniforme, la isometría entre E_0 y F_0 se extiende a una isometría entre $\widehat{E}$ y $\widehat{F}$ (ejercicio 0,3,7) que también es un isomorfismo.

Demostremos ahora la existencia del espacio de Banach $\widehat{E}$: Sea d la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$ de E : $d(x, y) = \|x - y\|$. Por el teorema 0,3,1, existe un espacio métrico completo $(\widehat{E}, \widehat{d})$ (el completado de (E, d)) que contiene un subconjunto denso E_0 isométrico a E . Más precisamente, existe una aplicación $f : E \longrightarrow \widehat{E}$ tal que $f(E) = E_0$ es denso en $\widehat{E}$ y

$$\widehat{d}(f(x), f(y)) = \|x - y\| \quad (9)$$

para todo $x \in E$, y todo $y \in E$. Evidentemente, el conjunto E_0 es un espacio vectorial para las operaciones :

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(x + y), \\ \alpha f(x) &= f(\alpha x), \quad \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

La operación adición así definida en E_0 es uniformemente continua en $E_0 \times E_0$, pues

$$\begin{aligned} d(f(x+y), f(x_0+y_0)) &= \|(x+y)-(x_0+y_0)\| \leq \\ &\leq \|x-x_0\| + \|y-y_0\| = \\ &= \widehat{d}(f(x), f(x_0)) + \widehat{d}(f(y), f(y_0)), \end{aligned}$$

y para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, la aplicación

$$\dot{x} \in E_0 \longrightarrow \lambda \dot{x} \in E_0,$$

es uniformemente continua. En virtud de que E_0 es denso en $\widehat{E}$, se sigue que estas operaciones pueden ser extendidas a $\widehat{E}$ por continuidad uniforme, haciendo así de $\widehat{E}$ un espacio vectorial. Ahora bien, la función

$$\dot{x} \longmapsto \|\dot{x}\|_1 = \widehat{d}(\dot{x}, 0) \quad (= \|x\|, \text{ si } f(x) = \dot{x}),$$

es una norma en E_0 . Como las normas son funciones uniformemente continuas, y E_0 es denso en $\widehat{E}$, la norma $\|\cdot\|_1$ en E_0 se puede extender a una norma $\|\cdot\|_2$ en $\widehat{E}$ de la siguiente manera (ejercicio 0,3,7):

Si $\dot{x} \in \widehat{E}$, entonces existe una sucesión $(\dot{x}_n)$ de elementos de E_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{x}_n = \dot{x}$. Se define

$$\|\dot{x}\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\dot{x}_n\|_1.$$

La métrica $\widehat{d}$ en $\widehat{E}$ es la inducida por esta norma definida en $\widehat{E}$. En efecto, si $\dot{x} \in \widehat{E}$, $\dot{y} \in \widehat{E}$, y $(\dot{x}_n), (\dot{y}_n)$ son sucesiones en E_0 convergentes a $\dot{x}$ e $\dot{y}$, respectivamente, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\dot{x}, \dot{y}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(\dot{x}_n - \dot{y}_n, 0) = \\ &= \|\dot{x} - \dot{y}\|_2. \end{aligned}$$

Se concluye que $\widehat{E}$ es un espacio de Banach, y que E_0 es un subespacio denso de $\widehat{E}$, isométricamente isomorfo a E . $\square$

Definición 1.2.4. Sean E un espacio vectorial y M un subespacio lineal de E . En E se define la siguiente relación de equivalencia: dos elementos $x \in E$, $y \in E$ son *congruentes módulo M* , lo cual se denota $x \equiv y \pmod{M}$, si $x - y \in M$.

La clase de equivalencia $\dot{x}$ de un elemento $x \in E$ es el conjunto

$$\dot{x} = x + M = \{x + y; y \in M\}.$$

En el conjunto E/M de todas las clases de equivalencia, se definen las dos operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{x} + \dot{y} &= (x + y)^{\cdot}, \\ \lambda \dot{x} &= (\lambda x)^{\cdot}.\end{aligned}$$

Con estas operaciones, E/M es un espacio vectorial, llamado *espacio vectorial cociente* (o simplemente espacio cociente) de E por (o módulo) M . El vector nulo de E/M es el propio M .

Proposición 1.2.4. Sean E un espacio normado y M un subespacio cerrado de E . Entonces la función

$$\dot{x} = x + M \mapsto \|\dot{x}\| = \inf_{y \in M} \|x + y\|, \quad (10)$$

es una norma en el espacio E/M , llamada la norma cociente. Además, si E es completo, entonces E/M también es completo, y por lo tanto de Banach.

Demostración. Demostremos que la función (10) es una norma en E/M :

$N_1)$ $\|\dot{x}\| = 0 \iff \dot{x} = M$. En efecto, trivialmente, $\|\dot{0}\| = 0$. Ahora, dado $x \in E$ con $\|\dot{x}\| = 0$, tenemos: $\inf_{y \in M} \|x + y\| = 0$, de donde $x \in \overline{M} = M$, y por lo tanto $\dot{x} = \dot{0}$.

$N_2)$ $\|\lambda \dot{x}\| = |\lambda| \|\dot{x}\|$, para todo $x \in E/M$. En efecto,

$$\begin{aligned}\|\lambda \dot{x}\| &= \inf_{y \in M} \|\lambda x + y\| = \\ &= \inf_{y \in M} \|\lambda(x + y)\| = \\ &= |\lambda| \inf_{y \in M} \|x + y\| = \\ &= |\lambda| \|\dot{x}\|,\end{aligned}$$

de donde se sigue la afirmación.

$N_3)$ $\|\dot{x} + \dot{y}\| \leq \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\|$, para todo $\dot{x} \in E/M$ y todo $\dot{y} \in E/M$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existen $z_1 \in \dot{x}$, $z_2 \in \dot{y}$ tales que

$$\begin{aligned}\|z_1\| &< \|\dot{x}\| + \frac{\epsilon}{2}, \\ \|z_2\| &< \|\dot{y}\| + \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

luego

$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| < \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\| + \epsilon$, y, $(z_1 + z_2) \in \dot{x} + \dot{y}$. Por lo tanto, $\|\dot{x} + \dot{y}\| \leq \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\| + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, de donde

$$\|\dot{x} + \dot{y}\| \leq \|\dot{x}\| + \|\dot{y}\|.$$

Demostremos ahora que si E es de Banach, entonces E/M es también de Banach. En efecto, sea $(\dot{x}_n)$ es una sucesión de Cauchy en E/M . Entonces, existe una subsucesión $(\dot{x}_{n_k})$ de $(\dot{x}_n)$ tal que

$$\|\dot{x}_{n_{k+1}} - \dot{x}_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad (11)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Dejamos al lector verificar la siguiente afirmación: Si $\epsilon > 0$, $\dot{z} \in E/M$, $w \in E$, son tales que $\|\dot{z} - \dot{w}\| < \epsilon$, entonces existe un $x \in \dot{z}$ tal que $\|x - w\| < \epsilon$. Aplicando sucesivamente este resultado a la desigualdad (11), encontramos una sucesión (y_{n_k}) en E tal que $y_{n_k} \in \dot{x}_{n_k}$, y, $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se sigue (ejercicio 0,3,5) que (y_{n_k}) es una sucesión de Cauchy en E y por consiguiente, convergente a algún punto $x \in E$. Por lo tanto, se tiene que

$$\|\dot{x}_{n_k} - \dot{x}\| \leq \|y_{n_k} - x\| \rightarrow 0$$

luego $(\dot{x}_{n_k})$ es una subsucesión convergente de la sucesión de Cauchy $(\dot{x}_n)$, de donde la propia sucesión $(\dot{x}_n)$ es convergente (ejercicio 0,3,3). Se sigue que E/M es completo. $\square$

Proposición 1.2.5. Sean E un espacio normado y M un subespacio cerrado de E . Entonces, la aplicación canónica $\phi : E \longrightarrow E/M$, $\phi(x) = x + M$, es un homomorfismo topológico.

Demostración.

1. Demostremos primero que la imagen $\phi(V)$ por ϕ de toda vecindad V de 0 en E es una vecindad 0 en E/M . En efecto, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in E$,

$$\|x\| < \epsilon \implies x \in V.$$

Demostremos ahora que para $\dot{x} \in E/M$,

$$\|\dot{x}\| < \epsilon \implies \dot{x} \in \phi(V).$$

En efecto, si $\|\dot{x}\| < \epsilon$, existe $y \in \dot{x}$ con $\|y\| < \epsilon$; por lo tanto, $y \in V$, y $\dot{x} = \phi(y) \in \phi(V)$.

2. Sean ahora A un abierto cualquiera en E , $\dot{x} \in \phi(A)$, y $x_0 \in A$ tal que $\phi(x_0) = \dot{x}$. Como en un espacio normado toda translación es un homomorfismo, tenemos que el conjunto $A - x_0$ es una vecindad de 0 en E , de donde (parte 1)) el conjunto $\phi(A - x_0) = \phi(A) - \phi(x_0)$ es una vecindad de $\dot{0}$ en E/M , y por consiguiente $\phi(A)$ es una vecindad de $\phi(x_0) = \dot{x}$. Como $\dot{x}$ se escogió arbitrariamente en $\phi(A)$, se concluye que el conjunto $\phi(A)$ es abierto en E/M . $\square$

Proposición 1.2.6. Sean E, F espacios normados, $T \in L(E; F)$, $N = \ker(T)$ (núcleo de T), y $\phi : E \longrightarrow E/N$, la aplicación canónica. Entonces:

1. Existe una única aplicación lineal continua $\tilde{T} : E/N \longrightarrow F$ tal que $\tilde{T} \circ \phi = T$.
2. T es un homomorfismo topológico si y sólo si $\tilde{T}$ es un isomorfismo de E/N sobre $\tilde{T}(E/N) = T(E)$.

Demostración.

1. Se define $\tilde{T} : E/N \longrightarrow F$ así:

$$\tilde{T}(x + N) = T(x).$$

$\tilde{T}$ es una aplicación bien definida:

$$x - y \in N \implies \tilde{T}(x + N) = T(x) = T(y) = \tilde{T}(y + N).$$

Además, $\tilde{T}$ es lineal y por su propia definición, $\tilde{T} \circ \phi = T$. Finalmente, demostremos que $\tilde{T}$ es continua. En efecto, por la continuidad de T , existe $\alpha > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq \alpha\|x\|$, para todo $x \in E$. Por lo tanto, si $\dot{x} \in E/N$, entonces

$$\|\tilde{T}(\dot{x})\| = \|T(y)\| \leq \alpha\|y\|$$

para todo $y \in \dot{x}$. Se sigue que $\|\tilde{T}(\dot{x})\| \leq \alpha\|\dot{x}\|$, cualquiera que sea $\dot{x} \in E/N$, de donde $\tilde{T}$ es continua.

2. Supongamos que T es un homomorfismo topológico. Ya que $\tilde{T}$ es continua e inyectiva, sólo se tiene que mostrar que $\tilde{T}^{-1}$ es continua en $\tilde{T}(E/N) = T(E)$, o, equivalentemente, que $\tilde{T}$ es una aplicación abierta de E/N sobre $T(E)$. En efecto, sea A un abierto en E/N ; entonces, $\phi^{-1}(A)$ es un abierto en E , luego, por hipótesis, $\tilde{T}(A) = T(\phi^{-1}(A))$ es un abierto en $T(E)$.

Recíprocamente, supongamos que $\tilde{T}$ es un isomorfismo y sea A un abierto en E . Entonces, $\phi(A)$ es un abierto en E/N , luego, por hipótesis, $T(A) = \tilde{T}(\phi(A))$ es un abierto en $T(E)$. Por lo tanto, T es un homomorfismo topológico. $\square$

Observación 1.2.3. Con las notaciones de la proposición anterior, vale la siguiente igualdad:

$$\{\tilde{T}(\dot{x})\} = T(\phi^{-1}(\dot{x})),$$

para todo $\dot{x} \in E/N$. Más generalmente, se tiene que

$$\tilde{T}(X) = T(\phi^{-1}(X)),$$

para cualquier subconjunto X de E/N .

Si un espacio vectorial E tiene dimensión finita, entonces la bola unitaria de E es precompacta. La recíproca de este hecho es verdadera y es el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. (Riesz) *Si en un espacio normado E la bola unitaria (abierta o cerrada) es precompacta, entonces E tiene dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que la bola unitaria abierta de E , $B = \{x \in E; \|x\| < 1\}$, es un conjunto precompacto. Entonces para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existen elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ en E tales que

$$B \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{1}{2}}(a_j) = \bigcup_{j=1}^n (a_j + \frac{1}{2}B). \quad (12)$$

Sea $M = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ el subespacio vectorial de E generado por el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Demostremos que $E = M$ y por consiguiente, que E es de dimensión finita. En efecto, de (12) se tiene la siguiente relación: $B \subset M + \frac{1}{2}B$. Usando esta relación se muestra inductivamente que

$$B \subset M + \frac{1}{2^k}B$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que

$$B \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} (M + \frac{1}{2^k}B) = \overline{M} = M$$

esto es, $B \subset M$ y por consiguiente $E = M$. □

Observación 1.2.4. Si alguna bola (abierta o cerrada) en un espacio normado E es precompacta, entonces también lo es la bola unitaria de E , y por consiguiente, cualquier bola de E . En efecto, supongamos que la bola abierta $B_\delta(x_0)$ de centro x_0 y radio $\delta > 0$ es precompacta y sea $\epsilon > 0$. Entonces, existen elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ en E tales que $B_\delta(x_0) \subset \cup_{i=1}^n B_{\epsilon\delta}(a_i)$. Demostremos que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(b_i)$$

en donde $b_i = \frac{a_i - x_0}{\delta}$, $i = 1, 2, \dots, n$. En efecto, sea $x \in B$. Como $B_\delta(x_0) = x_0 + \delta B$, entonces $x_0 + \delta x = y \in B_\delta(x_0)$. Por consiguiente, existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x_0 + \delta x = y \in B_{\epsilon\delta}(a_i)$, de donde se tiene que

$$x = \frac{y - x_0}{\delta}, \quad y, \quad \|y - a_i\| < \epsilon\delta$$

Por lo tanto se sigue que

$$\|x - b_i\| = \left\| \frac{y - a_i}{\delta} \right\| < \epsilon.$$

De esta observación y del teorema 1,2,3, resulta el siguiente corolario.

Corolario 1.2.2. *En un espacio normado E de dimensión infinita, todo subconjunto precompacto (en particular, compacto) tiene interior vacío.*

Ejercicios de la sección 1.2

1. ¿Cuál es el subespacio lineal cerrado de ℓ^∞ generado por los vectores unitarios $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$?
2. Sean E, F, G espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, y $B : E \times F \longrightarrow G$ una aplicación bilineal. Demostrar que B es continua en el espacio producto $E \times F$ si y sólo si existe $m > 0$ tal que $\|B(x, y)\| \leq m\|x\|\|y\|$, para todo $x \in E$ y todo $y \in F$.
Sugerencia: $B(x, y) - B(a, b) = B(x - a, y - b) + B(x - a, b) + B(a, y - b)$.
3. Sean E un espacio normado y $M \subset E$ un subespacio completo de E . Demostrar que si el espacio cociente E/M es completo, entonces E es un espacio de Banach.
4. Demuestre que la inclusión canónica de ℓ^1 en c_0 es una aplicación lineal y continua, pero no un homomorfismo topológico.
5. Sean E un espacio normado y F un subespacio lineal de E . Para cada punto $x \in E$, se define la distancia de x al subespacio F como el número $d(x, F) = \inf \{\|x - y\|; y \in F\}$.
 - a) Demostrar que $d(\alpha x, F) = |\alpha|d(x, F)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $x \in E$.
 - b) Demostrar que si existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(x, F) \leq \alpha\|x\|$, para todo $x \in E$, entonces F es denso en E . *Sugerencia:* Dado $x \in E$, construir inductivamente una sucesión (x_n) en F tal que, para un $\beta \in (\alpha, 1)$ fijado,

$$\left\| \left(x - \sum_{j=1}^n x_j \right) - x_{n+1} \right\| \leq \beta \left\| x - \sum_{j=1}^n x_j \right\|.$$

- c) Usando b) , deducir que si la bola unitaria abierta B de E es precompacta, entonces E es de dimensión finita.

Sugerencia: Para $\epsilon = \frac{1}{2}$ escoger elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ en B tales que $B \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\frac{1}{2}}(a_j)$. Si $F = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, demostrar que F es denso en E , usando b).

1.3. El espacio dual - Teorema de Hahn-Banach

Definición 1.3.1. El espacio dual (topológico) E' de un espacio normado E es el espacio $L(E; \mathbb{K})$ de todas las formas lineales continuas sobre E . La norma en E' es la función

$$\phi \longmapsto \|\phi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\phi(x)|.$$

Nótese que el dual (topológico) de cualquier espacio normado E es un espacio de Banach (1,3,1).

Definición 1.3.2. Sea E un espacio vectorial. Se dice que un subespacio lineal H de E es un *hiperplano* en E cuando,

1. $H \neq E$, y
2. Si M es un subespacio lineal de E tal que $H \subset M \subset E$, entonces $M = H$, o, $M = E$. En otras palabras, un hiperplano en E es un subespacio lineal propio maximal de E .

Proposición 1.3.1. Sean E un espacio vectorial y H un subespacio lineal de E . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. H es un hiperplano en E
2. $\dim(E/H) = 1$
3. H es el núcleo de una forma lineal sobre E , no nula.

Demostración. $1 \implies 2$: Supongamos que H es un hiperplano en E y sea $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin H$. Entonces, el subespacio lineal M de E generado por H y x_0 ,

$$M = [x_0, H] = \{h + \lambda x_0; h \in H, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

contiene estrictamente a H . Se tiene entonces, $M = E$. Demostremos que $E/H = [x_0 + H]$ y por consiguiente, $\dim(E/H) = 1$. En efecto, dado $x \in E$,

existen $h \in H$, y, $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $x = h + \lambda x_0$; por lo tanto, $x + H = \lambda(x_0 + H)$, de donde $E/H = [x_0 + H]$.

$2 \implies 3$: Supongamos que $E/H = [x_0 + H]$, en donde $x_0 \notin H$. Se sigue que $E = [x_0, H]$. La función

$$x = h + \lambda x_0 \xrightarrow{\phi} \phi(x) = \lambda$$

es una forma lineal sobre E no nula, y $H = \phi^{-1}(0)$.

$3 \implies 1$: Supongamos que $H = \phi^{-1}(0)$ es el núcleo de una forma lineal no nula $\phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Demostremos que H es un hiperplano en E . En efecto,

a) Evidentemente, $H \neq E$.

b) Ahora, sea M un subespacio lineal de E tal que $H \subset M \subset E$. Supongamos que $M \neq E$, y demostremos que $M = H$. Para esto sólo falta mostrar que $M \subset H$, esto es, que $\phi(x) = 0$ para todo $x \in M$. En efecto, supongamos que existe $x \in M$ tal que $\phi(x) \neq 0$. Como $M \neq E$, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin M$. Por otra parte, ya que $\left(x - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}x_0\right) \in M$ (pues pertenece a $H \subset M$) y vale la identidad

$$M \ni x = \left(x - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}x_0\right) + \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}x_0$$

se tiene que $\frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}x_0 \in M$, de donde $x_0 \in M$, lo que es una contradicción. Por consiguiente, $M \subset H$. Se sigue que H es un hiperplano. $\square$

Lema 1.3.1. Sean E un espacio normado real, M un subespacio lineal propio de E , $f \in M'$ una forma lineal continua sobre M , $x_0 \in E$, $x_0 \notin M$ y $N = [x_0, M] = \{m + \lambda x_0; m \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}$ el subespacio lineal de E generado por N y x_0 . Entonces existe $g \in N'$, forma lineal continua sobre N , extensión de f , tal que $\|g\| = \|f\|$.

Demostración. Para todo $x \in M$ y todo $y \in M$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x - y) \leq \\ &\leq \|f\| \|x - y\| \leq \\ &\leq \|f\| (\|x + x_0\| + \|-x_0 - y\|) = \\ &= \|f\| \|x + x_0\| + \|f\| \|y + x_0\| \end{aligned}$$

o sea,

$$-f(y) - \|f\| \|y + x_0\| \leq -f(x) + \|f\| \|x + x_0\|; \quad (1)$$

sean

$$\xi = \sup_{y \in M} (-f(y) - \|f\| \|y + x_0\|),$$

y,

$$\eta = \inf_{x \in M} (-f(x) + \|f\| \|x + x_0\|).$$

Se sigue de (1) que $\xi \leq \eta$. Escogemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \leq c \leq \eta$ y sea $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(m + \lambda x_0) = f(m) + \lambda c, \quad m \in M, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Evidentemente la g así definida es lineal y extiende a f . Demostremos que g es continua y $\|g\| \leq \|f\|$. En efecto, para todo $x \in M$, se tiene que

$$-f(x) - \|f\| \|x + x_0\| \leq \xi \leq c \leq \eta \leq -f(x) + \|f\| \|x + x_0\|,$$

de donde,

$$|f(x) + c| \leq \|f\| \|x + x_0\|, \quad (2)$$

para todo $x \in M$. Por lo tanto, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, y $x \in M$, entonces, teniendo en cuenta (2), se tiene que

$$\begin{aligned} |g(x + \lambda x_0)| &= |f(x) + \lambda c| = \\ &= |\lambda| |f(\lambda^{-1}x) + c| \leq \\ &\leq |\lambda| \|f\| \|\lambda^{-1}x + x_0\| = \\ &= \|f\| \|x + \lambda x_0\|, \end{aligned}$$

o sea, $|g(z)| \leq \|f\| \|z\|$, para todo $z \in N$. Por consiguiente, g es continua y $\|g\| \leq \|f\|$. Por otra parte, como g es una extensión de f , entonces se tiene que $\|g\| \geq \|f\|$ y por consiguiente, $\|g\| = \|f\|$. $\square$

Teorema 1.3.1. (Hahn - Banach). *Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, M un subespacio lineal de E y $f \in M'$ una forma lineal continua sobre M . Entonces, existe $g \in E'$, forma lineal continua sobre E , extensión de f , tal que $\|g\| = \|f\|$.*

Demostración. La demostración se hará en dos partes, primero para el caso real y luego para el caso complejo.

1. Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de los pares (h, N) tales que N es un subespacio lineal de E , $N \supset M$, $h : N \longrightarrow \mathbb{R}$, es lineal continua, $h \supset f$ y $\|h\| = \|f\|$. Se define en $\mathcal{F}$ la siguiente relación de orden:

$$(h, N) \leq (h_1, N_1) \iff N_1 \supset N, \quad h_1 \supset h.$$

El conjunto $\mathcal{F}$ tiene las dos propiedades siguientes:

- a) $\mathcal{F} \neq \phi$, pues $(f, M) \in \mathcal{F}$
- b) $(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto inductivo, esto es, la relación $\leq$ es de orden parcial y toda familia en $\mathcal{F}$ totalmente ordenada posee una cota superior en $\mathcal{F}$. En efecto, sea $((h_\alpha, N_\alpha))_{\alpha \in L}$ una familia en $\mathcal{F}$, totalmente ordenada. Sea $N = \cup_{\alpha \in L} N_\alpha$ y definimos la función $h : N \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = h_\alpha(x)$$

si $x \in N_\alpha$, para $\alpha \in L$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

- i) N es un subespacio lineal de E que contiene a M . En efecto, en virtud de que dados $\alpha \in L$, $\beta \in L$, se tiene que $N_\alpha \subset N_\beta$, ó, $N_\beta \subset N_\alpha$, entonces se sigue que N es un subespacio lineal de E . Además, $N_\alpha \supset M$, para todo $\alpha \in L$, luego $N \supset M$.
- ii) h está bien definida, esto es, su definición no depende de la elección de α . En efecto, si $x \in N_\alpha$, y también $x \in N_\beta$, entonces se tiene que

$$h(x) = h_\alpha(x), \quad \text{y}, \quad h(x) = h_\beta(x).$$

Ahora bien, $N_\alpha \subset N_\beta$ y $h_\beta \supset h_\alpha$, o, $N_\beta \subset N_\alpha$ y $h_\alpha \supset h_\beta$. Por consiguiente, en ambos casos se tiene que $h_\alpha(x) = h_\beta(x)$, de donde se sigue la afirmación.

- iii) La función $h : N \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal, continua, $h \supset f$, y $\|h\| = \|f\|$. En efecto, sean $x \in N_\alpha$, y $y \in N_\beta$. Supongamos, por ejemplo, que $N_\beta \subset N_\alpha$ y $h_\alpha \supset h_\beta$. Entonces, $h(x) + h(y) = h_\alpha(x) + h_\beta(y) = h_\alpha(x) + h_\alpha(y) = h_\alpha(x + y) = h(x + y)$, de donde h es lineal. Como para cada $\alpha \in L$,

$h_\alpha \supset f$, entonces se sigue que $h \supset f$, luego $\|h\| \geq \|f\|$.
Además

$$\begin{aligned} |h(x)| &= |h_\alpha(x)| \leq \\ &\leq \|h_\alpha\| \|x\| = \\ &= \|f\| \|x\|, \end{aligned}$$

para todo $x \in N$, de donde $\|h\| \leq \|f\|$ y por consiguiente $\|h\| = \|f\|$. De las afirmaciones anteriores se sigue que (h, N) es una cota superior en $\mathcal{F}$ de la familia $((h_\alpha, N_\alpha))_{\alpha \in L}$. Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal (g, N) del conjunto $\mathcal{F}$. Ahora bien, $N = E$, pues de lo contrario, por el lema, existiría una extensión h de g definida sobre un subespacio que contiene propiamente a N y tal que $\|h\| = \|g\| = \|f\|$. Por consiguiente, (g, N) no sería un elemento maximal de $\mathcal{F}$, lo que es una contradicción. Esto completa la demostración del teorema en el caso real.

2. Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea E_0 el espacio normado real subyacente al espacio complejo E (esto es, el espacio normado E como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$). Análogamente, sea M_0 el espacio vectorial real subyacente al espacio complejo M . Se tiene que M_0 es un subespacio lineal de E_0 .

Si $f_1 = \operatorname{Re}(f)$ y $f_2 = \operatorname{Im}(f)$, entonces f_1 y f_2 son formas $\mathbb{R}$ -lineales reales sobre M_0 y $f = f_1 + if_2$. Demostremos que $f_2(x) = -f_1(ix)$, para todo $x \in M_0$ y que por consiguiente, se tiene que

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix), \quad (3)$$

para todo $x \in M_0$. En efecto, para todo $x \in M_0$, se tiene que

$$f_1(ix) + if_2(ix) = f(ix) = if(x) = if_1(x) - f_2(x)$$

de donde $f_2(x) = -f_1(ix)$, para todo $x \in M_0$.

Por otra parte, como

$$|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\|,$$

para todo $x \in M_0$, entonces f_1 es una forma $\mathbb{R}$ -lineal real continua, con $\|f_1\| \leq \|f\|$, luego, por el primer caso, existe una forma $\mathbb{R}$ -lineal real

continua g_1 sobre E_0 tal que $g_1 \supset f_1$ y $\|g_1\| = \|f_1\|$. Se define la forma $\mathbb{R}$ -lineal compleja $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(x) = g_1(x) - ig_1(ix), \quad x \in E. \quad (4)$$

La función g es $\mathbb{C}$ -lineal. Para esto basta probar que $g(ix) = ig(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} g(ix) &= g_1(ix) - ig_1(-x) = \\ &= g_1(ix) + ig_1(x) = \\ &= i[g_1(x) - ig_1(ix)] = \\ &= ig(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, de donde se sigue la afirmación.

Comparando las igualdades (3) y (4), y teniendo en cuenta que $g_1 \supset f_1$, se tiene que $g \supset f$, luego $\|g\| \geq \|f\|$. Finalmente, demostremos que $\|g\| = \|f\|$. En efecto, sean $x \in E$ y $g(x) = |g(x)|e^{i\theta}$, en donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces,

$$|g(x)| = e^{-i\theta}g(x) = g(e^{-i\theta}x) = g_1(e^{-i\theta}x) \leq \|g_1\| \|x\| \leq \|f\| \|x\|,$$

de donde $\|g\| \leq \|f\|$ y por consiguiente, $\|g\| = \|f\|$. Esto termina la demostración del teorema. $\square$

Corolario 1.3.1. Sean E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, M un subespacio cerrado de E y $x_0 \in E$, $x_0 \notin M$. Entonces existe $f \in E'$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(M) = \{0\}$.

Demostración. Sea N el subespacio lineal de E generado por x_0 y M , esto es,

$$N = \{y + \lambda x_0; y \in M, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

La forma lineal $g : N \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$g(y + \lambda x_0) = \lambda, \quad y \in M, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

es continua. En efecto, como M es cerrado y $x_0 \notin M$, entonces

$$\alpha = \inf_{y \in M} \|y + x_0\| = d(x_0, M) > 0.$$

Ahora bien, si $y \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, entonces se tiene que

$$\|y + \lambda x_0\| = |\lambda| \|\lambda^{-1}y + x_0\| \geq \alpha|\lambda| = \alpha\|g(y + \lambda x_0)\|,$$

o sea, $|g(z)| \leq \frac{1}{\alpha}\|z\|$, para todo $z \in N$, de donde g es continua. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $f \in E'$ tal que $f \supset g$ y $\|f\| = \|g\|$. Evidentemente, $f(x_0) = 1$ y $f(M) = \{0\}$. $\square$

Corolario 1.3.2. Sean E un espacio normado, M un subespacio cerrado de E y G un subconjunto de M . Para que G sea total en M es necesario y suficiente que toda forma lineal continua sobre E que se anule sobre G , también se anule sobre M .

Demostración. Supongamos que G es total en M y sea $f \in E'$ tal que $f(G) = \{0\}$. Sean $x \in M$ y $\epsilon > 0$ cualquiera. Existe una combinación lineal $\sum \lambda_i x_i$, en donde $x_i \in G$ y $\lambda_i = 0$, excepto para un número finito de índices i , tal que

$$\left\|x - \sum \lambda_i x_i\right\| < \frac{\epsilon}{1 + \|f\|}$$

Por lo tanto,

$$|f(x)| = \left|f\left(x - \sum \lambda_i x_i\right)\right| \leq \|f\| \left\|x - \sum \lambda_i x_i\right\| < \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Por consiguiente, $f(x) = 0$, cualquiera que sea $x \in M$, luego la condición es necesaria.

Recíprocamente, supongamos que G no es total en M . Por consiguiente, si $N = \overline{[G]}$, entonces N es un subespacio cerrado de M y existe $x_0 \in M$, con $x_0 \notin N$; luego, por el corolario 1,3,1, existe $f \in E'$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(N) = \{0\}$. En particular, $f(G) = \{0\}$ y $f(M) \neq \{0\}$. $\square$

Corolario 1.3.3. Una familia $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de un espacio normado E es topológicamente libre si y sólo si existe una familia $(f_i)_{i \in I} \subset E'$ tal que $f_i(x_k) = \delta_{ik}$.

Demostración. Supongamos que la familia $(x_i)_{i \in I}$ es topológicamente libre y sean $M_i = \overline{[x_k; k \neq i]}$, $i \in I$. Por hipótesis, $x_i \notin M_i$, luego existe $f_i \in E'$, $i \in I$, tal que $f_i(x_i) = 1$ y $f_i(M_i) = \{0\}$. Por consiguiente, $f_i(x_k) = \delta_{ik}$. Recíprocamente, supongamos que la familia $(x_i)_{i \in I}$ no es topológicamente libre. Entonces, existe $k \in I$ tal que $x_k \in \overline{[x_i; i \neq k]} = M_k$, luego por el corolario 1,3,2, se sigue que si $f \in E'$ y $f(x_i) = 0$, para $i \neq k$, entonces

$$f(x_k) = 0. \quad \square$$

Ejemplo 1.3.1. Si E es un espacio normado no trivial (esto es, $E \neq \{0\}$), entonces el teorema de Hahn-Banach nos asegura la existencia de formas lineales continuas no nulas sobre E . En efecto, sea $x_1 \in E$, $x_1 \neq 0$, y $M = [x_1]$. La función $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ definida por $f(\lambda x_1) = \lambda$, es una forma lineal continua sobre M , no nula (observe que $\|f\| = \frac{1}{\|x_1\|}$). Por el teorema de Hahn-Banach, existe $g \in E'$ tal que $g \supset f$ y $\|g\| = \|f\| = \frac{1}{\|x_1\|}$. Por consiguiente, g es una forma lineal continua no nula sobre E .

Ejemplo 1.3.2. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces la dimensión algebraica de E es por lo menos $2^{\aleph_0}$, el cardinal de los números reales. En efecto:

1. Como la dimensión de E es infinita, entonces existe una sucesión (H_n) estrictamente decreciente de subespacios cerrados de E ,

$$E = H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_n \supsetneq \dots,$$

y una sucesión (x_n) en E tal que $x_n \in H_{n-1} - H_n$, y, $\|x_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $f_1 : E \rightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua no nula. Entonces, $H_1 = \ker(f_1)$ es un hiperplano cerrado de E (de dimensión infinita). Se escoge $x_1 \in E - H_1$ con $\|x_1\| = 1$. Sea $f_2 : H_1 \rightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua no nula. Entonces $H_2 = \ker(f_2)$ es un hiperplano cerrado de H_1 (de dimensión infinita). Se escoge $x_2 \in H_1 - H_2$ con $\|x_2\| = \frac{1}{2}$. Supongamos, por inducción que hemos encontrado subespacios cerrados $E = H_0 \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \dots \supsetneq H_n$ y elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de E , en donde H_i es un hiperplano cerrado de H_{i-1} , de dimensión infinita, $x_i \in H_{i-1} - H_i$ y $\|x_i\| = \frac{1}{2^{i-1}}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Si $f_{n+1} : H_n \rightarrow \mathbb{K}$ es una forma lineal continua no nula, entonces $H_{n+1} = \ker(f_{n+1})$ es un hiperplano cerrado de H_n , de dimensión infinita. Se escoge $x_{n+1} \in H_n - H_{n+1}$ con $\|x_{n+1}\| = \frac{1}{2^n}$.

2. Como la sucesión (H_n) es decreciente y $x_n \in H_{n-1} - H_n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} x_i &\notin H_n, & \text{si } i \leq n, \\ x_i &\in H_n, & \text{si } i > n, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Si $(\lambda_n) \in \ell^\infty$, entonces la sucesión (y_m) de E , en donde $y_m = \sum_{n=1}^m \lambda_n x_n$, es de Cauchy en E y por consiguiente, convergente en E (en este caso se dice que la serie $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n$ es convergente en E). Sea

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \lambda_n x_n.$$

La aplicación

$$\begin{aligned} T : \ell^\infty &\longrightarrow E \\ (\lambda_n) &\longmapsto T((\lambda_n)) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n, \end{aligned}$$

es lineal (y continua). Además, T es inyectiva. En efecto, supongamos $T((\lambda_n)) = 0$, esto es,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \lambda_n x_n = 0 \quad (4)$$

Entonces:

- a) $\lambda_1 = 0$. En efecto, dado $\epsilon > 0$, por (4), existe $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 > 1$, tal que

$$\left\| \lambda_1 x_1 - \sum_{n=2}^{m_0} (-\lambda_n x_n) \right\| < \epsilon.$$

Por otro lado, la parte 2) en el caso $n = 1$ implica que $x_2, x_3, \dots, x_{m_0}$ son elementos de H_1 , luego $\sum_{n=2}^{m_0} (-\lambda_n x_n) \in H_1$. Se sigue que $\lambda_1 x_1 \in \overline{H_1} = H_1$, de donde $\lambda_1 = 0$, pues $x_1 \notin H_1$.

- b) Supongamos, por inducción, que hemos demostrado que $\lambda_i = 0$, para $i = 1, 2, \dots, m$. De (4) se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m+1}^k \lambda_n x_n = 0$. Análogamente, como en a), usando 2) en el caso $n = m+1$, se muestra que $\lambda_{m+1} x_{m+1} \in \overline{H_{m+2}} = H_{m+2}$, de donde $\lambda_{m+1} = 0$, pues $x_{m+1} \notin H_{m+2}$. Se sigue que $\lambda_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y por consiguiente, T es inyectiva. Ahora bien, la familia $\{(t^n)_n; 0 < t < 1\}$ en ℓ^∞ es linealmente independiente y, siendo $T : \ell^\infty \longrightarrow E$ lineal e inyectiva, se sigue que $\dim E \geq 2^{\aleph_0}$.³ $\square$

³Admitiendo la hipótesis del continuo, se puede demostrar esta afirmación como consecuencia del teorema de Baire (Ejercicio 1.3.17)

Ejemplo 1.3.3. Sean E un espacio vectorial y $f, f_1, f_2, \dots, f_n : E \longrightarrow \mathbb{K}$, $n + 1$ formas lineales sobre E tales que

$$\ker(f) \supset \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i)$$

esto es, $f_i(x) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, implica que $f(x) = 0$. Entonces, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

En efecto, sea $T : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ la aplicación lineal definida de la siguiente manera: $T(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, $x \in E$. La fórmula $L(T(x)) = f(x)$ define entonces una forma lineal L sobre $T(E)$, que podemos extender a una forma lineal Λ sobre $\mathbb{K}^n$. Los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ buscados son los que verifican la igualdad

$$\Lambda(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i,$$

para todo $y \in \mathbb{K}^n$.

Ejemplo 1.3.4. En el espacio $C[0, 2\pi]$ de todas las funciones continuas complejas definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$, la familia de funciones

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\},$$

es topológicamente libre. En efecto, sea $(F_0, F_1, \dots, G_1, G_2, \dots)$ la familia de formas lineales continuas en $C[0, 2\pi]$ definida así:

$$\begin{aligned} F_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \\ F_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n \geq 1, \\ G_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces, se tienen las siguientes igualdades:

$$F_0(1) = 1; \quad F_0(\sin(nx)) = 0 = F_0(\cos(nx)), \quad n \geq 1$$

$$\begin{aligned} F_n(\cos(mx)) &= \delta_{nm}, & F_n(\sin(mx)) &= 0 (m \geq 1), \\ G_n(\sin(mx)) &= \delta_{nm}, & G_n(\cos(mx)) &= 0 (m \geq 1), \end{aligned}$$

de donde por el corolario 1,3,3 del teorema de Hahn-Banach, la familia $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$ es topológicamente libre.

Ejemplo 1.3.5. El espacio dual $(\ell^p)'$ de ℓ^p ($1 < p < \infty$) es isométricamente isomorfo a ℓ^q , en donde q es el exponente conjugado de p , esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En efecto, se define la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \ell^q &\longrightarrow (\ell^p)' \\ f = (\alpha_n) &\longmapsto \phi(f) = \tilde{f} \end{aligned}$$

en donde

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \quad x = (x_n) \in \ell^p \quad (5)$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. ϕ está bien definida, esto es, la serie en el lado derecho de (5) es absolutamente convergente. Además, $\|\phi(f)\| \leq \|f\|_q$, $f \in \ell^q$. En efecto por la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n| &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f\|_q \|x\|_p, \end{aligned}$$

de donde ϕ está bien definida y además, $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_q \|x\|_p$, para todo $x \in \ell^p$, luego $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|_q$.

2. ϕ es sobreyectiva y $\|\phi(f)\| \geq \|f\|_q$, para todo $f \in \ell^q$, de donde $\|\phi(f)\| = \|f\|_q$, para todo $f \in \ell^q$, y por consiguiente ϕ es isomorfismo isométrico: En efecto, sean $\tilde{f} \in (\ell^p)'$, $\alpha_n = \tilde{f}(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, y $f = (\alpha_n)$; para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $0 \leq \theta_n \leq 2\pi$ tal que $\alpha_n = |\alpha_n| e^{i\theta_n}$. Sea

$$y^{(m)} = \sum_{k=1}^m \beta_k e_k = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, 0, \dots), \quad m \in \mathbb{N},$$

en donde $\beta_k = e^{-i\theta_k} |\alpha_k|^{q-1}$, $k = 1, 2, \dots, m$; se tiene que

$$\tilde{f}(y^{(m)}) = \sum_{k=1}^m |\alpha_k|^q,$$

y por consiguiente,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m |\alpha_k|^q &= \left| \tilde{f}(y^{(m)}) \right| \leq \|\tilde{f}\| \|y^{(m)}\|_p = \\ &= \|\tilde{f}\| \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|\tilde{f}\| \left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\left(\sum_{k=1}^m |\alpha_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\tilde{f}\|,$$

cualquiera que sea $m \in \mathbb{N}$. Se concluye que $f = (\alpha_n) \in \ell^q$ y que $\|f\|_q \leq \|\tilde{f}\|$. Finalmente, demostremos que $\phi(f) = \tilde{f}$. En efecto, si $x = (x_n) \in \ell^p$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \tilde{f} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m x_n e_n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m x_n \tilde{f}(e_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \end{aligned}$$

siendo que la última igualdad es válida por el hecho de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ es (absolutamente) convergente (parte 1). Se sigue que $\phi(f) = \tilde{f}$. Esto completa el ejemplo.

Usualmente se identifica $(\ell^p)'$ ($1 < p < \infty$) con ℓ^q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$.

Ejemplo 1.3.6.

1. El espacio dual $(\ell^1)'$ de ℓ^1 es isométricamente isomorfo a ℓ^∞ . En efecto, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \ell^\infty &\longrightarrow (\ell^1)' \\ f = (\alpha_n) &\longmapsto \phi(f) = \tilde{f}, \end{aligned}$$

en donde

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \quad x = (x_n) \in \ell^1,$$

es un isomorfismo isométrico. (Ejercicio 1,3,9)

2. El espacio dual $(c_0)'$ de c_0 es isométricamente isomorfo a ℓ^1 . En efecto, la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : \ell^1 &\longrightarrow (c_0)' \\ f = (\alpha_n) &\longmapsto \psi(f) = \tilde{f}, \end{aligned}$$

en donde

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \quad x = (x_n) \in c_0$$

es un isomorfismo isométrico. (Ejercicio 1,3,9)

Definición 1.3.3. Se dice que un espacio normado E es *separable* si E como espacio métrico es separable, esto es, posee un subconjunto enumerable denso.

Proposición 1.3.2. Si un espacio normado E posee un subconjunto enumerable total, entonces E es separable.

Demostración. Sean $S = (x_n)$ un subconjunto enumerable total en E y L un subconjunto enumerable denso en el cuerpo $\mathbb{K}$. Denotemos por M el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de S , con coeficientes en L , esto es,

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i; t_i \in L, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Se sigue que M es un subconjunto enumerable de E . Además, M es denso en E . En efecto, sean $x \in E$ y $\epsilon > 0$ cualesquiera. Como $E = \overline{[S]}$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ en $\mathbb{K}$, tales que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora bien, como L es denso en $\mathbb{K}$, existen escalares $t_1, t_2, \dots, t_n$ en L tales que

$$|t_i - \alpha_i| < \frac{\epsilon}{2(\beta + 1)n}, i = 1, 2, \dots, n,$$

en donde $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$. Por consiguiente, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{i=1}^n t_i x_i \right\| &= \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n (t_i - \alpha_i) x_i \right\| \leq \\ &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| + \sum_{i=1}^n |t_i - \alpha_i| \|x_i\| < \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Además, $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ es un elemento de M . Se sigue que M es denso en E , luego E es separable. $\square$

Ejemplo 1.3.7. Los espacios ℓ^p ($1 \leq p < \infty$) y c_0 son separables, pues poseen un subconjunto enumerable total, a saber, (e_n) .

Ejemplo 1.3.8. El espacio ℓ^∞ no es separable. En efecto, el conjunto

$$S = \{(x_n) \in \ell^\infty; x_n = 1 \text{ ó } x_n = 0\} = 2^{\mathbb{N}},$$

es discreto, ya que cualesquiera que sean $x, y \in S$,

$$x \neq y \implies \|x - y\|_\infty = 1.$$

Además, S no es enumerable, de donde se sigue que ℓ^∞ no puede poseer un subconjunto enumerable denso.

Obsérvese que ℓ^1 es separable y $(\ell^1)' = \ell^\infty$ no es separable. Por consiguiente, el dual de un espacio separable puede no ser separable. Sin embargo, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.3.3. Si el dual E' de un espacio normado E es separable, entonces E es separable.

Demostración. Sean (f_n) un subconjunto enumerable denso en E' , con $f_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\|f_n\| > \frac{\|f_n\|}{2}$, existe $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| \leq 1$, y, $|f_n(x_n)| > \frac{\|f_n\|}{2}$. Demostremos que el conjunto (x_n) es total en E , de donde, por la proposición 1,3,2, E es separable. En efecto, sea $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua tal que $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (f_n) es denso en E' , existe una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\| = 0$. Además, como

$$\frac{\|f_{n_k}\|}{2} < |f_{n_k}(x_{n_k})| = |(f - f_{n_k})(x_{n_k})| \leq \|f - f_{n_k}\|$$

se sigue que $\|f\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\| = 0$, esto es $f \equiv 0$. Por lo tanto, (x_n) es total en E (corolario 1,3,2). $\square$

Observación 1.3.1. Sean E un espacio normado y E' su dual. Si $x \in E$ y $x' \in E'$, entonces el escalar $x'(x)$ se denota por $\langle x, x' \rangle$. La función

$$(x, x') \in E \times E \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \langle x, x' \rangle = x'(x) \in \mathbb{K},$$

es una forma bilineal sobre el producto cartesiano $E \times E'$, llamada la forma bilineal canónica sobre $E \times E'$, y tiene las siguientes propiedades:

1. La forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una función continua en $E \times E'$. En efecto, $|\langle x, x' \rangle| \leq \|x'\| \|x\|$, para todo $x \in E$ y todo $x' \in E'$ (ejercicio 1,2,2).
2. Si $\langle x, x' \rangle = 0$, para todo $x \in E$, entonces $x' = 0$.
3. Dado $x \in E$, si $\langle x, x' \rangle = 0$, para todo $x' \in E'$, entonces $x = 0$. En efecto, si $x \neq 0$, por el corolario 1,3,1 del teorema 1,3,1, existe $x' \in E'$ tal que $\langle x, x' \rangle \neq 0$.

Definición 1.3.4. Sea E un espacio normado.

1. Para $x \in E$ y $x' \in E'$, se dice que x es *ortogonal* a x' , o que x' es *ortogonal* a x , o que x y x' son ortogonales, lo cual se denota $x \perp x'$, si $\langle x, x' \rangle = 0$.
2. Se dice que $x' \in E'$ es ortogonal a un subconjunto $G \subset E$, lo cual se denota $x' \perp G$, cuando x' es ortogonal a todo elemento $x \in G$, esto es, $x \perp x'$ para todo $x \in G$.

El conjunto de todos los elementos de E' que son ortogonales a un conjunto $G \subset E$ es un subespacio lineal de E' , que se denota por $G^\perp$.

3. Análogamente a 2), se dice que $x \in E$ es ortogonal a un conjunto $G' \subset E'$, lo cual se denota $x \perp G'$, cuando $x \perp x'$, para todo $x' \in G'$.

El conjunto de todos los elementos de E que son ortogonales a un conjunto $G' \subset E'$ es un subespacio lineal de E , que se denota por ${}^\perp G'$.

Proposición 1.3.4. *Sean E un espacio normado y G un subconjunto de E . Entonces,*

1. $G^\perp$ es un subespacio cerrado de E' .
2. ${}^\perp(G^\perp)$ es el subespacio cerrado de E generado por G , esto es, G es total en ${}^\perp(G^\perp)$.

Demostración.

1. Es obvio que $G^\perp$ es un subespacio lineal de E' . Ahora, como para cada $x \in E$, la función $f : E' \rightarrow \mathbb{K}$, $f(x') = \langle x, x' \rangle$, es continua, entonces $\{x\}^\perp = f^{-1}(0)$ es cerrado en E' , para cada $x \in E$, de donde

$$G^\perp = \bigcap_{x \in G} \{x\}^\perp$$

es cerrado en E' .

2. Es inmediato que $G \subset {}^\perp(G^\perp)$ y que ${}^\perp(G^\perp)$ es cerrado. Demostremos que G es total en ${}^\perp(G^\perp)$ o equivalentemente, que toda forma lineal continua en E que se anula en G también se anula en ${}^\perp(G^\perp)$ o, equivalentemente que $G^\perp \subset ({}^\perp(G^\perp))^\perp$. En efecto, sea $x' \in G^\perp$. Si $y \in {}^\perp(G^\perp)$, entonces $\langle y, x' \rangle = 0$. Se sigue que $x' \in ({}^\perp(G^\perp))^\perp$. $\square$

Proposición 1.3.5. *Sean E un espacio normado y M, N subespacios lineales de E . Entonces,*

$$(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp,$$

en donde $M + N = \{x + y; x \in M, y \in N\}$.

Demostración. Es claro que $M^\perp \cap N^\perp \subset (M + N)^\perp$. Ahora, sea $x' \in (M + N)^\perp$. Se tiene que $\langle x + y, x' \rangle = 0$, para todo $x \in M$ y todo $y \in N$. Por consiguiente, si hacemos $y = 0 \in N$, entonces $\langle x, x' \rangle = 0$, para todo $x \in M$, de donde $x' \in M^\perp$, y si hacemos $x = 0 \in M$, entonces $\langle y, x' \rangle = 0$, para todo $y \in N$, de donde $x' \in N^\perp$. Por lo tanto, $x' \in M^\perp \cap N^\perp$. $\square$

Proposición 1.3.6. *Sea E un espacio normado. Entonces,*

1. *Para cada $x \in E$, la función*

$$x' \in E' \mapsto \tilde{x}(x') = \langle x, x' \rangle \in \mathbb{K}$$

es una forma lineal continua sobre E' .

2. *La aplicación*

$$x \in E \mapsto \phi(x) = \tilde{x} \in (E')' = E''$$

es un isomorfismo isométrico de E sobre el subespacio $\phi(E) = \tilde{E}$ del espacio bidual E'' de E .

Demostración.

1. Para cada $x \in E$, se tiene que

$$|\langle x', \tilde{x} \rangle| = |\langle x, x' \rangle| \leq \|x'\| \|x\|,$$

para todo $x' \in E'$, luego $\tilde{x}$ es continua en E' y $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$.

2. De la parte 1, se tiene que

$$\|\phi(x)\| = \|\tilde{x}\| \leq \|x\|,$$

para todo $x \in E$. Demostremos la desigualdad contraria, de donde se obtendrá que $\|\phi(x)\| = \|x\|$, $x \in E$. En efecto, sean $x \in E$, $x \neq 0$, y $M = [x]$ el subespacio generado por $\{x\}$. La función

$$y = \lambda x \in M \mapsto y'_0(y) = \lambda \|x\|,$$

es una forma lineal continua sobre M para la cual $\|y'_0\| \leq 1$, y como $\left\langle \frac{x}{\|x\|}, y'_0 \right\rangle = 1$ entonces se tiene que $\|y'_0\| = 1$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe $y' \in E'$ tal que $y' \supset y'_0$, y $\|y'\| = \|y'_0\| = 1$. Por consiguiente, resulta que

$$\|\phi(x)\| = \|\tilde{x}\| \geq |\langle y', \tilde{x} \rangle| = |\langle x, y' \rangle| = \left| \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| = \|x\|,$$

de donde $\|\phi(x)\| = \|x\|$, cualquiera que sea $x \in E$. Por lo tanto, ϕ es una isometría de E sobre $\phi(E) = \tilde{E} \subset E''$. $\square$

Definición 1.3.5. Se dice que un espacio normado E es *reflexivo* si y sólo si $\tilde{E} = \phi(E) = E''$. Más precisamente, E es reflexivo si y sólo si para todo $x'' \in E''$, existe $x \in E$ tal que cualquiera que sea $x' \in E'$ se tiene: $\langle x', x'' \rangle = \langle x, x' \rangle$. Obsérvese que todo espacio normado reflexivo es de Banach.

Ejemplo 1.3.9. El espacio ℓ^p ($1 < p < \infty$) es reflexivo. En efecto, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sean $\phi : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)'$ y $\psi : \ell^p \longrightarrow (\ell^q)'$ los isomorfismos isométricos definidos en el ejemplo 1,3,5 :

$$\begin{aligned}\phi : \ell^q &\longrightarrow (\ell^p)' \\ y = (y_n) &\longmapsto \phi(y) : \ell^p \longrightarrow \mathbb{K} \\ x = (x_n) &\longmapsto \langle x, \phi(y) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\end{aligned}$$

y análogamente,

$$\begin{aligned}\psi : \ell^p &\longrightarrow (\ell^q)' \\ x = (x_n) &\longmapsto \psi(x) : \ell^q \longrightarrow \mathbb{K} \\ y = (y_n) &\longmapsto \langle y, \psi(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.\end{aligned}$$

Sea $x'' \in (\ell^p)''$, esto es, $x'' : (\ell^p)' \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua sobre $(\ell^p)'$. Entonces, $x'' \circ \phi \in (\ell^q)'$, luego existe $x = (x_n) \in \ell^p$ tal que $\psi(x) = x'' \circ \phi$. Demostremos que

$$\langle x', x'' \rangle = \langle x, x' \rangle,$$

para todo $x' \in (\ell^p)'$. En efecto, si $x' \in (\ell^p)'$, entonces existe $y = (y_n) \in \ell^q$ tal que $\phi(y) = x'$. Por lo tanto, se tiene que

$$\langle x, x' \rangle = \langle x, \phi(y) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Por otra parte,

$$\langle x', x'' \rangle = \langle \phi(y), x'' \rangle = x''(\phi(y)) = \psi(x)(y) = \langle y, \psi(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

de donde $\langle x', x'' \rangle = \langle x, x' \rangle$, cualquiera que sea $x' \in (\ell^p)'$. Por consiguiente, ℓ^p ($1 < p < \infty$) es reflexivo.

Ejemplo 1.3.10. El espacio c_0 de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$ convergentes a cero, no es reflexivo. En efecto, sea $\phi : \ell^1 \longrightarrow (c_0)'$ el isomorfismo isométrico definido en el ejemplo 1,3,6 :

$$\begin{aligned} \phi : \ell^1 &\longrightarrow (c_0)' \\ x = (x_n) &\longmapsto \phi(x) : c_0 \longrightarrow \mathbb{K} \\ y = (y_n) &\longmapsto \langle y, \phi(x) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \end{aligned}$$

Sea $x'' : (c_0)' \longrightarrow \mathbb{K}$ la forma lineal continua sobre $(c_0)'$ definida de la siguiente manera: dado $y' \in (c_0)'$, existe un único $x = (x_n) \in \ell^1$ tal que $y' = \phi(x)$; entonces, se define

$$\langle y', x'' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Demostremos que $x'' \neq \tilde{x}$, para cualquier $x \in c_0$. En efecto, sean $x = (x_n) \in c_0$, y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \neq 1$. Si $y' = \phi(e_{n_0})$ (en donde e_{n_0} es el vector unitario de ℓ^1 que tiene 1 en la n_0 componente y cero en las restantes), entonces, por la definición de x'' , se tiene que

$$\langle y', x'' \rangle = 1.$$

Por otra parte,

$$\langle y', \tilde{x} \rangle = \langle x, y' \rangle = \langle x, \phi(e_{n_0}) \rangle = x_{n_0} \neq 1,$$

y por lo tanto, $\langle y', x'' \rangle \neq \langle y', \tilde{x} \rangle$.

Proposición 1.3.7. *Un espacio de Banach E es reflexivo si y sólo si su dual E' es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que E es reflexivo, esto es, que la aplicación $\phi : E \longrightarrow E''$, $\phi(x) = \tilde{x}$, es sobreyectiva. Demostremos que la aplicación

$$x' \in E \xrightarrow{\psi} \psi(x') = \tilde{x}' \in (E')'' = E''',$$

es sobreyectiva. En efecto, sea $x''' : E'' \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua sobre E'' . Entonces, $x' = x''' \circ \phi \in E'$. Afirmamos que $x''' = \tilde{x}'$, esto es, que

$$\langle x'', \tilde{x}' \rangle = \langle x', x'' \rangle,$$

para todo $x'' \in E''$, de donde ψ es sobreyectiva. En efecto si $x'' \in E''$, entonces existe $x \in E$ tal que $x'' = \tilde{x} = \phi(x)$. Por lo tanto, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \langle x'', \tilde{x}' \rangle &= \langle x', x'' \rangle = \langle x', \tilde{x} \rangle = \langle x, x' \rangle = x'(x) = \\ &= (x''' \circ \phi)(x) = x'''(\tilde{x}) = x'''(x'') = \langle x'', x''' \rangle, \end{aligned}$$

esto es, $\langle x'', \tilde{x}' \rangle = \langle x'', x''' \rangle$, para todo $x'' \in E''$.

Recíprocamente, supongamos que E' es reflexivo. La imagen $\tilde{E}$ de E por el isomorfismo canónico $\phi : E \longrightarrow E''$, $\phi(x) = \tilde{x}$, es un subespacio cerrado de E'' , pues E es de Banach. Demostremos que $\tilde{E}$ es denso en E'' , de donde $\tilde{E} = E''$, y por lo tanto E es reflexivo. Sea $x''' \in E'''$ una forma lineal continua sobre E'' que se anule en $\tilde{E} \subset E''$. Como E' es reflexivo, existe $x' \in E'$ tal que

$$\langle x'', x''' \rangle = \langle x', x'' \rangle, \quad (*)$$

para todo $x'' \in E''$. En particular,

$$\langle x, x' \rangle = \langle x', \tilde{x} \rangle = \langle \tilde{x}, x''' \rangle = 0$$

para todo $x \in E$, luego $x' = 0$, de donde por (*), $x''' = 0$. Por consiguiente, $\tilde{E}$ es denso en E'' (corolario 1,3,2 del teorema de Hahn-Banach 1,3,1). $\square$

Corolario 1.3.4. *Los espacios ℓ^1 y ℓ^∞ no son reflexivos.*

En efecto, c_0 no es reflexivo, luego por el teorema, $(c_0)' = \ell^1$ no es reflexivo, de donde $(\ell^1)' = \ell^\infty$ no es reflexivo.

Observación 1.3.2. Sea I un intervalo compacto de la recta real, y consideremos sobre I la medida de Lebesgue λ . Si $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $L^p(I)$ como el espacio vectorial formado por las funciones (reales o complejas) medibles f definidas casi en todo punto (ctp) de I , tales que

$$\int_I |f|^p d\lambda < \infty$$

Aquí se identifican las funciones iguales ctp. de modo que los elementos de $L^p(I)$ son en realidad clases de funciones. $L^p(I)$ es un espacio de Banach para la norma

$$f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_I |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $1 < p < \infty$, entonces el espacio dual de $L^p(I)$ se identifica con el espacio $L^q(I)$, en donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, siendo

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_I f g d\lambda$$

la forma bilineal canónica; vale la *desigualdad de Hölder*:

$$\int_I |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

para

$$f \in L^p(I), \quad g \in L^q(I).$$

El espacio dual de $L^1(I)$ se identifica con el espacio $L^\infty(I)$ de las funciones medibles esencialmente acotadas (esto es, acotadas ctp) sobre I , en donde la norma está dada por:

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_I |f|$$

(extremo superior esencial de f , esto es, $\|f\|_\infty$ es el ínfimo de los números α tales que $|f| \leq \alpha$ ctp. en I). El desarrollo de esta teoría puede encontrarse en los libros sobre integración (ver, p.ej., [9]). Para una presentación muy completa de la teoría de dualidad, con importantes ejemplos desarrollados, consultar [16].

Observación 1.3.3. Se debe tener bien presente que cuando un espacio de Banach E es reflexivo, E es isométricamente isomorfo a su bidual E'' a través del isomorfismo que hemos denotado por $\phi : x \mapsto \tilde{x}$. James [11] dió un ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo E , isométricamente isomorfo a su bidual E'' .

Ejercicios de la sección 1.3

1. Sea E un espacio normado real. Demostrar que existe en $E \times E$ una estructura de espacio normado complejo tal que las inclusiones $x \mapsto (x, 0)$ y $y \mapsto (0, y)$ son isometrías $\mathbb{R}$ -lineales.

2. Sea E un espacio normado sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que toda forma lineal no nula sobre E es una función abierta.

Sugerencia: Sean $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal no nula, $a \in E$ con $f(a) = 1$, A un abierto en E y $x_0 \in A$. Entonces, $A - x_0$ es abierto en E y $0 \in A - x_0$. Demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| < \alpha$, entonces $\lambda a \in A - x_0$, de donde $(f(x_0) + \lambda) \in f(A)$, para $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| < \alpha$. Concluir que $f(A)$ es abierto.

3. Demostrar que en un espacio normado E todo hiperplano H o es denso, o es cerrado.
4. Demostrar que en un espacio normado E toda forma lineal con núcleo cerrado es continua.
5. Sea c el espacio de todas las sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$. Demostrar que la función

$$x = (x_n) \in c \mapsto \|x\| = \sup_n |x_n|$$

es una norma en c , para la cual c es un espacio de Banach, y demostrar que c_0 es un hiperplano cerrado de c .

6. a) Dar explícitamente un ejemplo de una forma lineal no continua en un espacio normado.

Sugerencia: Considerar el siguiente conjunto:

$$\{x = (x_n) \in \ell^2; x_n = 0, \text{ excepto para un número finito de índices } n\}$$

- b) Usar el ejemplo anterior para definir una forma lineal no continua en ℓ^2 .

7. a) Demostrar que todo espacio normado E de dimensión infinita posee un hiperplano denso.

Sugerencia: Considere β , una base de Hamel conveniente de E , $S = \{v_0, v_1, \dots, v_n, \dots\}$ un subconjunto enumerable de β y sea $H = [(\beta \setminus S) \cup \{\frac{1}{n}v_n + v_0; n \geq 1\}]$ el subespacio vectorial generado por el complemento de S en β y el conjunto $\{\frac{1}{n}v_n + v_0; n \geq 1\}$.

- b) Demostrar que en todo espacio normado E de dimensión infinita existe una forma lineal no continua.

- c) Deducir de b), que si la bola unitaria abierta de un espacio normado E es precompacta, entonces E es de dimensión finita.

Sugerencia: Suponga que E es de dimensión infinita y sea $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal no continua. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| = 1$, y, $|f(x_n)| > n$. Sean $M_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, y $\alpha_n = \|f|_{M_n}\|$. Escoja $y_n \in M_n$ tal que $\|y_n\| = 1$, y, $|f(y_n)| = \alpha_n$. Demostrar que la sucesión $(y_n) \subset B_1(0)$ no posee ninguna subsucesión de Cauchy.

8. Sean

$M = \{(x_n) \in \ell^\infty; x_n = 0, \text{ excepto para un número finito de índices } n\}$
y $x^0 = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell^\infty$. Demostrar que existe $x' \in (\ell^\infty)'$ tal que $\langle x^0, x' \rangle = 1$ y $\langle x, x' \rangle = 0$, para todo $x \in M$.

9. a) Demostrar que el espacio dual de c_0 es isométricamente isomorfo a ℓ^1 .
b) Demostrar que el espacio dual de ℓ^1 es isométricamente isomorfo a ℓ^∞ .

10. a) Sean E un espacio normado y E' su dual. Demostrar que $\|x\| = \sup \{|\langle x, x' \rangle|; \|x'\| \leq 1\}$, para todo $x \in E$.
b) Demostrar que cualquier espacio de Banach E cuyo dual E' es separable es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de ℓ^∞ .

Sugerencia: Sea (x'_n) una sucesión densa en la bola unitaria cerrada de E' . Considerar la aplicación $T : E \rightarrow \ell^\infty$ definida por $T(x) = (\langle x, x'_n \rangle)$, $x \in E$.

11. Sean E un espacio normado, M un subespacio cerrado de E y $x_0 \notin M$. Demostrar que existe $f \in E'$ tal que $\|f\| = 1$, $f(x_0) = d(x_0, M)$ y $f(M) = \{0\}$.

Sugerencia: Sea $N = [x_0, M]$ el subespacio lineal generado por x_0 y M . Sea $g : N \rightarrow \mathbb{K}$ la forma lineal definida así: $g(\lambda x_0 + m) = \lambda d(x_0, M)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $m \in M$.

12. Demostrar que en un espacio normado E sobre $\mathbb{K}$ todo subespacio cerrado M es la intersección de todos los hiperplanos cerrados que lo contienen.

13. Sean E un espacio normado real, B una bola abierta en E y M un subespacio lineal de E tal que $B \cap M = \emptyset$. Demostrar que existe un hiperplano cerrado $H \supset M$ tal que B está contenida en uno de los semiespacios en que H divide a E .
14. Sean E un espacio normado y F un subespacio lineal de E .
- Demostrar que $E'/F^\perp$ es isométricamente isomorfo a F' .
 - Demostrar que si F es denso en E , entonces E' es isométricamente isomorfo a F' .
15. Sean E un espacio de Banach reflexivo y M un subespacio cerrado de E . Demostrar que M es reflexivo.
16. (*Teorema de Hahn-Banach para seminormas*) Se dice que una función $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un espacio vectorial E es *positivamente homogénea* si $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $x \in E$ y todo $\lambda > 0$. Se dice que p es *subaditiva* si $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x \in E$ y todo $y \in E$. Se dice que p es una *seminorma* si i) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$, para todo $x \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$, ii) p es subaditiva; y iii) $p(x) \geq 0$, para todo $x \in E$.

- Demostrar que si E es un espacio vectorial real, p una función positivamente homogénea y subaditiva en E , M un subespacio lineal de E y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal en M tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in M$, entonces existe una forma lineal $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ en E , extensión de f , tal que $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Sugerencia:

- Si $x_0 \notin M$, se puede extender f al subespacio $[x_0, M]$, conservando la propiedad, de la siguiente manera:

$$-f(y) - p(-y - x_0) \leq -f(x) + p(x + x_0)$$

para todo $x \in M$ y todo $y \in M$. Se define $g : [x_0, M] \rightarrow \mathbb{R}$ así:

$$g(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda \mu, \quad y \in M, \lambda \in \mathbb{R}$$

en donde

$$\sup_{y \in M} \{-f(y) - p(-y - x_0)\} \leq \mu \leq \inf_{x \in M} \{-f(x) + p(x + x_0)\}$$

2) Usar el lema de Zorn.

- b) Si p es una seminorma en un espacio vectorial E , y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal real, entonces se tiene que

$$f(x) \leq p(x) \iff |f(x)| \leq p(x), \quad x \in E.$$

Usando este resultado, deducir de a), que si E es un espacio vectorial real, p una seminorma en E , M un subespacio lineal de E y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal en M tal que $|f(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in M$, entonces existe una forma lineal $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, extensión de f , tal que $|g(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

- c) Imite la demostración del teorema 1,3,1 en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ para extender el resultado b) al caso complejo: Si E es un espacio vectorial complejo, M un subespacio lineal de E , p una seminorma en E y $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma lineal compleja en M , tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe una forma lineal $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$, extensión de f , tal que $|g(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

17. Demostrar, usando el teorema de Baire, que un espacio de Banach E de dimensión infinita no puede tener una base de Hamel enumerable.

1.4. La topología débil en un espacio normado

Proposición 1.4.1. Sean X un conjunto, $(Y_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, y $f_i : X \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, una familia de aplicaciones. Entonces, existe en X una topología menos fina para la cual todas las aplicaciones f_i , $i \in I$, son continuas. Esta topología se llama la topología inicial en X definida por la familia $(f_i)_{i \in I}$. Una base para esta topología está formada por todas las intersecciones finitas de la forma

$$f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap f_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

en donde $U_{i_k} \subset Y_{i_k}$ es abierto, $k = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Se sigue de la proposición 0,2,1, que los conjuntos de la forma $\cap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, en donde $U_{i_k} \subset Y_{i_k}$ es abierto, forman una base de

una topología τ en X . Resulta inmediatamente que si se dota a X de esta topología, entonces las aplicaciones f_i , $i \in I$, son continuas. Demostremos que τ es la menos fina de todas las topologías en X con esta propiedad. En efecto, sea τ_1 otra topología en X tal que las aplicaciones $f_i : (X, \tau_1) \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, son continuas. Ahora bien, para todo $U \in \tau$ y todo $x_0 \in U$, existen abiertos $U_{i_k} \subset Y_{i_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, tales que

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U. \quad (1)$$

Como para $k = 1, 2, \dots, n$, la aplicación $f_{i_k} : (X, \tau_1) \longrightarrow Y_{i_k}$ es continua, tenemos que $f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \tau_1$, $k = 1, 2, \dots, n$, de donde, por (1), se tiene que $U \in \tau_1$. Por consiguiente, $\tau \subset \tau_1$. $\square$

Proposición 1.4.2. Sean X un espacio topológico, $(Y_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $f_i : X \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, una familia de aplicaciones. Para que la topología de X sea la topología inicial definida por la familia de aplicaciones $(f_i)_{i \in I}$ es necesario y suficiente que satisfaga la siguiente condición:

Dados cualquier espacio topológico Z y cualquier aplicación $g : Z \longrightarrow X$, entonces g es continua si y sólo si las aplicaciones $f_i \circ g : Z \longrightarrow Y_i$, $i \in I$ son continuas.

Demostración. Supongamos que la topología de X es la inicial definida por la familia de aplicaciones $f_i : X \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, y sean Z un espacio topológico, y $g : Z \longrightarrow X$ cualquier aplicación.

1. Si g es continua, como cada f_i , $i \in I$, es continua, entonces $f_i \circ g : Z \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, es continua.
2. Supongamos que cada aplicación $f_i \circ g : Z \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, es continua. Demostremos que g es continua. En efecto, sean $z_0 \in Z$, y, U vecindad de $g(z_0)$ en X . Entonces, existen abiertos $U_{i_k} \subset Y_{i_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, tales que $g(z_0) \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U$, de donde se tiene que

$$g^{-1}(U) \supset g^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\right) = \bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \circ g)^{-1}(U_{i_k}) \ni z_0$$

y como $(f_{i_k} \circ g)^{-1}(U_{i_k}) \subset Z$ es abierto, $k = 1, 2, \dots, n$, entonces $g^{-1}(U)$ es vecindad de z_0 en Z . Por lo tanto, g es continua.

Por consiguiente, la condición es necesaria.

La condición también es suficiente. En efecto, sea $Z = X$ el propio espacio X . Entonces, la aplicación identidad $g : id. : X \longrightarrow X$ es continua, luego, por hipótesis, $f_i = f_i \circ g : X \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, es continua. Queda por ver que la topología τ de X es la menos fina para la cual las aplicaciones $f_i : (X, \tau) \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, son continuas. En efecto, sea τ_1 otra topología en X tal que cada aplicación $f_i : (X, \tau_1) \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, es continua. Si $Z = (X, \tau_1)$ y $g = id. : (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau)$ es la aplicación identidad, entonces $f_i \circ g = f_i : (X, \tau_1) \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, es continua, luego, por hipótesis, $g = id.$ es continua, esto es, $\tau_1 \supset \tau$. Esto completa la demostración de la proposición.

□

Sean $(X_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$ el producto cartesiano de los espacios X_i , $i \in I$. Si para cada $i \in I$, $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ es la i -ésima proyección de X sobre X_i , entonces los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = U_{i_1} \times U_{i_2} \times \dots \times U_{i_n} \times \prod_{i \neq i_k} X_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

en donde $U_{i_k} \subset X_{i_k}$ es abierto, constituyen una base para una topología τ en X (proposición 0,2,1), llamada la topología producto. Resulta inmediatamente, que la topología producto es la topología inicial definida por la familia de proyecciones $(\pi_i)_{i \in I}$. En particular, dados un espacio topológico Z y una aplicación $g : Z \longrightarrow X$, $g = (g_i)_{i \in I}$, en donde, $g_i : Z \longrightarrow X_i$, entonces g es continua si y sólo si cada aplicación $g_i = \pi_i \circ g : Z \longrightarrow X_i$, $i \in I$, es continua.

Definición 1.4.1. Sean E un espacio normado y E' su dual. La *topología débil* $\sigma(E, E')$ en E es la topología inicial definida por la familia de funciones $(f_{x'})_{x' \in E'}$, en donde $f_{x'} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ es la función definida por $f_{x'}(x) = \langle x, x' \rangle$, $x \in E$.

En otras palabras, la topología débil $\sigma(E, E')$ en E es la menos fina de todas las topologías en E para la cual las funciones $x \in E \longmapsto \langle x, x' \rangle \in \mathbb{K}$, $x' \in E'$, son continuas. Resulta de la propia definición que la topología débil $\sigma(E, E')$ en un espacio normado E es menos fina que la topología de la norma.⁴

Proposición 1.4.3. Sean E un espacio normado y E' su dual. Un sistema fundamental de vecindades de 0 en la topología débil $\sigma(E, E')$ en E está dado

⁴por contraste, la topología de la norma se llama también topología fuerte en E .

por los conjuntos de la forma

$$V(\epsilon; x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq \epsilon\},$$

en donde $\epsilon > 0$, $x'_i \in E'$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Los conjuntos $V(\epsilon; x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$, $\epsilon > 0$, $x'_i \in E'$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, son vecindades de $0 \in E$ en la topología $\sigma(E, E')$, pues se tiene que

$$V(\epsilon; x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \bigcap_{i=1}^n x_i'^{-1}(D_\epsilon), \quad \text{en donde } D_\epsilon = \{\alpha \in \mathbb{K}; |\alpha| \leq \epsilon\}.$$

Ahora bien, sea V una vecindad de 0 en la topología $\sigma(E, E')$. Entonces, por la proposición 1,4,1, existen vecindades abiertas $W_1, W_2, \dots, W_n$ de 0 en $\mathbb{K}$ y elementos $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ en E' tales que $0 \in \bigcap_{i=1}^n x_i'^{-1}(W_i) \subset V$. Si $\epsilon > 0$ es tal que $D_\epsilon \subset W_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces se tiene que

$$0 \in \bigcap_{i=1}^n x_i'^{-1}(D_\epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n x_i'^{-1}(W_i) \subset V.$$

Pero,

$$\bigcap_{i=1}^n x_i'^{-1}(D_\epsilon) = \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq \epsilon\} = V(\epsilon; x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

de donde se sigue la proposición. $\square$

Observación 1.4.1. Fácilmente se verifica que la colección de los conjuntos de la forma

$$V(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1\}$$

en donde $x'_i \in E'$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, también es un sistema fundamental de vecindades de 0 en E para la topología $\sigma(E, E')$.

Proposición 1.4.4. Sean E un espacio normado, E' su dual y $x_0 \in E$. Un sistema fundamental de vecindades de x_0 en E para la topología $\sigma(E, E')$ está dado por los conjuntos de la forma

$$x_0 + \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1\}, \quad x'_i \in E', \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Sean V una $\sigma(E, E')$ -vecindad de x_0 . Entonces, existen abiertos $W_1, W_2, \dots, W_n$ en $\mathbb{R}$ y elementos $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ en E' tales que $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n y_i'^{-1}(W_i) \subset V$. En particular, $\langle x_0, y'_i \rangle \in W_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, luego existe $\epsilon > 0$ tal que $(\langle x_0, y'_i \rangle + D_\epsilon) \subset W_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Se sigue que

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^n y_i'^{-1}(\langle x_0, y'_i \rangle + D_\epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n y_i'^{-1}(W_i) \subset V.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} y_i'^{-1}(\langle x_0, y'_i \rangle + D_\epsilon) &= \{x \in E; |\langle x, y'_i \rangle - \langle x_0, y'_i \rangle| \leq \epsilon\} = \\ &= x_0 + \{x \in E; |\langle x, y'_i \rangle| \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $x'_i = \frac{1}{\epsilon} y'_i \in E'$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces se tiene que

$$x_0 \in x_0 + \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1\} \subset V. \quad \square$$

Proposición 1.4.5. Sean E un espacio normado y $E_\sigma = (E, \sigma(E, E'))$ el conjunto E dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$. Entonces, las operaciones adición y multiplicación por escalares

$$\begin{aligned} (x, y) \in E_\sigma \times E_\sigma &\xrightarrow{+} (x + y) \in E_\sigma, \\ (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E_\sigma &\xrightarrow{\cdot} \lambda x \in E_\sigma, \end{aligned}$$

son aplicaciones continuas.

Demostración. Sean $x_0 \in E$, $y_0 \in E$ y $\lambda_0 \in \mathbb{K}$.

1. Sean $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ elementos de E' y

$$V = (x_0 + y_0) + \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1\}$$

la $\sigma(E, E')$ -vecindad de $(x_0 + y_0)$ correspondiente. Si

$$V_1 = x_0 + \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq \frac{1}{2} \right\},$$

y,

$$V_2 = y_0 + \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq \frac{1}{2} \right\},$$

entonces $V_1 \times V_2$ es una vecindad del punto (x_0, y_0) en $E_\sigma \times E_\sigma$ tal que $V_1 + V_2 \subset V$. Por lo tanto, la operación adición es continua.

2. Procediendo análogamente como en 1) y usando la identidad

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(x - x_0),$$

se muestra que la operación multiplicación por un escalar es continua en $\lambda_0 x_0 \in E$. $\square$

Corolario 1.4.1. *Para cada $x_0 \in E$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, las aplicaciones, traslación*

$$x \in E_\sigma \longmapsto x + x_0 \in E_\sigma,$$

y homotecia,

$$x \in E_\sigma \longmapsto \lambda x \in E_\sigma,$$

son homeomorfismos de E_σ sobre sí mismo.

Proposición 1.4.6. *La topología débil $\sigma(E, E')$ en un espacio normado E es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $x_0 \in E$, $y_0 \in E$, con $x_0 \neq y_0$. Entonces existe $x' \in E'$ tal que $\langle x_0, x' \rangle \neq \langle y_0, x' \rangle$ (véase la observación 1,3,1,3). Si $\epsilon = |\langle x_0 - y_0, x' \rangle| > 0$ y

$$V = \left\{ x \in E; |\langle x, x' \rangle| < \frac{\epsilon}{2} \right\},$$

entonces $(x_0 + V) \cap (y_0 + V) = \emptyset$. $\square$

Proposición 1.4.7. Sean E un espacio normado y E' su dual. Una forma lineal $f : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua si y sólo si existe $x' \in E'$ tal que

$$f(x) = \langle x, x' \rangle$$

para todo $x \in E$, esto es, si y sólo si $f \in E'$.

Demostración. Por la propia definición de la topología $\sigma(E, E')$ en E , la forma lineal

$$x \in E \xrightarrow{x'} \langle x, x' \rangle \in \mathbb{K},$$

es continua para todo $x' \in E'$. Recíprocamente, sea $f : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineal continua. Entonces, existen elementos $x'_1, \dots, x'_n$ en E' tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1\} \implies |f(x)| < 1.$$

Ahora bien, si $f \notin [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$, entonces existe $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) = 1$, y, $\langle x_0, x'_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, luego $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| < 1\}$, y, $|f(x_0)| = 1$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$f = \alpha_1 \langle \cdot, x'_1 \rangle + \alpha_2 \langle \cdot, x'_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle \cdot, x'_n \rangle = \langle \cdot, \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \dots + \alpha_n x'_n \rangle$$

esto es, $f = \langle \cdot, x' \rangle$, en donde $x' = \sum_{i=1}^n \alpha_i x'_i \in E'$. $\square$

Definición 1.4.2. Sea E un espacio normado y E' su dual. Se define la *topología débil** (léase: débil estrella) en E' (la cual se denota $\sigma(E', E)$, ó, $w*$) como la topología inicial de E' definida por la familia de funciones $(f_x)_{x \in E}$, en donde $f_x : E' \longrightarrow \mathbb{K}$ es la función definida por $f_x(x') = \langle x, x' \rangle$, $x' \in E'$.

Un sistema fundamental de vecindades de 0 en E' para la topología $\sigma(E', E)$ está formado por los conjuntos

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcap_{i=1}^n \{x' \in E'; |\langle x_i, x' \rangle| \leq 1\},$$

$x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$. Además, para cada $x' \in E'$, los conjuntos $x' + V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, forman un sistema fundamental de vecindades de x' en la topología $\sigma(E', E)$ de E' .

Siendo la topología débil* $\sigma(E', E)$ en E' la menos fina de las topologías en E' para la cual las funciones $x' \in E' \mapsto \langle x, x' \rangle \in \mathbb{K}$, $x \in E$, son continuas, resulta que $\sigma(E', E)$ es menos fina que la topología de la norma de E' .

Ejemplo 1.4.1. Si E es un espacio normado de dimensión infinita, entonces la topología débil $\sigma(E, E')$ es estrictamente menos fina que la topología de la norma de E , pues la bola unitaria abierta de E , $B = \{x \in E; \|x\| < 1\}$, no es vecindad de 0 en la topología $\sigma(E, E')$, dado que para $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ elementos cualesquiera de E' , $V = \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| < 1\}$ no puede estar contenida en B .

En efecto, como E' también es de dimensión infinita, existe $x' \in E'$, tal que $x' \notin [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$. Por consiguiente, existe $x_0 \in E$ con $\|x_0\| = 1$ tal que $\langle x_0, x'_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Se sigue que $x_0 \in V$ y $x_0 \notin B$. Por lo tanto, $V \not\subset B$.

Observación 1.4.2. Sean E un espacio normado, E' su dual y, $\overline{B} = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ y $\overline{B'} = \{x' \in E'; \|x'\| \leq 1\}$ las bolas unitarias cerradas de E y E' , respectivamente. Entonces, $\overline{B}$ es un conjunto $\sigma(E, E')$ -cerrado de E . En efecto, el ejercicio 1,3,10, implica que

$$\overline{B} = \bigcap_{x' \in B'} \{x \in E; |\langle x, x' \rangle| \leq 1\},$$

de donde, en virtud de que la función $x \in E \mapsto \langle x, x' \rangle$, $x' \in E'$, es $\sigma(E, E')$ -continua en E , se sigue que $\overline{B}$ es $\sigma(E, E')$ -cerrado.

Análogamente, como

$$\overline{B'} = \bigcap_{x \in B} \{x' \in E'; |\langle x, x' \rangle| \leq 1\},$$

entonces se sigue que $\overline{B'}$ es $\sigma(E', E)$ -cerrado.

Definición 1.4.3. Sean E un espacio normado y E' su dual.

1. Se dice que una sucesión (x_n) en E es *débilmente convergente* a $x_0 \in E$, lo cual se denota $x_n \rightharpoonup x_0$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x' \rangle = \langle x_0, x' \rangle$$

para todo $x' \in E'$.

2. Se dice que una sucesión (x'_n) en E' converge w^* (léase: *converge débilmente estrella*) o que es w^* -convergente (léase: *débilmente estrella-convergente*) a $x'_0 \in E'$, lo cual se denota $x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, x'_n \rangle = \langle x, x'_0 \rangle,$$

para todo $x \in E$.

Si una sucesión (x_n) en E converge a x_0 en la topología de la norma, esto es, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$, lo cual se denota $x_n \longrightarrow x_0$, entonces se dice que la sucesión converge *fuertemente* a x_0 .

Observación 1.4.3. Nótese que la sucesión (x_n) en E (respectivamente, (x'_n) en E') converge débilmente a $x_0 \in E$ (respectivamente, es w^* -convergente a $x'_0 \in E'$) si y sólo si (x_n) es convergente a x_0 en la topología $\sigma(E, E')$ (respectivamente, es convergente a x'_0 en la topología $\sigma(E', E)$). Para la definición de convergencia de una sucesión en un espacio topológico, ver observación 0,3,1,1.

Ejemplo 1.4.2.

1. La convergencia en la norma implica la convergencia débil. Más precisamente, si E es un espacio normado y (x_n) es una sucesión en E , entonces

$$x_n \longrightarrow x_0 \implies x_n \rightharpoonup x_0.$$

En efecto,

$$|\langle x_n, x' \rangle - \langle x_0, x' \rangle| \leq \|x'\| \|x_n - x_0\|,$$

para cada $x' \in E'$, de donde se sigue la afirmación.

2. En general, la convergencia débil no implica la convergencia en la norma. En efecto, sean $E = \ell^2$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces se tiene que

$$\langle e_n, x \rangle = x_n \longrightarrow 0 = \langle 0, x \rangle$$

para cada $x = (x_n) \in \ell^2$, esto es, $e_n \rightharpoonup 0$. Sin embargo, $\|e_n\|_2 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $e_n \not\longrightarrow 0$.

Sin embargo, se verá más adelante (teorema 1,6,2) que para sucesiones en ℓ^1 , la convergencia débil implica la convergencia en la norma, y que por consiguiente son equivalentes (resultado debido a Banach).

3. Análogamente, como en 1), la convergencia en la norma en el dual E' de un espacio normado E implica la w^* -convergencia en E' , esto es, si (x'_n) es una sucesión en E' , entonces se tiene que

$$x'_n \longrightarrow x'_0 \implies x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0.$$

4. La convergencia débil en el espacio dual E' , esto es, la convergencia en la topología $\sigma(E', E'')$, implica la w^* -convergencia en E' . Más precisamente, si (x'_n) es una sucesión en E' , entonces se tiene que

$$x'_n \longrightarrow x'_0 \implies x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0.$$

En efecto, si $x'_n \rightharpoonup x'_0$ (esto es, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x'_n, x'' \rangle = \langle x'_0, x'' \rangle$, para todo $x'' \in E''$), entonces resulta que

$$|\langle x, x'_n \rangle - \langle x, x'_0 \rangle| = |\langle x'_n, \tilde{x} \rangle - \langle x'_0, \tilde{x} \rangle| \longrightarrow 0$$

para cada $x \in E$, esto es, $x'_n \xrightarrow{w^*} x'_0$.

En general, la recíproca del resultado 4) no es verdadera: sean $E = c_0$, $x^{(n)} = e_n \in (c_0)' = \ell^1$ y $x'' = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell^\infty = (\ell^1)'$. Entonces, se tiene que

$$\langle x, x^{(n)} \rangle = x_n \longrightarrow 0,$$

para todo $x = (x_n) \in c_0$, de donde $x^{(n)} \xrightarrow{w^*} 0$. Por otra parte,

$$\langle x^{(n)}, x'' \rangle = 1 \not\rightarrow 0,$$

luego $x^{(n)} \not\rightarrow 0$.

Sin embargo, si el espacio E es *reflexivo*, entonces vale la recíproca del resultado 4), como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.4.8. *Si E es un espacio reflexivo y (x'_n) , una sucesión en E' , entonces se tiene que*

$$x'_n \xrightarrow{w^*} x' \implies x'_n \longrightarrow x'.$$

Consecuentemente, la convergencia débil en el dual E' de un espacio reflexivo E coincide con la w^ -convergencia en E' .*

Demostración. Sean E un espacio reflexivo y (x'_n) una sucesión en E' tal que $x'_n \xrightarrow{w*} x'_0$. Si $x'' \in E''$, entonces existe $x \in E$ tal que $\langle x', x'' \rangle = \langle x, x' \rangle$, para todo $x' \in E'$. Por lo tanto, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x'_n, x'' \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, x'_n \rangle = \langle x, x'_0 \rangle = \langle x'_0, x'' \rangle$$

cualquiera que sea $x'' \in E''$. Por consiguiente, $x'_n \rightharpoonup x'_0$. $\square$

Proposición 1.4.9. *Sea E un espacio normado reflexivo. Entonces, toda sucesión acotada en E posee una subsucesión débilmente convergente en E .*

Demostración. Sean (x_n) una sucesión acotada en E , $\alpha > 0$ tal que $\|x_n\| \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $E_1 = \overline{[(x_n)]}$. Como E es un espacio reflexivo y E_1 es un subespacio cerrado de E , entonces E_1 también es reflexivo (ejercicio 1.3.15) y siendo separable (proposición 1,3,2), entonces el espacio bidual E''_1 de E_1 es separable, luego, E'_1 es separable (proposición 1,3,3).

Sea (x'_k) un conjunto enumerable denso en E'_1 . Como $|\langle x_n, x'_1 \rangle| \leq \alpha \|x'_1\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $(\langle x_n, x'_1 \rangle)$ es una sucesión acotada en $\mathbb{K}$, luego posee una subsucesión convergente, digamos $(\langle x_{n,1}, x'_1 \rangle)$. Análogamente, como $|\langle x_{n,1}, x'_2 \rangle| \leq \alpha \|x'_2\|$, $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $(\langle x_{n,1}, x'_2 \rangle)$ es acotada en $\mathbb{K}$, luego posee una subsucesión convergente, digamos $(\langle x_{n,2}, x'_2 \rangle)$. Prosiguiendo de esta manera, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $(x_{n,k})_n$ con las siguientes propiedades:

1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la sucesión numérica $(\langle x_{n,k}, x'_k \rangle)_n$ es convergente, y
2. Si $k > s$, entonces $(x_{n,k})_n$ es una subsucesión de $(x_{n,s})_n$.

Si $y_n = x_{n,n}$, entonces la sucesión numérica $(\langle y_n, x'_k \rangle)_n$ es convergente, para cada $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{1,1} & & x_{2,1} & \dots & x_{k,1} & \dots & x_{n,1} & \dots \\
 & \searrow & & & & & & \\
 x_{1,2} & & x_{2,2} & \dots & x_{k,2} & \dots & x_{n,2} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & \searrow & \vdots & & \vdots & \\
 x_{1,k} & & x_{2,k} & \dots & x_{k,k} & \dots & x_{n,k} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow & \vdots & \\
 x_{1,n} & & x_{2,n} & \dots & x_{k,n} & \dots & x_{n,n} & \dots \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow
 \end{array}$$

En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, pero fijo. Entonces, se tiene que

$$n > k \implies y_n = x_{n,n} \in (x_{s,n})_s \subset (x_{s,k})_s$$

luego

$$n > k \implies (\langle y_n, x'_k \rangle) \in (\langle x_{s,n}, x'_k \rangle)_s \subset (\langle x_{s,k}, x'_k \rangle)_s$$

y como por 1) la sucesión numérica $(\langle x_{s,k}, x'_k \rangle)_s$ es convergente, entonces la sucesión $(\langle y_n, x'_k \rangle)_{n>k}$ también es convergente, de donde la propia sucesión $(\langle y_n, x'_k \rangle)_n$ es convergente en $\mathbb{K}$, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$.

Demostremos ahora que la sucesión numérica $(\langle y_n, x' \rangle)$ es convergente en $\mathbb{K}$, para cada $x' \in E'_1$. En efecto, sean $x' \in E'_1$ y $\epsilon > 0$. Como (x'_k) es densa en E'_1 , entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x'_{k_0} \in B_{\frac{\epsilon}{3\alpha}}(x')$, esto es,

$$\|x'_{k_0} - x'\| < \frac{\epsilon}{3\alpha}. \quad (*)$$

Como la sucesión $(\langle y_n, x'_{k_0} \rangle)_n$ es convergente, luego de Cauchy, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n_0, \quad n > n_0 \implies |\langle y_n, x'_{k_0} \rangle - \langle y_m, x'_{k_0} \rangle| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\|y_n\| \leq \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, y la desigualdad (*), resulta que

$$\begin{aligned} m > n_0, \quad n > n_0 \implies |\langle y_n, x' \rangle - \langle y_m, x' \rangle| &\leq |\langle y_n, x' \rangle - \langle y_n, x'_{k_0} \rangle| + \\ &+ |\langle y_n, x'_{k_0} \rangle - \langle y_m, x'_{k_0} \rangle| + \\ &+ |\langle y_m, x'_{k_0} \rangle - \langle y_m, x' \rangle| < \\ &< \|y_n\| \cdot \|x' - x'_{k_0}\| + \frac{\epsilon}{3} + \\ &+ \|y_m\| \|x'_{k_0} - x'\| \leq \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

de donde $(\langle y_n, x' \rangle)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego convergente para cada $x' \in E'_1$. La función $y'' : E'_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$y''(y') = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, y' \rangle, \quad y' \in E'_1$$

es una forma lineal continua en E'_1 , esto es, $y'' \in E''_1$, y siendo el espacio E_1 reflexivo, entonces existe $x \in E_1 \subset E$ tal que

$$\langle y', y'' \rangle = \langle x, y' \rangle$$

para todo $y' \in E'_1$. Demostremos finalmente que $y_n \rightharpoonup x$. En efecto, sea $x' \in E'$; entonces $y' = x'|_{E_1} \in E'_1$ (en donde $x'|_{E_1}$ denota la restricción de x' a E_1). Por consiguiente, se tiene que

$$\langle x, x' \rangle = \langle x, y' \rangle = \langle y', y'' \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, y' \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x' \rangle$$

cualquiera que sea $x' \in E'$, de donde $y_n \rightharpoonup x$. $\square$

Definición 1.4.4. Sean E un espacio normado y A un subconjunto de E .

1. Se dice que A es *débilmente secuencialmente compacto*, si es un subconjunto secuencialmente compacto para la topología débil $\sigma(E, E')$ de E , esto es, si toda sucesión en A posee una subsucesión débilmente convergente hacia algún punto de A .
2. Se dice que A es *relativamente débilmente secuencialmente compacto* si toda sucesión de elementos de A posee una subsucesión débilmente convergente hacia algún punto de E .

La proposición 1,4,9 asegura que en un espacio normado reflexivo todo subconjunto acotado es *relativamente débilmente secuencialmente compacto*.

Ejemplo 1.4.3. Sea A el subconjunto de ℓ^2 definido así:
 $A = \{x^{(m,n)} \in \ell^2; 1 \leq m < n, n \in \mathbb{N}\}$, en donde
 $x_m^{(m,n)} = 1$, $x_n^{(m,n)} = m$, y, $x_j^{(m,n)} = 0$, si $j \neq m$, $j \neq n$.

Entonces, el origen de ℓ^2 está en la adherencia débil de A , pero ninguna sucesión de elementos de A converge débilmente a cero:

1. El origen está en la adherencia débil de A . En efecto, sean $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}$, $k \geq 1$, elementos cualesquiera de ℓ^2 , $y^{(i)} = (y_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, k$ y

$$V = \bigcap_{i=1}^k \{x \in \ell^2; |\langle x, y^{(i)} \rangle| \leq 1\}$$

la correspondiente vecindad débil del origen. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{(i)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq 1$, tal que

$$|y_{m_0}^{(i)}| < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

También existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > m_0$, tal que

$$|m_0 y_{n_0}^{(i)}| < \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Entonces, como

$$|\langle x^{(m_0, n_0)}, y^{(i)} \rangle| = |y_{m_0}^{(i)} + m_0 y_{n_0}^{(i)}| < 1$$

para $i = 1, 2, \dots, k$, también $x^{(m_0, n_0)} \in V$, de donde $V \cap A \neq \emptyset$. Por consiguiente, el origen está en la adherencia débil de A .

2. Ninguna sucesión de elementos de A converge débilmente a cero. En efecto, sea $(x^{(k)})$ una sucesión cualquiera de elementos de A , $x^{(k)} = x^{(m_k, n_k)}$ con $1 \leq m_k < n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Existen dos posibilidades, a saber:

- a) La sucesión (m_k) es acotada en $\mathbb{N}$, esto es, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $m_k \leq j$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Si $z = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ es elemento de ℓ^2 cuyas j primeras componentes son iguales a 1, y que tiene cero en las restantes, entonces se tiene que

$$\langle x^{(m_k, n_k)}, z \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } n_k > j \\ 1 + m_k, & \text{si } n_k \leq j \end{cases}$$

luego $\langle x^{(m_k, n_k)} \rangle \geq 1 \not\rightarrow 0$, de donde $x^{(m_k, n_k)} \not\rightarrow 0$.

- b) La sucesión (m_k) no es acotada en $\mathbb{N}$. Entonces, existe una sub-sucesión (m_{k_j}) de (m_k) tal que $m_{k_j} \rightarrow \infty$.

Ahora bien,

$$\|x^{(m_{k_j}, n_{k_j})}\|_2 = \sqrt{1 + m_{k_j}^2} \rightarrow \infty$$

de donde $(x^{(m_{k_j}, n_{k_j})})$ es una subsucesión no acotada de la sucesión $(x^{(k)})$. Por lo tanto, la sucesión $(x^{(k)})$ no puede converger débilmente a cero, pues toda sucesión débilmente convergente en un espacio de Banach es acotada (ejercicio 1,5,2, más adelante).

De acuerdo con a) y b) se sigue que ninguna sucesión de elementos de A converge débilmente a cero. Por consiguiente, hemos completado el ejemplo.

Ejemplo 1.4.4. Si un punto $x^0 \in \ell^2$ está en la adherencia débil de un conjunto *acotado* $B \subset \ell^2$, entonces x^0 es límite débil de una sucesión de elementos de B . En efecto:

1. Supongamos inicialmente que $x^0 = 0$. Para $k = 1, 2, \dots$, sea

$$V_k = \bigcap_{i=1}^k \left\{ x \in \ell^2; |\langle x, e_i \rangle| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

donde, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $i \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, existe $z^{(k)} \in V_k \cap B$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Como B es acotado y $(z^{(k)}) \subset B$, entonces $(z^{(k)})$ es una sucesión acotada en ℓ^2 , espacio de Banach reflexivo, luego, por la proposición 1,4,9, existe una subsucesión $(z^{(k_i)})$ de $(z^{(k)})$ que converge débilmente hacia un punto $y = (y_n) \in \ell^2$. Demostremos que $y = 0$. En efecto, sea $j \in \mathbb{N}$ arbitrario, pero fijo. Para todo $k_i > j$, $(z^{(k_i)}) \in V_{k_i}$, luego se tiene que

$$|\langle z^{(k_i)}, e_j \rangle| \leq \frac{1}{k_i}$$

por consiguiente,

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle z^{(k_i)}, e_j \rangle = \langle y, e_j \rangle = y_j$$

esto es, $y_j = 0$, cualquiera que sea $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $y = 0$.

2. Supongamos que $x^0 \neq 0$. Sea $A = B - x^0 = \{y - x^0; y \in B\}$. Entonces, A es un subconjunto acotado de ℓ^2 , y, como $\overline{A} = \overline{B} - x^0$, y, $x^0 \in \overline{B}$, entonces $0 \in \overline{A}$, luego, por 1), existe una sucesión $(z^{(n)})$ en A tal que $z^{(n)} \rightharpoonup 0$. Si $z^{(n)} = x^{(n)} - x^0$ con $x^{(n)} \in B$, $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que $x^{(n)} \rightharpoonup x^0$. Queda así demostrada la afirmación.

Observación 1.4.4. Del ejemplo 1,4,3 se deduce que la topología débil $\sigma(\ell^2, \ell^2)$ no es metrizable, esto es, no existe una métrica d en ℓ^2 tal que la topología τ_d inducida por d en ℓ^2 coincida con $\sigma(\ell^2, \ell^2)$. Más generalmente, si E es un espacio normado, entonces la topología débil $\sigma(E, E')$ no es metrizable, a menos que E sea de dimensión finita (ver ejercicio 3,1,8). También se tiene que la topología débil* $\sigma(E', E)$ en E' es metrizable si y sólo si E posee una base de Hamel enumerable ([24], ejercicio 15, pag. 84).

Teorema 1.4.1. (Alaoglu) Sean E un espacio normado y E' su dual. Entonces, la bola unitaria cerrada B' de E' es $\sigma(E', E)$ -compacta.

Demostración. Sea $\mathbb{K}^E$ el producto cartesiano E -veces del cuerpo $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}^E = \prod_{x \in E} \mathbb{K}_x$, en donde $\mathbb{K}_x = \mathbb{K}$, para todo $x \in E$.

Cualquier elemento $(\alpha_x)_{x \in E}$ de $\mathbb{K}^E$ se puede considerar, de una manera natural, como una función $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, definiendo $f(x) = \alpha_x$, $x \in E$. Viceversa toda función $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ puede ser considerada como el elemento $(f(x))_{x \in E}$ de $\mathbb{K}^E$. Con estas consideraciones, se tiene que

$$E' \subset \mathbb{K}^E.$$

Se dota a $\mathbb{K}^E$ con la topología producto τ . Un sistema fundamental de vecindades de $f_0 \in \mathbb{K}^E$ está formado por los conjuntos de la forma

$$U = \bigcap_{i=1}^n \{f \in \mathbb{K}^E; |f(x_i) - f_0(x_i)| < \delta\}$$

en donde $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$. Se sigue que la topología producto τ induce en E' la topología $\sigma(E', E)$.

Sean $P_x = \{\alpha \in \mathbb{K}; |\alpha| \leq \|x\|\}$, para cada $x \in E$, y $P = \prod_{x \in E} P_x \subset \mathbb{K}^E$; en otras palabras, $P = \{f \in \mathbb{K}^E; |f(x)| \leq \|x\|, \text{ para cada } x \in E\}$. Como cada P_x , $x \in E$, es un conjunto compacto, el teorema de Tjonov⁵ implica que P es τ -compacto. Ahora bien, $B' \subset P$, pues si $x' \in B'$, entonces $|\langle x, x' \rangle| \leq \|x\|$, para cada $x \in E$, luego, $x' \in P$. Por lo tanto, si mostramos que B' es τ -cerrado, siendo P τ -compacto, resultará que B' es τ -compacto. Por consiguiente, como $B' \subset E'$ y τ induce en E' la topología $\sigma(E', E)$, entonces B' será $\sigma(E', E)$ -compacto, lo cual queríamos demostrar.

Demostremos entonces que B' es τ -cerrado. En efecto, sean f_0 un elemento de la τ -adherencia de B' , $x \in E$, $y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{K}$ y $\epsilon > 0$. El conjunto

$$V = \bigcap_{i=1}^3 \left\{ f \in \mathbb{K}^E; |f(x_i) - f_0(x_i)| < \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \right\}$$

en donde $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \alpha x + \beta y$, es una τ -vecindad de f_0 , luego existe $f \in V \cap B'$. Como, en particular, f es lineal, se tiene la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) &= (f_0(\alpha x + \beta y) - f(\alpha x + \beta y)) + \\ &+ (\alpha f(x) - \alpha f_0(x)) + \\ &+ (\beta f(y) - \beta f_0(y)) \end{aligned}$$

⁵Ver p.ej.[10],[17].

de donde, como $f \in V$, se sigue que

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)| < \epsilon$$

cualquiera que sea $\epsilon > 0$. Por consiguiente,

$$f_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y)$$

para todo $x \in E$, todo $y \in E$, todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $\beta \in \mathbb{K}$. Por lo tanto, f_0 es lineal.

Finalmente, demostremos que f_0 es continua y $\|f_0\| \leq 1$, de donde $f_0 \in B'$, y en consecuencia, B' es cerrado. En efecto, sean $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, y $\epsilon > 0$.

El conjunto

$$W = \{f \in \mathbb{K}^E; |f(x) - f_0(x)| < \epsilon\}$$

es una τ -vecindad de f_0 en $\mathbb{K}^E$, luego existe $f \in W \cap B'$, esto es, $f \in E'$, con $\|f\| \leq 1$, y, $|f(x) - f_0(x)| < \epsilon$. Por consiguiente, se tiene que

$$|f_0(x)| \leq |f_0(x) - f(x)| + |f(x)| < \epsilon + 1$$

cualquiera que sea $\epsilon > 0$, de donde $|f_0(x)| \leq 1$, para todo $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$. De aquí se sigue que $f \in E'$ y $\|f_0\| \leq 1$. $\square$

Corolario 1.4.2. *Toda bola cerrada en E' es $\sigma(E', E)$ -compacta.*

Demostración. Sea $\overline{B_\epsilon(x')}$ una bola cerrada en E' , de centro x' y radio $\epsilon > 0$. Como

$$\overline{B_\epsilon(x')} = x' + \epsilon B'$$

y B' es $\sigma(E', E)$ -compacta, entonces el corolario de la proposición 1,4,5 implica que $\overline{B_\epsilon(x')}$ es $\sigma(E', E)$ -compacta. $\square$

Corolario 1.4.3. *Todo subconjunto $\sigma(E', E)$ -cerrado y acotado de E' es $\sigma(E', E)$ -compacto.*

Proposición 1.4.10. *Sean E un espacio normado separable y E' su dual. Entonces, la topología inducida por $\sigma(E', E)$ en los subconjuntos $\sigma(E', E)$ -compactos de E' es metrizable. Más exactamente, si $K \subset E'$ es un conjunto $\sigma(E', E)$ -compacto, entonces K , dotado de la topología inducida por $\sigma(E', E)$, es un espacio topológico metrizable.*

Demostración.

1. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto X , con τ_2 más fina que τ_1 . Si τ_1 es de Hausdorff y X es τ_2 -compacto, entonces $\tau_2 = \tau_1$. En efecto, si $F \subset X$ es un conjunto τ_2 -cerrado, como X es τ_2 -compacto, entonces F es τ_2 -compacto, luego F es τ_1 -compacto, pues $\tau_1 \subset \tau_2$. (Ver Prop. 0,4,3) Por consiguiente, siendo τ_1 de Hausdorff, F es τ_1 -cerrado. Se sigue que $\tau_2 = \tau_1$.
2. Sean (X, τ) un espacio topológico compacto y $f_n : (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones continuas que separa los puntos de X , esto es, dados $x \in X, y \in X$ con $x \neq y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq f_n(y)$. Entonces, (X, τ) es un espacio metrizable. En efecto, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $|f_n(x)| \leq 1$, para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Si $x \neq y$, entonces, por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq f_n(y)$, esto es $|f_n(x) - f_n(y)| > 0$, luego, $d(x, y) > 0$. Se sigue que d es una métrica en X . Ahora bien, como cada función f_n es τ -continua y la serie que define d es uniformemente convergente en $X \times X$, entonces d como función de y es τ -continua, luego cualquier bola d -abierto en X , $B_\epsilon(x) = \{y \in X, d(y, x) < \epsilon\}, \epsilon > 0, x \in X$, es un τ -abierto de X . Se sigue que $\tau_d \subset \tau$, en donde τ_d es la topología en X inducida por la métrica d . Además, como τ_d es de Hausdorff y X es τ -compacto, entonces 1) implica que $\tau = \tau_d$, esto es, τ es metrizable.

3. Sean (x_n) un conjunto enumerable denso en E , y, $f_n : E' \longrightarrow \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$, la función definida por $f_n(x') = \langle x_n, x' \rangle, x' \in E'$. Cada f_n es una función $\sigma(E', E)$ -continua. Además, la sucesión (f_n) separa los puntos en E' , pues si $f_n(x') = f_n(y')$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces x' coincide con y' en un conjunto denso en E , de donde $x' = y'$. La proposición es ahora una consecuencia inmediata de la parte 2). $\square$

Corolario 1.4.4. *Sea E un espacio normado separable. Entonces, toda sucesión acotada en E' posee una subsucesión w^* -convergente en E' .*

Demostración. En efecto, cualquier sucesión acotada (x'_n) en E' está contenida en una bola cerrada $\overline{B}_\varepsilon(x')$ de E' , la cual, para la topología inducida por $\sigma(E', E)$, es un espacio métrico compacto. $\square$

Este corolario es una forma dual de la proposición 1,4,10, y se puede demostrar directamente, imitando la demostración de la misma (ejercicio 1,4,2).

Definición 1.4.5. Sea E un espacio vectorial. Una seminorma en E es una función $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface a las siguientes condiciones, cualesquiera que sean $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $q(x) \geq 0$;
2. $q(\lambda x) = |\lambda|q(x)$;
3. $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

La condición 2) implica que $q(0) = 0$. Además, si q es una seminorma tal que $q(x) = 0$ implica $x = 0$, entonces q es una norma.

Definición 1.4.6. Sean E un espacio vectorial y A un subconjunto de E .

1. Se dice que A es *convexo* si $(\alpha x + \beta y) \in A$, cualesquiera que sean $x \in A$, $y \in A$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{K}$, $\beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$.
2. Se dice que A es *equilibrado* o *circular*, si $\lambda A \subset A$ (esto es, $\lambda x \in A$, para todo $x \in A$), cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$.

Nótese que si A es equilibrado, entonces necesariamente $0 \in A$. También, si A es equilibrado, entonces $\lambda A = A$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$.

3. Si A es convexo y equilibrado, entonces se dice que A es *absolutamente convexo*.
4. Se dice que A es *absorbente* si para todo $x \in E$ existe $\alpha_0 > 0$ tal que $x \in \lambda A$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \geq \alpha_0$. Si A es equilibrado y para todo $x \in E$ existe $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$, tal que $x \in \mu A$, entonces A es absorbente. En efecto, sea $\alpha_0 = |\mu| > 0$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| \geq |\mu|$, entonces $|\lambda^{-1}\mu| \leq 1$, luego

$$x \in \mu A = \lambda (\lambda^{-1}\mu) A \subset \lambda A.$$

Ejemplo 1.4.5. Sea E un espacio normado.

Toda vecindad de 0 en E es un conjunto absorbente. En efecto, sean V una vecindad de 0 y $x \in E$ cualquiera. Por la continuidad de la operación multiplicación por un escalar en el punto $(0, x)$ (proposición 1,1,3,3) existen $\beta_0 > 0$ y W , una vecindad de x , tales que

$$|\lambda| \leq \beta_0, y \in W \implies \lambda y \in V.$$

Por lo tanto, como $x \in W$, si $\alpha_0 = \frac{1}{\beta_0}$, entonces

$$|\lambda| \geq \alpha_0 \implies x \in \lambda V$$

de donde V es absorbente. Se deduce que, en particular, toda vecindad débil de 0 es un conjunto absorbente.

Ejemplo 1.4.6. Si $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una seminorma en E , entonces los conjuntos

$$\begin{aligned} V &= \{x \in E; q(x) < 1\} \\ W &= \{x \in E; q(x) \leq 1\} \end{aligned}$$

son absolutamente convexos y absorbentes. En efecto, es inmediato que V y W son absolutamente convexos. Demostremos, por ejemplo, que V es absorbente. En efecto, sea $x \in E$. Entonces, $q(x) = 0$, ó, $q(x) > 0$.

1. Si $q(x) = 0$, entonces, $\frac{1}{\lambda}x \in V$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$, pues $q\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = \frac{1}{|\lambda|}q(x) = 0 < 1$. Por consiguiente, si $\alpha_0 > 0$ es cualquier número fijo, entonces se tiene que

$$|\lambda| \geq \alpha_0 \implies x = \lambda \left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \lambda V.$$

2. Si $\alpha_0 = 2q(x) > 0$, entonces resulta que

$$\begin{aligned} |\lambda| \geq \alpha_0 &\implies q\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \leq \frac{1}{2} < 1 \implies \\ &\implies \frac{1}{\lambda}x \in V \implies \\ &\implies x = \lambda \left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in \lambda V. \end{aligned}$$

Se concluye que V es absorbente.

Definición 1.4.7. Sean E un espacio vectorial y A un subconjunto de E . Se llama *funcional de Minkowski* del conjunto A a la función $q_A : E \longrightarrow [0, \infty]$ definida de la siguiente manera:

$$q_A(x) = \begin{cases} \inf \{ \rho > 0; x \in \rho A \}, & \text{si } x \in \rho A, \text{ para algún } \rho > 0. \\ \infty, & \text{si } x \notin \rho A, \text{ para ningún } \rho > 0. \end{cases}$$

Proposición 1.4.11. *El funcional de Minkowski q_A de un subconjunto A de un espacio vectorial E , tiene las siguientes propiedades:*

1. Si A es absorbente, entonces $q_A(x) < \infty$, para cada $x \in E$.
2. $q_A(\lambda x) = \lambda q_A(x)$, para todo $x \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda > 0$, esto es, q_A es una función positivamente homogénea.
3. Si A es convexo, entonces q_A es una función subaditiva, esto es,

$$q_A(x + y) \leq q_A(x) + q_A(y)$$

para todo $x \in E$ y todo $y \in E$.

4. Si A es equilibrado, entonces

$$q_A(\lambda x) = |\lambda| q_A(x)$$

para todo $x \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

5. Si A es convexo y $0 \in A$, entonces se tienen las siguientes relaciones:

$$\{x \in E; q_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E; q_A(x) \leq 1\}$$

Demostración.

1. Es inmediato a partir de la definición.
2. Sean $x \in E$ y $\lambda > 0$. De la siguiente igualdad entre conjuntos,

$$\{\rho > 0 : \lambda x \in \rho A\} = \lambda \{\alpha > 0; x \in \alpha A\}$$

se obtiene que $q_A(\lambda x) = \lambda q_A(x)$. Por lo tanto, 2).

3. Supongamos que A es convexo. De la siguiente relación:

$$\{\rho > 0; (x + y) \in \rho A\} \supset \{\alpha > 0; x \in \alpha A\} + \{\beta > 0; y \in \beta A\} \quad (*)$$

válida para cada $x \in E$ y cada $y \in E$, resulta que

$$q_A(x + y) \leq q_A(x) + q_A(y)$$

y por consiguiente, 3). Demostremos la relación (*). Sea $\rho = \alpha + \beta$, en donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \alpha A$, $y \in \beta A$. Entonces, $\frac{x}{\alpha} \in A$, $\frac{y}{\beta} \in A$, $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1$ y como A es convexo, resulta que $\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{y}{\beta}\right) \in A$, luego

$$x + y = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{y}{\beta} \right) \in (\alpha + \beta)A$$

esto es, $(x + y) \in \rho A$.

4. Supongamos que A es equilibrado. Sean $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Demostremos la siguiente igualdad:

$$\{\rho > 0; \lambda x \in \rho A\} = |\lambda| \{\alpha > 0; x \in \alpha A\}$$

de donde se obtiene que $q_A(\lambda x) = |\lambda| q_A(x)$ y por lo tanto, 4). En efecto:

a) Sea $\rho > 0$ tal que $\lambda x \in \rho A$ y demostremos que $\rho = |\lambda| \alpha$ con $\alpha > 0$ y $x \in \alpha A$. Como $\lambda x \in \rho A$, entonces

$$x \in \frac{\rho}{\lambda} A = \frac{\rho}{|\lambda|} \left(\frac{|\lambda|}{\lambda} \right) A = \frac{\rho}{|\lambda|} A$$

pues $\frac{|\lambda|}{\lambda} A = A$, ya que A es equilibrado. Por consiguiente, si $\alpha = \frac{\rho}{|\lambda|}$, entonces $\rho = |\lambda| \alpha$, y, $x \in \alpha A$.

b) Sea $\alpha > 0$ tal que $x \in \alpha A$ y demostremos que $\lambda x \in (|\lambda| \alpha) A$. En efecto,

$$\lambda x \in \lambda \alpha A = |\lambda| \alpha \left(\frac{\lambda}{|\lambda|} \right) A = |\lambda| \alpha A$$

pues $\frac{\lambda}{|\lambda|} A = A$, ya que A es equilibrado.

5. Supongamos que A es convexo y $0 \in A$.

a) Demostremos que

$$\{x \in E; q_A(x) < 1\} \subset A.$$

Si $q_A(x) < 1$, entonces existe $0 < \rho < 1$ tal que $x \in \rho A$, esto es, $\frac{x}{\rho} \in A$. Además, como $0 \in A$, entonces se tiene que

$$x = \rho \left(\frac{x}{\rho} \right) + (1 - \rho)0 \in A.$$

b) Ahora bien,

$$A \subset \{x \in E; q_A(x) \leq 1\}$$

pues si $x \in A$, entonces $1 \in \{\rho > 0; x \in \rho A\}$, luego $q_A(x) \leq 1$. $\square$

Corolario 1.4.5. *Si A es un subconjunto absolutamente convexo y absorbente de un espacio vectorial E , entonces el funcional de Minkowski q_A de A es una seminorma en E . Además,*

$$\{x \in E; q_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E; q_A(x) \leq 1\}.$$

Se dice que un subconjunto M de un espacio vectorial E es un *subespacio afín* de E si es el trasladado de un subespacio lineal de E , esto es, $M = x_0 + F$, con $x_0 \in E$, y F un subespacio lineal de E .

Teorema 1.4.2. *(Forma geométrica del teorema de Hahn-Banach) Sean E un espacio normado, A un subconjunto abierto convexo de E , y M un subespacio afín de E tal que $M \cap A = \emptyset$. Entonces, existe un hiperplano afín cerrado H tal que $H \supset M$ y $H \cap A = \emptyset$.*

Demostración. *Caso 1:* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Por translación, se puede suponer que $0 \in A$. Sea $M = x_0 + F$, en donde F es un subespacio lineal de E , $x_0 \in E$ y $x_0 \notin F$.

Como A es absorbente (ejemplo 1,4,5) y convexo, entonces, por la proposición 1,4,11, el funcional de Minkowski de A , $q_A : E \rightarrow \mathbb{R}$, es una función positivamente homogénea y subaditiva. Además, se tiene que

$$\{x \in E; q_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E; q_A(x) \leq 1\} \quad (*)$$

Sea $f : [x_0, F] \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal real definida por

$$f(\lambda x_0 + y) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, y \in F.$$

Se sigue que $M = f^{-1}(1)$. También, $f(x) \leq q_A(x)$, para todo $x \in [x_0, F]$, esto es,

$$f(\lambda x_0 + y) \leq q_A(\lambda x_0 + y)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $y \in F$. Para demostrar esta desigualdad, supongamos, por reducción al absurdo, que existen $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in F$, tales que $f(\lambda_1 x_0 + y_1) > q_A(\lambda_1 x_0 + y_1)$. Si

$$x = \frac{\lambda_1 x_0 + y_1}{f(\lambda_1 x_0 + y_1)}$$

entonces $f(x) = 1$, luego $x \in M$. Además, como $q_A(x) < 1$, entonces, por (*), $x \in A$, de donde $M \cap A \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Se sigue que $f(x) \leq q_A(x)$ para todo $x \in [x_0, F]$, luego, por el teorema de Hahn-Banach (ejercicio 1,3,16.a), existe una forma lineal $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ extensión de f , tal que $g(x) \leq q_A(x)$ para todo $x \in E$. Si

$$H = \{x \in E; g(x) = 1\}$$

entonces H es un hiperplano afín tal que $H \supset M$. Por otra parte, como $A = \{x \in E; q_A(x) < 1\}$ (ejercicio 1,4,7), entonces $A \cap H = \emptyset$, pues

$$x \in A \implies q_A(x) < 1 \implies g(x) < 1 \implies x \notin H.$$

Además como el hiperplano afín H no es denso (por ser $A \cap H = \emptyset$), se tiene que H es cerrado.

Caso 2: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Considerando E como un espacio vectorial real, por (Caso 1), existe un hiperplano afín real cerrado $\hat{H} \supset M$ tal que $A \cap \hat{H} = \emptyset$. Usando el ejercicio 1,4,8, se construye un hiperplano afín complejo $H \subset \hat{H}$ que contiene a M y tal que $H \cap A = \emptyset$. Esto completa la demostración del teorema. $\square$

Corolario 1.4.6. (*Teorema de separación de Hahn-Banach*) Sean E un espacio normado y $A \subset E$, $B \subset E$ dos conjuntos convexos, disyuntos, no vacíos, con A abierto. Entonces, existe una forma lineal continua $x' \in E'$ tal que $\langle A, x' \rangle \cap \langle B, x' \rangle = \emptyset$.

Demostración. Como para cada $x \in E$, el conjunto $A - x$ es abierto en E , entonces $A - B = \bigcup_{x \in B} (A - x)$ es abierto en E . Además, $A - B$ es convexo y $\{0\} \cap (A - B) = \emptyset$ (pues $A \cap B = \emptyset$). Por el teorema, existe un hiperplano cerrado H , que pasa por el origen, tal que $H \cap (A - B) = \emptyset$, luego

si $x' \in E'$ es una forma lineal continua tal que $\ker(x') = H$ (proposición 1,4,1 y ejercicio 1,3,4), entonces se tiene que $\langle A, x' \rangle \cap \langle B, x' \rangle = \emptyset$. $\square$

Corolario 1.4.7. *Si C es un subconjunto convexo de un espacio normado E y $x_0 \notin \overline{C}$, entonces existe una forma lineal continua $x' \in E'$ tal que $\langle x_0, x' \rangle \notin \overline{\langle C, x' \rangle}$.*

Demostración. Como $x_0 \notin \overline{C}$, existe un abierto convexo $U \ni x_0$ tal que $U \cap C = \emptyset$. Por el corolario 1,4,6, existe una forma lineal continua $x' \in E'$ tal que $\langle U, x' \rangle \cap \langle C, x' \rangle = \emptyset$, luego $\langle x_0, x' \rangle \notin \overline{\langle C, x' \rangle}$, pues $\langle U, x' \rangle$ es abierto (ejercicio 1,3,2) y $\langle x_0, x' \rangle \in \langle U, x' \rangle$. $\square$

Observación 1.4.5. Par el caso real, el corolario 1,4,6 nos dice que (bajo las hipótesis allí enunciadas) existe un hiperplano afín cerrado H tal que los conjuntos A y B quedan a uno y otro lado de H . El corolario 1,4,7 tiene una interpretación geométrica análoga.

Corolario 1.4.8. *Si C es un subconjunto convexo de un espacio normado E , entonces la adherencia de C en la topología débil $\sigma(E, E')$ coincide con la adherencia de C en la topología de la norma. Consecuentemente, un conjunto convexo C es $\sigma(E, E')$ -cerrado si y sólo si C es cerrado en la topología de la norma.*

Demostración. Sean $\overline{C}^{\sigma(E, E')}$ y $\overline{C}$ las adherencias de C en las topologías débil $\sigma(E, E')$ y de la norma, respectivamente. Como la topología débil $\sigma(E, E')$ es menos fina que la topología de la norma, $\overline{C} \subset \overline{C}^{\sigma(E, E')}$.

Demostremos ahora que $\overline{C} \supset \overline{C}^{\sigma(E, E')}$. En efecto, si $x_0 \notin \overline{C}$, entonces, por el corolario 1,4,7, existe una forma lineal continua $x' \in E'$ tal que $\langle x_0, x' \rangle \notin \overline{\langle C, x' \rangle}$, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$\{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda - \langle x_0, x' \rangle| < \delta\} \cap \langle C, x' \rangle = \emptyset.$$

Por consiguiente, si V es la $\sigma(E, E')$ -vecindad de x_0 definida por

$$V = x_0 + \{x \in E; |\langle x, x' \rangle| < \delta\}$$

entonces $V \cap C = \emptyset$, de donde $x_0 \notin \overline{C}^{\sigma(E, E')}$. $\square$

Si C no es convexo, la afirmación del corolario 1,4,8 puede ser falsa como la muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.4.7. Sea E un espacio normado de dimensión infinita. Entonces, la adherencia débil $\overline{S}^{\sigma(E,E')}$ de la esfera unitaria $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ es la bola unitaria cerrada $B = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. En efecto,

1. Como B es $\sigma(E, E')$ -cerrada (observación 1,4,2) y $S \subset B$, entonces $\overline{S}^{\sigma(E,E')} \subset B$.
2. Demostremos que $B \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. Sea $x_0 \in B$. Entonces: i) Si $\|x_0\| = 1$, $x_0 \in S \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. ii) Supongamos que $\|x_0\| < 1$. Sean $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ un subconjunto finito de E' y

$$V = x_0 + \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1\}$$

la correspondiente $\sigma(E, E')$ -vecindad de x_0 . Como E' es de dimensión infinita, existe $x' \in E'$ tal que $x' \notin [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$, luego (ver ejemplo 1.3.3), existe $y_0 \in E$ tal que $\langle y_0, x' \rangle \neq 0$, y, $\langle y_0, x'_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Sea

$$z_0 = x_0 + \frac{3y_0}{\|y_0\|}.$$

Entonces, $z_0 \in V$, luego, por la convexidad de V , el segmento cerrado que une a x_0 con z_0 , $[x_0, z_0] = \{tx_0 + (1-t)z_0; 0 \leq t \leq 1\}$, está totalmente contenido en V . Ahora bien, como el segmento abierto que une a x_0 con z_0 , $(x_0, z_0) = \{tx_0 + (1-t)z_0; 0 < t < 1\}$, es conexo, $\|x_0\| < 1$, y, $\|z_0\| > 2 > 1$, entonces existe $v_0 \in (x_0, z_0) \cap S$. Se sigue que $v_0 \in V \cap S$, luego $V \cap S \neq \emptyset$. Por consiguiente, $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E')}$, lo cual queríamos demostrar.

De 1) y 2) se sigue que $\overline{S}^{\sigma(E,E')} = B$. $\square$

Lema 1.4.1. Sean E un espacio normado, $A \subset E'$ un subconjunto absolutamente convexo $\sigma(E', E)$ -cerrado, $y, x'_0 \in E'$, $x'_0 \notin A$. Entonces, existe una forma lineal $g : E' \rightarrow \mathbb{K}$, $\sigma(E', E)$ -continua, tal que $g(x'_0) > 1$ y $|g(x')| \leq 1$, para todo $x' \in A$.

Demostración. Como A es $\sigma(E', E)$ -cerrado y $x'_0 \notin A$, por la continuidad de la operación adición

$+$: $(E', \sigma(E', E)) \times (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow (E', \sigma(E', E))$, tenemos que existe una $\sigma(E', E)$ -vecindad W de 0 tal que $(x'_0 + W + W) \cap A = \emptyset$. Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son elementos de E tales que $V = \cap_{i=1}^n \{x' \in E'; |\langle x_i, x' \rangle| < 1\} \subset W$, entonces $(x'_0 + V + V) \cap A = \emptyset$, de donde se sigue que

$$(x'_0 + V) \cap (A + V) = \emptyset. \quad (*)$$

Ahora bien, el conjunto $U = A + V = \cup_{a \in A} (a + V)$ es $\sigma(E', E)$ -abierto, luego absorbente (ejemplo 1,4,5,2). Además, como U también es absolutamente convexo, entonces q_U , el funcional de Minkowski de U , es una seminorma en E' , y se tiene que

$$\{x' \in E'; q_U(x') < 1\} \subset U \subset \{x' \in E'; q_U(x') \leq 1\}.$$

Poniendo $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, x'_0 \rangle|$, tenemos que $\left(\frac{x'_0}{2(\alpha+1)}\right) \in V$, luego $\left(x'_0 - \frac{x'_0}{2(\alpha+1)}\right) \in x'_0 + V$, de donde, por (*), $x'_0 - \frac{x'_0}{2(\alpha+1)} \notin U$. Por consiguiente,

$$q_U(x'_0) > \left(1 - \frac{1}{2(\alpha+1)}\right) q_U(x'_0) = q_U\left(x'_0 - \frac{x'_0}{2(\alpha+1)}\right) \geq 1$$

siendo que la primera desigualdad se sigue por el hecho de que $1 - \frac{1}{2(\alpha+1)} < 1$. Se sigue que $q_U(x'_0) > 1$.

Se define la forma lineal $f : [x'_0] \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$f(\lambda x'_0) = \lambda q_U(x'_0)$$

Se sigue que $|f(x')| \leq q_U(x')$, para todo $x' \in [x'_0]$, luego por el teorema de Hahn-Banach (ejercicio 1,3,16.a), existe una forma lineal $g : E' \longrightarrow \mathbb{K}$, extensión de f tal que

$$|g(x')| \leq q_U(x') \quad (\dagger)$$

para todo $x' \in E'$. Entonces, se tienen las siguientes afirmaciones:

1. g es $\sigma(E', E)$ -continua. En efecto, dado $\epsilon > 0$, el conjunto ϵU es una $\sigma(E', E)$ -vecindad de 0 en E' . Ahora bien, como $q_U(x') \leq 1$, para todo $x' \in U$, entonces teniendo en cuenta ($\dagger$), resulta que

$$y' \in \epsilon U \implies |g(y')| \leq \epsilon$$

de donde la afirmación.

2. $g(x'_0) > 1$, pues

$$g(x'_0) = f(x'_0) = q_U(x'_0) > 1.$$

3. Como $A \subset U$ y $q_U(x') \leq 1$, para todo $x' \in U$, entonces, por $(\dagger)$, se tiene que $|g(x')| \leq 1$, para todo $x' \in A$.

Esta última afirmación completa la demostración del lema. $\square$

Teorema 1.4.3. *Sean E un espacio normado, $\phi : E \longrightarrow E''$, $\phi(x) = \tilde{x}$, la aplicación canónica de E en su bidual E'' , B y B'' las bolas unitarias cerradas de E y E'' , respectivamente. Entonces, la $\sigma(E'', E')$ -adherencia en E'' de $\phi(B)$ es B'' .*

Demostración. Sea $\Sigma = \overline{\phi(B)}^{\sigma(E'', E')}$. Como B'' es $\sigma(E'', E')$ -cerrada (observación 1,4,2) y $\phi(B) \subset B''$ (pues $\|\phi\| = 1$), entonces se tiene que $\Sigma \subset B''$.

Demostremos que $B'' \subset \Sigma$, de donde $\Sigma = B''$. En efecto, supongamos que $x''_0 \notin \Sigma$. Entonces, por el lema 1,4,1, existe una forma lineal $g : E'' \longrightarrow \mathbb{K}$, $\sigma(E'', E')$ -continua, tal que

$$\begin{aligned} g(x''_0) &> 1 \\ |g(x'')| &\leq 1 \end{aligned}$$

para todo $x'' \in \Sigma$, en particular, para todo $\tilde{x} \in \phi(B)$. Ahora bien, por el ejercicio 1,4,1, existe una forma lineal continua $x'_1 \in E'$ tal que

$$g(x'') = \langle x'_1, x'' \rangle$$

para todo $x'' \in E''$. Por consiguiente,

$$|\langle x, x'_1 \rangle| = |\langle x'_1, \tilde{x} \rangle| = |g(\tilde{x})| \leq 1$$

para todo $x \in B$, de donde $\|x'_1\| \leq 1$. Finalmente, resulta que

$$\|x''_0\| = \sup_{\|x'\| \leq 1} |\langle x', x''_0 \rangle| \geq \langle x'_1, x''_0 \rangle = g(x''_0) > 1,$$

luego $x''_0 \notin B''$. $\square$

Corolario 1.4.9. *Un espacio normado E es reflexivo si y sólo si la bola unitaria cerrada B de E es $\sigma(E, E')$ -compacta.*

Demostración. Sea $\phi : E \longrightarrow E''$, $\phi(x) = \tilde{x}$, la aplicación canónica de E en su bidual E'' .

1. Si E es un espacio reflexivo, entonces $\phi(B) = B''$. Entonces, $\phi(B) = B''$ es $\sigma(E'', E')$ -compacta (teorema 1,4,1), luego B es $\sigma(E, E')$ -compacta.
2. Recíprocamente, si B es $\sigma(E, E')$ -compacta, esto es, $\phi(B)$ es $\sigma(\tilde{E}, E')$ -compacta, entonces $\phi(B)$ es $\sigma(E'', E')$ -compacta (pues la topología $\sigma(\tilde{E}, E')$ es la inducida en $\tilde{E}$ por $\sigma(E'', E')$), luego $\sigma(E'', E')$ -cerrada, de donde, por el teorema, $\phi(B) = B''$ y por consiguiente E es reflexivo.

□

Observación 1.4.6. Si en un espacio normado E toda sucesión acotada posee una subsucesión débilmente convergente, entonces la bola unitaria cerrada de E es débilmente compacta ([4], teorema 3,2,1), luego, por el corolario anterior, E es reflexivo. Esto muestra que la recíproca de la proposición 1,4,9 es verdadera.

Observación 1.4.7. Es fácil verificar que si un espacio de Banach E es reflexivo, entonces para toda forma lineal continua $f \in E'$, existe $x_0 \in E$, con $\|x_0\| = 1$, tal que $|f(x_0)| = \|f\|$. Recíprocamente, esta propiedad caracteriza a los espacios de Banach reflexivos. (James [12]; ver [4], 3,4).

Ejercicios de la sección 1.4

1. Sea E un espacio normado. Demostrar que una forma lineal $f : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua si y sólo si existe $x \in E$ tal que $f(x') = \langle x, x' \rangle$, para todo $x' \in E'$.
2. Demostrar, sin usar la proposición 1,4,10, que si E es un espacio normado separable, entonces para cualquier sucesión acotada (x'_n) en E' existen una subsucesión (x'_{n_k}) de (x'_n) , y, $x'_0 \in E'$ tales que $x'_{n_k} \xrightarrow{w*} x'_0$.
Sugerencia: Imite la demostración de la proposición 1,4,9.
3. Demostrar que si E es un espacio normado de dimensión infinita, entonces el complemento de la bola unitaria (abierto o cerrado) de E es débilmente denso en E .
4. Sean E un espacio normado de dimensión infinita y E' su dual. Demostrar que la adherencia de la esfera unitaria de E' en la topología $\sigma(E', E)$ de E' es la bola unitaria cerrada de E' .

5. Demostrar que si E es un espacio normado separable o reflexivo, de dimensión infinita, entonces existe una sucesión (x'_n) en E' tal que $\|x'_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, y $x'_n \xrightarrow{w^*} 0$ (esto es, $\langle x, x'_n \rangle \longrightarrow 0$, para cada $x \in E$). Este resultado es válido en cualquier espacio de Banach E de dimensión infinita. Para su demostración, remitimos al lector a [15] o [20].
6. Sean E un espacio normado y (x_n) una sucesión en E , débilmente convergente a $x_0 \in E$. Demostrar que existe una sucesión $(\sum_{n=1}^m \lambda_n^m x_n)_m$ de elementos que son combinaciones lineales finitas de los x_n , $n \in \mathbb{N}$, convergente en norma hacia x_0 .
7. Sean E un espacio normado y A un subconjunto abierto de E con $0 \in A$. Si q_A es el funcional de Minkowski de A , demostrar que

$$A \subset \{x \in E; q_A(x) < 1\}.$$

Sugerencia: Dado $x \in A$, $x \neq 0$, sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset A$. Escoger $\frac{\|x\|}{\epsilon + \|x\|} < \rho < 1$. Demostrar que $\frac{x}{\rho} \in B_\epsilon(x)$.

8. Sean E un espacio vectorial complejo y H un hiperplano real en E . Demostrar que $H \cap (iH)$ es un hiperplano complejo en E .

1.5. Teoremas de Banach-Steinhaus, de la aplicación abierta y del gráfico cerrado

Teorema 1.5.1. (*Banach-Steinhaus; “Principio de la acotación uniforme”*). Sean E un espacio de Banach y $(x'_i)_{i \in I}$ una familia en E' tal que para cada $x \in E$, la familia $(\langle x, x'_i \rangle)_{i \in I}$ es acotada en $\mathbb{K}$. Entonces, existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|x'_i\| \leq \alpha$, para todo $i \in I$.

Demostración. Para $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$ sean

$$F_{n,i} = \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq n\}$$

y, $F_n = \cap_{i \in I} F_{n,i}$. Entonces, (F_n) es una sucesión de subconjuntos cerrados de E y, por hipótesis, se tiene que $E = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Como E es un espacio de Baire (teorema 0,3,2), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existen $x_0 \in F_{n_0}$, y, $\epsilon > 0$ tales que $B_\epsilon(x_0) \subset F_{n_0}$, o sea,

$$x \in B_\epsilon(x_0), i \in I \implies |\langle x, x'_i \rangle| \leq n_0.$$

Ahora bien, si $x \in E$, $x \neq 0$, entonces $\left(x_0 + \frac{\epsilon x}{2\|x\|}\right) \in B_\epsilon(x_0)$, luego $\forall i \in I$,

$$\frac{\epsilon}{2\|x\|} |\langle x, x'_i \rangle| = \left| \left\langle \frac{\epsilon x}{2\|x\|}, x'_i \right\rangle \right| \leq \left| \left\langle x_0 + \frac{\epsilon x}{2\|x\|}, x'_i \right\rangle \right| + |\langle x_0, x'_i \rangle| \leq 2n_0.$$

Por consiguiente, si $\alpha = \frac{4n_0}{\epsilon}$, entonces se tiene que $|\langle x, x'_i \rangle| \leq \alpha\|x\|$, para todo $i \in I$. $\square$

Corolario 1.5.1. Sean E un espacio de Banach y (f_n) una sucesión en E' que converge puntualmente a f (esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, para cada $x \in E$). Entonces, $f \in E'$.

Ejemplo 1.5.1. Sean $E = \ell^2$, y, $f_n : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, la forma lineal definida por $f_n(x) = x_n$, si $x = (x_n)$. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

para cada $x \in \ell^2$. Sin embargo, $\|f_n\| = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego (f_n) converge puntualmente, pero no en norma, a la función idénticamente nula.

Teorema 1.5.2. (Teorema de la Aplicación Abierta) Sean E, F espacios de Banach. Entonces toda aplicación lineal continua sobreyectiva $T : E \longrightarrow F$, es una aplicación abierta.

Demostración. Para $\epsilon > 0$, sean

$$B_\epsilon^E = \{x \in E; \|x\| < \epsilon\}$$

y

$$B_\epsilon^F = \{y \in F; \|y\| < \epsilon\}$$

las bolas de centro cero y radio ϵ de E y F , respectivamente.

1. Demostremos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^F \subset T(B_\epsilon^E)$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Entonces, se tiene que

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} j B_{\epsilon_n}^E$$

de donde, como T es sobreyectiva, entonces

$$F = T(E) = \bigcup_{j=1}^{\infty} j T(B_{\epsilon_n}^E).$$

Por lo tanto, como F es un espacio de Baire, existe $j_n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\text{int}(j_n T(B_{\epsilon_n}^E))} \neq \emptyset$. Por otra parte, como

$$\overline{T\left(B_{\frac{\epsilon_n}{2}}^E\right)} = \frac{1}{2j_n} \overline{(j_n T(B_{\epsilon_n}^E))}$$

se sigue que $\text{int}\left(\overline{T\left(B_{\frac{\epsilon_n}{2}}^E\right)}\right) \neq \emptyset$, luego existe un abierto no vacío V_n en F tal que $V_n \subset \overline{T\left(B_{\frac{\epsilon_n}{2}}^E\right)}$. Por consiguiente, se tiene que

$$\overline{T(B_{\epsilon_n}^E)} \supset \overline{T\left(B_{\frac{\epsilon_n}{2}}^E\right) - T\left(B_{\frac{\epsilon_n}{2}}^E\right)} \supset \overline{T\left(B_{\frac{\epsilon_n}{2}}^E\right)} - \overline{T\left(B_{\frac{\epsilon_n}{2}}^E\right)} \supset V_n - V_n,$$

y siendo $V_n - V_n = \bigcup_{x \in V_n} x - V_n$ un abierto en F con $0 \in V_n - V_n$, entonces existe $0 < \delta_n < \frac{1}{n}$ tal que

$$B_{\delta_n}^F \subset (V_n - V_n) \subset \overline{T(B_{\epsilon_n}^E)}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Demostremos que

$$B_{\delta_1}^F \subset T(B_{\epsilon_1}^E)$$

y por consiguiente, la afirmación. Sea $y \in B_{\delta_1}^F$; entonces, por (1) para $n = 1$, $y \in \overline{T(B_{\epsilon_1}^E)}$, luego $B_{\delta_2}^F(y) \cap T(B_{\epsilon_1}^E) \neq \emptyset$; sea $x_1 \in B_{\epsilon_1}^E$ con

$$\|y - T(x_1)\| < \delta_2.$$

Tenemos, aplicando (1) para $n = 2$, $(y - T(x_1)) \in \overline{T(B_{\epsilon_2}^E)}$, luego $B_{\delta_3}^F(y - T(x_1)) \cap T(B_{\epsilon_2}^E) \neq \emptyset$; sea $x_2 \in B_{\epsilon_2}^E$ con

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \delta_3.$$

Usando inducción y la relación (1), se construye así una sucesión (x_n) en E tal que $\|x_n\| < \epsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, y

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n T(x_k) \right\| < \delta_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \frac{\epsilon}{2} < \infty$$

de donde se sigue que existe $x \in E$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = x. \quad (3)$$

Además, $\|x\| < \epsilon$, luego $x \in B_{\epsilon}^E$. Demostremos que $y = T(x)$ y por consiguiente, $y \in T(B_{\epsilon}^E)$, lo cual queríamos demostrar. En efecto, por ser T lineal y continua, y teniendo en cuenta (2) y (3), resulta que

$$\begin{aligned} \|y - T(x)\| &= \left\| y - T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k\right) \right\| = \\ &= \left\| y - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T(x_k) \right\| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| y - \sum_{k=1}^n T(x_k) \right\| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

esto es, $y = T(x)$.

2. Sean U un abierto en E , $y \in T(U)$, $x \in U$, y, $\epsilon > 0$ tales que $y = T(x)$, $y, x + B_{\epsilon}^E \subset U$. Por la parte 1, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta}^F \subset T(B_{\epsilon}^E)$. Por consiguiente,

$$y + B_{\delta}^F \subset T(x) + T(B_{\epsilon}^E) = T(x + B_{\epsilon}^E) \subset T(U)$$

de donde $T(U)$ es abierto en F . Por consiguiente, T es una aplicación abierta. $\square$

Corolario 1.5.2. *(Teorema del isomorfismo de Banach) Sean E, F espacios de Banach. Entonces, toda aplicación lineal, continua, biyectiva $T : E \longrightarrow F$ es un isomorfismo.*

Corolario 1.5.3. *Sean E, F espacios de Banach y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $R(T)$, la imagen de E por T , es un subespacio cerrado de F .
2. Existe una constante $\alpha > 0$, tal que para todo $y \in R(T)$ existe un $x \in E$ con $y = T(x)$, y , $\|x\| \leq \alpha\|y\|$.

Demostración. $1 \implies 2$: Si $R(T)$ es cerrado, como F es completo, entonces $R(T)$ es completo, luego de Banach. Por el teorema, $T : E \longrightarrow R(T)$ es una aplicación abierta. Por consiguiente, si B es la bola unitaria abierta de E , entonces $T(B)$ es abierto en $R(T)$, de donde existe $\delta > 0$ tal que

$$\{y \in R(T); \|y\| < \delta\} \subset T(B). \quad (4)$$

Sean $\alpha = \frac{2}{\delta} > 0$, $y \in R(T)$, $y \neq 0$. Entonces, $\frac{\delta y}{2\|y\|} \in R(T)$, y, $\left\| \frac{\delta y}{2\|y\|} \right\| < \delta$, luego, por (4), existe $z \in E$ con $\|z\| < 1$, tal que $T(z) = \frac{\delta y}{2\|y\|}$. Por consiguiente, si $x = \frac{2\|y\|}{\delta} z$, entonces $T(x) = y$, y, $\|x\| \leq \alpha\|y\|$.

$2 \implies 1$: Supongamos válida la condición 2). Como T es continuo, entonces $N(T)$, el núcleo de T , es un subespacio cerrado de E , y siendo E de Banach, el espacio cociente $E/N(T)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\dot{x}\| = \inf \{\|x + y\|; y \in N(T)\}$$

(Proposición 1,2,4). La aplicación

$$\dot{x} = x + N(T) \in E/N(T) \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{T}(\dot{x}) = T(x) \in R(T)$$

es lineal, continua y biyectiva (proposición 1,2,6). Sea α como en 2) y demostremos que

$$\|\dot{x}\| \leq \alpha \left\| \tilde{T}(\dot{x}) \right\| \quad (5)$$

para todo $\dot{x} \in E/N(T)$, o sea, que $\tilde{T}^{-1}$ es continua, de donde resultará que $\tilde{T} : E/N(T) \longrightarrow R(T)$ es un isomorfismo, y siendo $E/N(T)$ completo, entonces $R(T)$ también será completo, luego cerrado.

Demostremos, pues, la desigualdad (5). Sea $\dot{x} \in E/N(T)$; entonces, $\tilde{T}(\dot{x}) = T(x) \in R(T)$, luego, por hipótesis, existe $z \in E$ tal que $T(z) = T(x)$, y,

$$\|z\| \leq \alpha \|T(x)\| = \alpha \left\| \tilde{T}(\dot{x}) \right\| \quad (6)$$

Ahora bien,

$$\tilde{T}(\dot{z}) = T(z) = T(x) = \tilde{T}(\dot{x})$$

luego $\dot{z} = \dot{x}$, pues, $\tilde{T}$ es inyectiva. Por consiguiente, teniendo en cuenta (6), se tiene que

$$\|\dot{x}\| = \|\dot{z}\| \leq \|z\| \leq \alpha \left\| \tilde{T}(\dot{x}) \right\|$$

esto es, $\|\dot{x}\| \leq \alpha \|\tilde{T}(\dot{x})\|$, para todo $\dot{x} \in E/N(T)$. Esto completa la demostración del corolario. $\square$

Se sabe que si X e Y son espacios topológicos, siendo Y de Hausdorff, y $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces, $G(f) = \{(x, f(x)); x \in X\}$, el gráfico de f , es un subconjunto cerrado del espacio producto $X \times Y$. La recíproca de este resultado no es válida, en general. Por ejemplo, sean $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, y, $f : X \rightarrow Y$ la función definida así:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Entonces, $G(f) = \{(x, \frac{1}{x}); 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$ es un subconjunto cerrado del espacio producto $[0, 1] \times \mathbb{R}$, pero f no es continua. En contraste, para el caso lineal se tiene el siguiente

Teorema 1.5.3. *(Teorema del gráfico cerrado) Sean E, F espacios de Banach, y, $T : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Si el gráfico de T , $G(T) = \{(x, T(x)); x \in E\}$ es un subconjunto cerrado del espacio producto $E \times F$, entonces T es continua.*

Demostración. Ya que E y F son espacios de Banach, así también lo es el espacio producto $E \times F$, y como, por hipótesis, $G(T)$ es un subespacio cerrado de $E \times F$, entonces es de Banach. Ahora bien, la aplicación

$$(x, T(x)) \in G(T) \xrightarrow{P_1} P_1(x, T(x)) = x \in E$$

es lineal, biyectiva y continua, pues

$$\|P_1((x, T(x)))\| = \|x\| \leq \|(x, T(x))\|$$

luego, por el teorema del isomorfismo de Banach, su inversa

$$x \in E \xrightarrow{P_1^{-1}} P_1^{-1}(x) = (x, T(x)) \in G(T)$$

es continua. Además, como la aplicación

$$(x, T(x)) \in G(T) \xrightarrow{P_2} P_2((x, T(x))) = T(x) \in F$$

es continua, entonces $T = P_2 \circ P_1^{-1} : E \rightarrow F$ es continua. $\square$

Corolario 1.5.4. Sean E, F espacios de Banach y $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal con la siguiente propiedad:

Si (x_n) es una sucesión en E , convergente hacia $x \in E$, tal que $T(x_n) \longrightarrow y$ en F , entonces $y = T(x)$.

En este caso T es continua.

Demostración. Sea $(x_0, y_0) \in \overline{G(T)} \subset E \times F$ un punto adherente al gráfico de T . Entonces, existe una sucesión $(z_n) \subset G(T)$ tal que $z_n \rightarrow (x_0, y_0)$. Si $z_n = (x_n, T(x_n)) \in G(T)$, $n \in \mathbb{N}$, resulta que

$$x_n \rightarrow x_0, \text{ y, } T(x_n) \rightarrow y$$

luego, por hipótesis, $y_0 = T(x_0)$, esto es, $(x_0, y_0) \in G(T)$. Por consiguiente $G(T)$ es cerrado, luego, por el teorema, T es continua. $\square$

Definición 1.5.1. Sean E, F espacios normados. Se dice que una aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ es un *operador cerrado* cuando su gráfico $G(T)$ es un subconjunto (subespacio) cerrado del espacio producto $E \times F$.

Observación 1.5.1.

1. El teorema del gráfico cerrado implica el teorema del isomorfismo de Banach, luego son equivalentes. En efecto, supongamos válido el teorema del gráfico cerrado y sean E, F espacios de Banach, y, $T : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal continua biyectiva. La aplicación

$$(x, y) \in E \times F \xrightarrow{L} (y, x) \in F \times E$$

es un isomorfismo (isométrico) y como $G(T)$ es cerrado (pues T es continua), entonces $G(T^{-1}) = L(G(T))$ es cerrado en $F \times E$, luego, por hipótesis, $T^{-1} : F \longrightarrow E$ es continua.

2. Si uno de los espacios E ó F no es de Banach, pueden existir operadores lineales $T : E \longrightarrow F$ que son cerrados, pero no continuos, como se muestra en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1.5.2. Sean $E = C^1[0, 1]$ el espacio de las funciones (reales o complejas) continuamente diferenciables en el intervalo cerrado $[0, 1]$, y, $F = C[0, 1]$ el espacio de las funciones continuas (reales o complejas) también

definidas en el intervalo $[0, 1]$, ambos espacios, E y F , con la norma del supremo:

$$\|f\| = \sup \{|f(t)|; t \in [0, 1]\}.$$

Del teorema de Weierstrass se sigue que E no es un espacio de Banach.

Ahora bien el operador lineal

$$f \in E \xrightarrow{T} T(f) = f' \in F$$

que a cada función continuamente diferenciable f le hace corresponder su derivada f' , es cerrado pero no continuo. En efecto:

1. T es cerrado, pues si una sucesión de funciones diferenciables (f_n) converge a una función f , uniformemente en $[0, 1]$ (o sea, si $f_n \rightarrow f$ en el espacio E) y la sucesión de sus derivadas (f'_n) converge a una función g , uniformemente en $[0, 1]$ o sea, si $T(f_n) \rightarrow g$ en el espacio F , entonces f es diferenciable y se tiene que $f' = g$ (o sea, $g = T(f)$).
2. T no es continuo, ya que si $f_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|f_n\| = 1$ y $\|T(f_n)\| = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.5.3. Sean $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita, y, $(h_i)_{i \in I}$ una base de Hamel de E . Se puede suponer que $\|h_i\| = 1$, para todo $i \in I$. Se define en E otra norma $\|\cdot\|_1$ de la siguiente manera: Si $x \in E$, se tiene $x = \sum_{i \in I} \lambda_i h_i$, en donde $\lambda_i = 0$ excepto para un número finito de índices $i \in I$; entonces, definimos

$$\|x\|_1 = \sum_{i \in I} |\lambda_i|$$

Tenemos las siguientes afirmaciones:

1. Es inmediato que $\|x\| \leq \|x\|_1$, para todo $x \in E$, luego la aplicación identidad $id. : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ es un operador continuo.
2. El espacio $(E, \|\cdot\|_1)$ no es completo. En efecto, sean $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ un subconjunto infinito enumerable de la base $(h_i)_{i \in I}$, y, $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} y_k$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, de la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ se sigue que (x_n) es una sucesión de Cauchy en E según la norma $\|\cdot\|_1$; sin embargo, (x_n) no es convergente a ningún punto de E según esta norma, pues si existiera $x \in E$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0$, entonces, por 1, se tendría

que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, y por consiguiente, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} y_k$, entendiéndose la convergencia de la serie según la norma $\|\cdot\|_1$. Ahora bien, x se expresa también en la forma: $x = \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_m z_m$, en donde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son escalares, y los $z_1, \dots, z_m$ son elementos de la base de Hamel $(h_i)_{i \in I}$. Se tiene entonces $\sum_{j=1}^m \lambda_j z_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} y_k$, lo que es absurdo.

3. Es inmediato que la aplicación identidad $T : (E, \|\cdot\|) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$, $T(x) = x$, $x \in E$, es un operador lineal cerrado con inverso continuo (por 1)), de donde T no es continuo, pues de lo contrario sería un isomorfismo y, como $(E, \|\cdot\|)$ es de Banach, entonces $(E, \|\cdot\|_1)$ también lo sería, lo que es una contradicción (por la parte 2)).

Definición 1.5.2. Sean E un espacio vectorial y M, N subespacios lineales de E . Se dice que E es suma directa de los subespacios M y N , lo cual se denota $E = M \oplus N$, cuando

1. $E = M + N$, y 2. $M \cap N = \{0\}$.

La condición 2 significa que la representación de cada elemento de E como suma de elementos de M y N , es única. Si $E = M \oplus N$, entonces la aplicación $P : E \longrightarrow E$, $P(x_1 + x_2) = x_1$, $x_1 \in M$, $x_2 \in N$, tiene las siguientes propiedades:

1. P es un operador lineal
2. $P(E) = M$, $P^{-1}(0) = N$
3. $P \circ P = P$.
4. Para todo $x \in E$, se tiene $P(x) = x$, si y solamente si $x \in M$.

Recíprocamente, si $P : E \longrightarrow E$ es un operador lineal tal que $P \circ P = P$, entonces se tiene que $E = P(E) \oplus P^{-1}(0)$.

Definición 1.5.3. Sea E un espacio vectorial. Se dice que una aplicación lineal $P : E \longrightarrow E$ es una *proyección* en E si $P \circ P = P$.

Definición 1.5.4. Sean E un espacio de Banach y M, N subespacios lineales de E . Se dice que E es *suma directa topológica* de los subespacios M y N cuando,

1. $E = M \oplus N$, y
2. M y N son subespacios cerrados.

En este caso, se dice también que M es *sumando directo* de E y que N es *complemento topológico* de M .

Proposición 1.5.1. *Sea E un espacio de Banach.*

1. *Si $P : E \longrightarrow E$ es una proyección continua en E , entonces ambos subespacios $M = P(E)$ y $N = P^{-1}(0)$ son cerrados en E .*
2. *Recíprocamente, si M y N son subespacios (cerrados) de E tales que E es una suma directa topológica de M y N , entonces la proyección en E (sobre M) $P : E \longrightarrow E$, $P(x_1 + x_2) = x_1$, $x_1 \in M$, $x_2 \in N$, es continua.*

Consecuentemente, la existencia de subespacios cerrados con complementos topológicos en un espacio de Banach E es equivalente a la existencia de proyecciones continuas en E .

Demostración.

1. Evidentemente, si P es continua, entonces $N = P^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de E .

Demostremos que $M = P(E)$ es cerrado en E . En efecto, sea $x \in M$ un punto adherente a M . Entonces, existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \rightarrow x$. Ahora, como $x_n = P(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, y P es continua, entonces resulta que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = P(x)$$

esto es, $P(x) = x$, luego $x \in M$.

2. Recíprocamente, supongamos que E es suma directa topológica de los subespacios (cerrados) M y N , y sea $P : E \longrightarrow E$ la correspondiente proyección de E (sobre M). Demostremos que $G(P)$, el gráfico de P , es cerrado en el espacio producto $E \times E$, de donde, por el teorema 1,5,3, P es continua. En efecto, sea $(x, y) \in \overline{G(P)}$ un punto adherente al gráfico. Entonces, existe una sucesión (x_n) en E tal que $x_n \rightarrow x$, y, $P(x_n) \rightarrow y$. Por consiguiente, como $P(x_n) \in M$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$y \in M$. Además, como $(x_n - P(x_n)) \in N$, $n \in \mathbb{N}$ y N es cerrado, entonces resulta que $x - y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - P(x_n)) \in N$. Por lo tanto, $x = y + (x - y) \in M \oplus N$, luego $y = P(x)$, de donde $(x, y) \in G(P)$. Por consiguiente, el gráfico de P es cerrado, lo cual queríamos demostrar. $\square$

Observación 1.5.2.

1. Se mostrará en el párrafo siguiente (Teorema 1.6.4) que existen espacios de Banach con subespacios cerrados que no son sumandos directos.
2. Todo subespacio cerrado de un espacio de Banach E es sumando directo si y sólo si E es isomorfo a un espacio de Hilbert H (teorema de Lindenstrauss-Tzafriri [18]).

Ejercicios de la sección 1.5

1. Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado y $(T_i)_{i \in I}$ una familia en $L(E, F)$ tal que la familia $(T_i(x))_{i \in I}$ es acotada en F , para cada $x \in E$. Demostrar que la familia $(T_i)_{i \in I}$ es uniformemente acotada en $L(E, F)$ (esto es, que existe $\alpha > 0$ tal que $\|T_i\| \leq \alpha$, para todo $i \in I$).
2. Demostrar que toda sucesión débilmente convergente en un espacio normado E es acotada. Más precisamente, si (x_n) es una sucesión en un espacio normado E tal que $x_n \rightharpoonup x$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $\|x_n\| \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Sean E un espacio de Banach y (ϕ_n) una sucesión en E' tal que $\phi_n \xrightarrow{w*} 0$ (o sea, $\phi_n(x) \rightarrow 0$, para cada $x \in E$). Demostrar que (ϕ_n) converge a 0, uniformemente en los subconjuntos compactos de E .
4. Sea $(x'_{m,n})_{(m,n)}$ una sucesión doble de formas lineales continuas en un espacio de Banach E . Suponga que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $x_m \in E$ tal que la sucesión $(\langle x_m, x'_{m,n} \rangle)_n$ no es acotada en $\mathbb{K}$. Demostrar que existe $x \in E$ tal que la sucesión $(\langle x, x'_{m,n} \rangle)_n$ no es acotada en $\mathbb{K}$, para ningún $m \in \mathbb{N}$ (*Principio de condensación de las singularidades*).
5. Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado, (T_n) una sucesión en $L(E, F)$ y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n(x), y' \rangle = \langle T(x), y' \rangle$$

para cada $x \in E$ y cada $y' \in F'$. Demostrar que T es continuo.

6. Sea (α_n) una sucesión de números complejos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ es convergente, cualquiera que sea $(\xi_n) \in c_0$. Demostrar que $(\alpha_n) \in \ell^1$.

Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$, de la siguiente manera: $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \xi_k$, si $x = (\xi_n) \in c_0$.

7. a) Sean E un espacio de Banach y $B : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineal definida en $E \times E$. Suponga que para cada $x \in E$ existe $\mu(x) > 0$ tal que $|B(x, y)| \leq \mu(x) \|y\|$ para todo $y \in E$, y para cada $y \in E$ existe $\nu(y) > 0$ tal que $|B(x, y)| \leq \nu(y) \|x\|$ para todo $x \in E$. Demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que $|B(x, y)| \leq \alpha \|x\| \|y\|$, para todo $x \in E$ y todo $y \in E$. *Sugerencia:* Considerar las formas lineales $x \in E \mapsto B(x, y)$ cuando $y \in E$, $\|y\| \leq 1$.
- b) Sea (α_{ij}) una matriz cuadrada infinita tal que la serie doble $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$ converge, cualesquiera que sean los elementos (ξ_n) y (η_n) en ℓ^2 . Demostrar que existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j \right| \leq \alpha \|x\|_2 \|y\|_2$$

para todo $x = (\xi_n) \in \ell^2$ y todo $y = (\eta_n) \in \ell^2$ (teorema de Hellinger-Toeplitz).

Sugerencia: Primero demostrar, con el método del ejercicio 1,5,6, que si (ζ_i) es una sucesión de números complejos tal que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \zeta_i$ converge para todo $(\xi_i) \in \ell^2$, entonces $(\zeta_i) \in \ell^2$.

8. Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$B((x_1, x_2), y) = (x_1 y, x_2 y).$$

- a) Demostrar que B es una transformación bilineal continua sobreyectiva.
- b) Demostrar que B no es abierta en el punto $((1, 1), 0)$.
- c) Encontrar los puntos de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ en donde B es abierta.

9. Demostrar que no existe ninguna sucesión (c_n) de números complejos con las siguiente propiedad:

Una serie infinita de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y sólo si la sucesión $(c_n a_n)$ es acotada.

Sugerencia: Suponga que existe una tal sucesión (c_n) con $c_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerar la aplicación

$$x = (x_n) \in \ell^\infty \xrightarrow{T} T(x) = \left(\frac{x_n}{c_n} \right) \in \ell^1.$$

10. Sean E, F espacios de Banach, y, $T \in L(E, F)$ una aplicación lineal continua sobreyectiva. Demostrar que si (y_n) es una sucesión convergente en F , entonces existe una sucesión (x_n) convergente en E , tal que $T(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia: Suponga que $y_n \rightarrow y_0$ en F . Sea $x_0 \in E$ tal que $T(x_0) = y_0$. Aplicar el corolario 1,5,3 a la sucesión $(z_n) = (y_n - y_0)$.

11. Sean E, F, H espacios de Banach, $T \in L(E, H)$, $S \in L(F, H)$ y supongamos que para cada $x \in E$, la ecuación $T(x) = S(y)$ tiene una solución única $y(x) \in F$. Demostrar que la aplicación $x \in E \mapsto y(x) \in F$ así definida es un elemento de $L(E, F)$.

Sugerencia: Aplicar el teorema del gráfico cerrado.

12. Sean E un espacio de Banach y M, N subespacios cerrados de E tales que $E = M + N$. Demostrar que existe $k > 0$ tal que para todo $x \in E$ existen $z \in M$, $w \in N$ con $x = z + w$ y tales que $\|z\| + \|w\| \leq k\|x\|$.

Sugerencia: Considerar la aplicación

$$(z, w) \in M \times N \xrightarrow{T} T((z, w)) = z + w \in E.$$

13. Demostrar que en un espacio de Banach E todo subespacio lineal de dimensión finita tiene un complemento topológico.
14. Sean E, F espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) T es continuo.
- b) $T : E_\sigma \longrightarrow F_\sigma$ es continuo.
- c) $T : E \longrightarrow F_\sigma$ es continuo.

(Si E es un espacio normado, entonces E_σ denota el espacio E dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$).

15. a) Demostrar que en un espacio de Banach E todo subespacio cerrado M de codimensión finita (esto es, tal que $\dim(E/M) < \infty$) tiene un complemento topológico.
- b) Sean E, F espacios de Banach, y $T \in L(E, F)$. Demostrar que $T : E_\sigma \longrightarrow F$ es continuo si y sólo si $\dim(T(E)) < \infty$.
- Sugerencia:* Si $T : E_\sigma \longrightarrow F$ es continuo, entonces existen elementos $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ en E tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; |\langle x, x'_i \rangle| \leq 1\} \implies \|T(x)\| < 1.$$

Sea $M = \bigcap_{i=1}^n \{x \in E; \langle x, x'_i \rangle = 0\}$; demostrar que $\dim(E/M) < \infty$. Usar la parte a). Para la recíproca, si $\dim(T(E)) < \infty$, entonces $T(E)_\sigma = T(E)$. Aplicar el ejercicio anterior.

16. a) Si P es una proyección continua no nula en un espacio de Banach E , demostrar que $\|P\| \geq 1$.
- b) Sean P, Q proyecciones continuas en un espacio de Banach E tales que $PQ = QP$ y $P \neq Q$. Demostrar que $\|P - Q\| \geq 1$.

1.6. Aplicaciones y ejemplos

1.6.1. Funciones holomorfas

Definición 1.6.1. Sean E un espacio de Banach complejo, Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \longrightarrow E$ una aplicación.

1. Se dice que f es *débilmente holomorfa* en Ω si la función

$$z \in \Omega \longmapsto \langle f(z), x' \rangle \in \mathbb{C}$$

es holomorfa en Ω , para todo $x' \in E'$.

2. Se dice que f es *fuertemente holomorfa* en Ω si el límite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe en E , para todo $z_0 \in \Omega$. En este caso, dicho límite se denota por $f'(z_0)$.

Es claro que toda función fuertemente holomorfa es débilmente holomorfa. La recíproca también es verdadera, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.6.1. *Sean E un espacio de Banach complejo y Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Entonces, toda función débilmente holomorfa $f : \Omega \rightarrow E$ es fuertemente holomorfa.*

Demostración. Sean $z_0 \in \Omega$ y $x_n = \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \in E$, $n \in \mathbb{N}$, en donde (z_n) es una sucesión en Ω tal que $z_n \neq z_0$, $n \in \mathbb{N}$, $z_n \rightarrow z_0$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{x}_n \in \tilde{E} \subset E''$ es la imagen de x_n por el isomorfismo isométrico canónico del espacio E sobre el subespacio (cerrado) $\tilde{E}$ de E'' (proposición 1,3,6), entonces se tiene que para $x' \in E'$,

$$\langle x', \tilde{x}_n \rangle = \langle x_n, x' \rangle = \frac{\langle f(z_n), x' \rangle - \langle f(z_0), x' \rangle}{z_n - z_0} \quad (1)$$

Ahora bien, por hipótesis, el límite del último término de esta igualdad (1) existe y es igual a la derivada (compleja) en el punto z_0 de la función $z \in \Omega \mapsto \langle f(z), x' \rangle \in \mathbb{C}$. Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x', \tilde{x}_n \rangle = \frac{d}{dz} [\langle f(z), x' \rangle]_{z=z_0} \quad (2)$$

para cada $x' \in E'$. Por lo tanto, el teorema de Banach-Steinhaus implica que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|x_n\| = \|\tilde{x}_n\| \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego la función

$$x' \in E' \mapsto x''(x') = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x', \tilde{x}_n \rangle \in \mathbb{C} \quad (3)$$

es una forma lineal continua sobre E' . Además, tenemos que

$$\|f(z_n) - f(z_0)\| = \|(z_n - z_0)x_n\| = \|\tilde{x}_n\| |z_n - z_0| \leq \alpha |z_n - z_0|$$

de donde $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por consiguiente, f es continua en z_0 . Se sigue que toda función débilmente holomorfa es continua.

Sean $\rho > 0$ tal que $D = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq \rho\} \subset \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $|z_n - z_0| < \frac{\rho}{2}$. Usando la fórmula integral de Cauchy y

teniendo en cuenta (2) y (3), se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\langle f(z_n), x' \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z_n} d\xi \\ \langle f(z_0), x' \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z_0} d\xi \\ \langle x', x'' \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{(\xi - z_0)^2} d\xi\end{aligned}$$

para $x' \in E'$, luego, por (1), se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x', \tilde{x}_n - x'' \rangle &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left[\frac{1}{z_n - z_0} \left\{ \frac{1}{\xi - z_n} - \frac{1}{\xi - z_0} \right\} - \frac{1}{(\xi - z_0)^2} \right] \langle f(\xi), x' \rangle d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{(z_n - z_0)}{(\xi - z_n)(\xi - z_0)^2} \langle f(\xi), x' \rangle d\xi\end{aligned}$$

para cada $x' \in E'$. Por lo tanto, puesto que

$$|\xi - z_n| \geq |\xi - z_0| - |z_n - z_0| > \rho - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2}$$

se sigue que

$$|\langle x', \tilde{x}_n - x'' \rangle| \leq \frac{a}{2\rho^2} |z_n - z_0| \|x'\|$$

para todo $x' \in E'$, en donde $a = \sup \{\|f(\xi)\|; \xi \in \partial D\}$. Por consiguiente,

$$\|\tilde{x}_n - x''\| \leq \frac{a}{2\rho^2} |z_n - z_0|$$

luego la sucesión $(\tilde{x}_n) \subset \tilde{E}$ converge a x'' en el espacio E'' , y siendo $\tilde{E}$ cerrado, entonces $x'' \in \tilde{E}$, esto es, existe $x \in E$ tal que $x'' = x$. Por lo tanto, se tiene que

$$\|x_n - x\| = \|\tilde{x}_n - \tilde{x}\| = \|\tilde{x}_n - x''\|$$

de donde $x_n \rightarrow x$ en E , esto es, f es fuertemente holomorfa.

1.6.2. Series de Fourier

Sea $E = C_p[0, 2\pi]$ el espacio de todas las funciones reales continuas $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(0) = f(2\pi)$, dotado de la norma del supremo: $\|f\| = \sup |f(t)|; t \in [0, 2\pi]$. Cualquier función $f \in E$ se puede extender

periódicamente, con un período 2π , a todo $\mathbb{R}$. Por consiguiente, E es el espacio de las funciones reales continuas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de período 2π .

Para $f \in E$, los números

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k \geq 1 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt, \quad k \geq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

se llaman los *coeficientes de Fourier* de la función $f \in E$. La serie

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

se llama *serie de Fourier* asociada a f ; usaremos la notación:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En lo que sigue mostraremos que para todo $x \in [0, 2\pi]$ existe una función real, continua, periódica, de período 2π , $f \in E$ tal que su serie de Fourier diverge en el punto x . En efecto:

1. Si

$$S_n(f; x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \quad (5)$$

es la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier de $f \in E$ en el punto x , entonces

$$S_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt \quad (6)$$

en donde

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(2n+1)t \right]}{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} \quad (\text{núcleo de Dirichlet}) \quad (6')$$

En efecto, substituyendo (4) en (5), resulta que

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-u) \right\} du \quad (7)$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-u) = \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(2n+1)(x-u) \right]}{2 \sin \frac{1}{2}(x-u)} \quad (8)$$

pues

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} - 1 = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{2e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{2 \left[e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right]} = \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - \cos \frac{\theta}{2}}{2i \sin \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

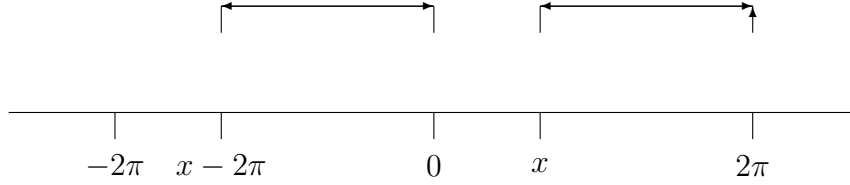
e igualando las partes reales de esta igualdad, con $\theta = x - u$, se obtiene la igualdad (8).

Substituyendo (8) en (7) y haciendo el cambio de variable $t = x - u$, se tiene que

$$S_n(f; x) = -\frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-t) D_n(t) dt \quad (9)$$

en donde $D_n(t)$ es el núcleo de Dirichlet (6'). Entonces,

$$\begin{aligned} S_n(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \left[-\int_x^0 f(x-t) D_n(t) dt - \int_0^{x-2\pi} f(x-t) D_n(t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^x f(x-t) D_n(t) dt + \int_{x-2\pi}^0 f(x-t) D_n(t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^x f(x-t) D_n(t) dt + \int_x^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt \end{aligned}$$



siendo la penúltima igualdad consecuencia del hecho de que tanto f como D_n son funciones periódicas, de período 2π . Tenemos entonces la igualdad (6). (Ver la figura).

2. La forma lineal en E

$$u_n : f \in E \mapsto S_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

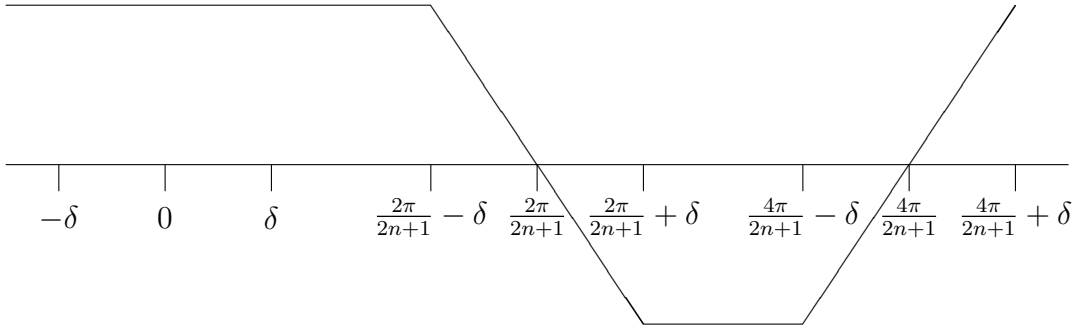
$n \in \mathbb{N}$, es continua y

$$\|u_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt = \ell_n. \quad (10)$$

(El número ℓ_n se llama la n -ésima constante de Lebesgue).

En efecto, es inmediato, que si $|f(x)| \leq 1$, para todo $x \in [0, 2\pi]$ (esto es, si $\|f\| \leq 1$), entonces, $|u_n(f)| \leq \ell_n$, luego $\|u_n\| \leq \ell_n$, $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, para demostrar (10), es suficiente mostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $g_\epsilon \in E$ tal que $\|g_\epsilon\| \leq 1$ y $|u_n(g_\epsilon)| > \ell_n - \epsilon$. Ahora bien, los puntos en donde $D_n(t) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$), son de la forma $t = \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Para $0 < \delta < \frac{\pi}{2n+1}$ se define la función $f_\delta \in E$ de la siguiente manera:

$$f_\delta(y) = \begin{cases} \operatorname{sgn} D_n(x-y), & \text{si } \frac{2k\pi}{2n+1} + \delta \leq x-y \leq \frac{2(k+1)\pi}{2n+1} - \delta \\ \text{lineal,} & \text{si } \frac{2k\pi}{2n+1} - \delta \leq x-y \leq \frac{2k\pi}{2n+1} + \delta \end{cases}$$



en donde $\text{sgn}\xi = \frac{\xi}{|\xi|}$, si $\xi \neq 0$. Es claro que $\|f_\delta\| = 1$. Además,

$$\begin{aligned} u_n(f_\delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\delta(x-t) D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{2k\pi}{2n+1} + \delta}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1} - \delta} f_\delta(x-t) D_n(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{2k\pi}{2n+1} - \delta}^{\frac{2k\pi}{2n+1} + \delta} f_\delta(x-t) D_n(t) dt, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$|u_n(f_\delta)| \geq \ell_n - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{2k\pi}{2n+1} - \delta}^{\frac{2k\pi}{2n+1} + \delta} |D_n(t)| dt \geq \ell_n - \frac{2\delta}{\pi} (2n+1)^2$$

en donde la última desigualdad se sigue por el hecho de que $|D_n(t)| = |1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt| \leq 2n+1$. Tenemos que dado $\epsilon > 0$, se puede encontrar $g_\epsilon \in E$ con $\|g_\epsilon\| = 1$ y tal que $|u_n(g_\epsilon)| > \ell_n - \epsilon$. Por consiguiente, $\|u_n\| = \ell_n$.

3. Demostremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \infty$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\ell_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{1}{2}(2n+1)t}{\sin \frac{1}{2}t} \right| dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt \geq \quad (\sin t \leq t, \text{ si } 0 \leq t \leq \pi) \\
&\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin(2n+1)t}{t} \right| dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{t} \right| dt \geq \\
&\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2n+1}{(k+1)\pi} \int_{\frac{k\pi}{2n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{2n+1}} |\sin(2n+1)t| dt = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \\
&= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \infty$.

4. Así, (u_n) es una sucesión de formas lineales continuas en E tal que $\sup_n \|u_n\| = \infty$. Por consiguiente, por el teorema de Banach-Steinhaus, existe $f \in E$ tal que la sucesión $(u_n(f))$ no es acotada, esto es, la serie de Fourier de f en el punto x es divergente.

Observación 1.6.1. Usando el teorema de Banach-Steinhaus, se puede demostrar aún más (Ejercicio 1,6,1): dado un conjunto enumerable $A \subset [0, 2\pi]$, existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en todos los puntos de A . De hecho, hay funciones continuas cuyas series de Fourier divergen en conjuntos no enumerables, de segunda categoría y densos en $[0, 2\pi]$. Por otra parte, Carleson [3] demostró que para toda función $f \in C_p[0, 2\pi]$, el conjunto de los puntos de $[0, 2\pi]$ en donde la serie de Fourier de f no converge, tiene medida (de Lebesgue) nula.

1.6.3. Subespacios cerrados de ℓ^1 que no admiten complemento topológico

Teorema 1.6.2 (Banach). *En el espacio ℓ^1 toda sucesión débilmente convergente es fuertemente convergente. Más precisamente, para toda sucesión $(x^{(m)})$ en ℓ^1 , y todo $x \in \ell^1$*

$$x^{(m)} \rightharpoonup x \implies \|x^{(m)} - x\| \rightarrow 0.$$

Demostración. Es suficiente demostrar que $x^{(m)} \rightharpoonup 0$ implica $x^{(m)} \rightarrow 0$.

Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una sucesión $(x^{(m)})$ en ℓ^1 tal que

$$x^{(m)} \rightharpoonup 0, \text{ y } \|x^{(m)}\| \not\rightarrow 0.$$

Entonces, existen $\epsilon > 0$ y una subsucesión $(x^{(m_k)})$ de $(x^{(m)})$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m_k)}| = \|x^{(m_k)}\|_1 \geq \epsilon, \quad (11)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Vamos a demostrar que existe una sucesión $v = (v_n) \in \ell^\infty = (\ell^1)'$, tal que

$$\langle x^{(m_k)}, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n^{(m_k)} \not\rightarrow 0, \quad (k \rightarrow \infty)$$

lo que nos dará una contradicción. En efecto,

1. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty} |x_n^{(m_1)}| < \frac{\epsilon}{5} \quad (12)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (11), se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{n_1} |x_n^{(m_1)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m_1)}| - \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |x_n^{(m_1)}| > \frac{4}{5}\epsilon. \quad (13)$$

Escogemos ahora números complejos $v_1, v_2, \dots, v_{n_1}$ tales que

$$|v_n| = 1, \text{ y } v_n x_n^{(m_1)} = |x_n^{(m_1)}| \quad (14)$$

para $n = 1, 2, \dots, n_1$. Cualesquiera que sean los valores de $v_n \in \mathbb{C}$ con $|v_n| = 1$, $n > n_1$, y teniendo en cuenta (12), (13), (14), resulta que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n^{(m_1)} \right| &\geq \left| \sum_{n=1}^{n_1} v_n x_n^{(m_1)} \right| - \left| \sum_{n=n_1+1}^{\infty} v_n x_n^{(m_1)} \right| \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{n_1} |x_n^{(m_1)}| - \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |x_n^{(m_1)}| > \\ &> \frac{3}{5}\epsilon. \end{aligned}$$

2. Como $x^{(m)} \longrightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), entonces

$$x_n^{(m_k)} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (15)$$

para $n = 1, 2, \dots$, luego existe $m_{k_2} > m_1$ tal que

$$\sum_{n=1}^{n_1} |x_n^{(m_{k_2})}| < \frac{\epsilon}{5} \quad (16)$$

Sea $n_2 > n_1$ tal que

$$\sum_{n=n_2+1}^{\infty} |x_n^{(m_{k_2})}| < \frac{\epsilon}{5}. \quad (17)$$

Análogamente, como en (13), se sigue que

$$\sum_{n=1}^{n_2} |x_n^{(m_{k_2})}| > \frac{4}{5}\epsilon \quad (18)$$

de donde, por (16), se obtiene que

$$\sum_{n=n_1+1}^{n_2} |x_n^{(m_{k_2})}| = \sum_{n=1}^{n_2} |x_n^{(m_{k_2})}| - \sum_{n=1}^{n_1} |x_n^{(m_{k_2})}| > \frac{3}{5}\epsilon. \quad (19)$$

Escogemos números complejos $v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \dots, v_{n_2}$ tales que

$$|v_n| = 1, \text{ y } v_n x_n^{(m_{k_2})} = |x_n^{(m_{k_2})}| \quad (20)$$

para $n = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2$. Cualesquiera que sean los valores $v_n \in \mathbb{C}$ con $|v_n| = 1$, $n > n_2$, y teniendo en cuenta (17), (18), (19) y (20), se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n^{(m_{k_2})} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{n_1} v_n x_n^{(m_{k_2})} + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} v_n x_n^{(m_{k_2})} + \sum_{n=n_2+1}^{\infty} v_n x_n^{(m_{k_2})} \right| \geq \\ &\geq \left| \sum_{n=n_1+1}^{n_2} v_n x_n^{(m_{k_2})} \right| - \left| \sum_{n=1}^{n_1} v_n x_n^{(m_{k_2})} \right| - \left| \sum_{n=n_2+1}^{\infty} v_n x_n^{(m_{k_2})} \right| \geq \\ &\geq \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \left| x_n^{(m_{k_2})} \right| - \sum_{n=1}^{n_1} \left| x_n^{(m_{k_2})} \right| - \sum_{n=n_2+1}^{\infty} \left| x_n^{(m_{k_2})} \right| > \frac{\epsilon}{5}. \end{aligned}$$

3. Efectuamos el paso siguiente en la construcción de la sucesión $(v_n) \in \ell^\infty$.

Por (15), existe $m_{k_3} > m_{k_2}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{n_2} \left| x_n^{(m_{k_3})} \right| < \frac{\epsilon}{5} \quad (21)$$

Sea $n_3 > n_2$ tal que

$$\sum_{n=n_3+1}^{\infty} \left| x_n^{(m_{k_3})} \right| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Análogamente como en (13) o (18), se tiene que

$$\sum_{n=1}^{n_3} \left| x_n^{(m_{k_3})} \right| > \frac{4}{5}\epsilon$$

de donde, por (21), resulta que

$$\sum_{n=n_2+1}^{n_3} \left| x_n^{(m_{k_3})} \right| > \frac{3}{5}\epsilon. \quad (22)$$

Escogemos números complejos $v_{n_2+1}, v_{n_2+2}, \dots, v_{n_3}$ tales que

$$|v_n| = 1, \text{ y } v_n x_n^{(m_{k_3})} = \left| x_n^{(m_{k_3})} \right| \quad (23)$$

para $n = n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, n_3$. Cualesquiera que sean los valores de v_n con $|v_n| = 1$, $n > n_3$, y teniendo en cuenta (21), (22) y (23), se sigue que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n^{(m_{k_3})} \right| = \left| \sum_{n=1}^{n_2} v_n x_n^{(m_{k_3})} + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} v_n x_n^{(m_{k_3})} + \sum_{n=n_3+1}^{\infty} v_n x_n^{(m_{k_3})} \right| > \frac{\epsilon}{5}.$$

4. Continuando este proceso, se construyen una sucesión $v = (v_n) \in \ell^\infty$ y una subsucesión $(x^{(m_{k_i})})$ de $(x^{(m_k)})$ tales que

$$|\langle x^{(m_{k_i})}, v \rangle| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n^{(m_{k_i})} \right| > \frac{\epsilon}{5} \text{ para todo } i.$$

Por consiguiente, $x^{(m_{k_i})} \not\rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$), de donde $x^{(m_k)} \not\rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), lo cual queríamos demostrar. $\square$

Corolario 1.6.1. *En ℓ^1 toda sucesión de Cauchy en el sentido débil lo es también en el sentido de la norma.*

Demostración. Sea $(x^{(m)})$ una sucesión en ℓ^1 que es de Cauchy en el sentido débil, pero no en el de la norma. Entonces existen $\epsilon > 0$ y sucesiones $(n_k), (m_k)$ tales que

$$\|x^{(n_k)} - x^{(m_k)}\|_1 \geq \epsilon$$

para $k = 1, 2, \dots$, de donde, procediendo como en el teorema, se tiene que

$$x^{(n_k)} - x^{(m_k)} \not\rightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$$

Por otra parte, como la sucesión $(x^{(m)})$ es de Cauchy en el sentido débil, entonces $x^{(n_k)} - x^{(m_k)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), lo que es una contradicción. $\square$

Corolario 1.6.2. *El espacio ℓ^1 es débilmente secuencialmente completo, esto es, toda sucesión de Cauchy en el sentido débil en ℓ^1 , es débilmente convergente.*

Corolario 1.6.3. *Si $1 < p < \infty$, entonces ℓ^p no puede ser isomorfo a ningún subespacio cerrado de ℓ^1 .*

Teorema 1.6.3. *Todo espacio de Banach separable E es isomorfo a un espacio cociente de ℓ^1 .*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión densa en la bola unitaria de E . La aplicación

$$\zeta = (\lambda_n) \in \ell^1 \xrightarrow{T} T(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in E$$

es lineal y continua, pues $\|T(\zeta)\| \leq \|\zeta\|_1$, para todo $\zeta \in \ell^1$. Además, T es sobreyectiva. En efecto, sea $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$. Demostremos, por inducción, que existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i-1}} x_{n_i} \right\| \leq \frac{1}{2^k} \quad (24)$$

para $k = 1, 2, \dots$. Para $k = 1$: Como $\|x\| \leq 1$, entonces existe x_{n_1} tal que $\|x - x_{n_1}\| < \frac{1}{2}$, luego (24) es válida para $k = 1$. Supongamos, por inducción, que la desigualdad (24) es válida para $k \in \mathbb{N}$. Entonces, multiplicando ambos lados de esta desigualdad por 2^k , resulta que

$$\left\| 2^k x - 2^k \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i-1}} x_{n_i} \right\| < 1$$

luego existe $x_{n_{k+1}}$, $n_{k+1} > n_k$, tal que

$$\left\| 2^k x - 2^k \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i-1}} x_{n_i} - x_{n_{k+1}} \right\| < \frac{1}{2}$$

esto es,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^{i-1}} x_{n_i} \right\| < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Ahora bien, (24) implica que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} x_{n_i}$$

y por consiguiente, $x = T(\zeta)$, en donde $\zeta \in \ell^1$. Se sigue que $T(\ell^1)$ contiene la bola unitaria de E , luego T es sobreyectiva.

Por consiguiente, por el Teorema de la Aplicación Abierta, $T : \ell^1 \longrightarrow E$ es un homomorfismo topológico sobre E , luego si $H = N(T)$ ($= T^{-1}(0)$), entonces E es isomorfo al cociente ℓ^1/H (proposición 1,2,6,2). $\square$

Teorema 1.6.4. *Existen subespacios cerrados de ℓ^1 sin complemento topológico.*

Demostración. Sea E un espacio de Banach separable que no es isomorfo a ningún subespacio de ℓ^1 (corolario 1,6,3 del teorema 1,6,2).

Por el teorema 1,6,3, existe un subespacio cerrado H de ℓ^1 tal que E es isomorfo a ℓ^1/H : $E \simeq \ell^1/H$. Este subespacio cerrado H de ℓ^1 no posee complemento topológico en ℓ^1 . En efecto, si existiera un subespacio cerrado M de ℓ^1 , con $\ell^1 = M \oplus H$, entonces, $\ell^1/H \simeq M$, de donde $E \simeq M$, lo que sería una contradicción. $\square$

Ejercicios de la sección 1.6

1. Sea (x_n) una sucesión de puntos del intervalo cerrado $[0, 2\pi]$. Demostrar que existe una función continua periódica, de período 2π , $f \in C_p[0, 2\pi]$ tal que su serie de Fourier diverge en todos los puntos x_n , $n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia: Usar el ejercicio 1,5,4.

1.7. Operadores adjuntos

Teorema 1.7.1. *(y Definición). Sean E, F espacios de Banach y $T \in L(E, F)$ un operador lineal continuo de E en F . Entonces, existe un único operador lineal continuo $T' \in L(F', E')$ tal que*

$$\langle x, T'(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle$$

para todo $x \in E$ y todo $y' \in F'$. Además, la aplicación

$$T \in L(E, F) \xrightarrow{\phi} \phi(T) = T' \in L(F', E')$$

es un isomorfismo isométrico sobre su imagen.

El operador T' se llama operador adjunto de T .

Demostración. Se define el operador lineal $y' \in F' \xrightarrow{T'} T'(y') \in E'$, por la formula:

$$\langle x, T'(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle, \quad x \in E.$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. El operador T' está bien definido, esto es, $T'(y') \in E'$, si $y' \in F'$. En efecto, si $y' \in F'$, entonces

$$|\langle x, T'(y') \rangle| = |\langle T(x), y' \rangle| \leq (\|T\| \|y'\|) \|x\|$$

para todo $x \in E$, de donde $T'(y') \in E'$.

Además, se tiene que $\|T'(y')\| \leq \|T\| \|y'\|$, para todo $y' \in F'$, luego $T' \in L(F', E')$.

2. Demostremos la unicidad del operador T' . Sea $S \in L(F', E')$ otro operador con la propiedad de que

$$\langle x, S(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle$$

para todo $x \in E$ y todo $y' \in F'$. Entonces,

$$\langle x, S(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle = \langle x, T'(y') \rangle$$

para todo $x \in E$ y todo $y' \in F'$, luego $S(y') = T'(y')$, para todo $y' \in F'$, esto es, $S = T'$.

3. La aplicación

$$T \in L(E, F) \mapsto \phi(T) = T' \in L(F', E')$$

es lineal. Además, por 1) se tiene que $\|\phi(T)\| \leq \|T\|$, de donde ϕ es continua.

Demostremos que ϕ es una isometría sobre la imagen. En efecto,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y'\| \leq 1} |\langle T(x), y' \rangle| = \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y'\| \leq 1} |\langle x, T'(y') \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\|y'\| \leq 1} \|T'(y')\| = \|T'\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\phi(T)\| = \|T\|$, para todo $T \in L(E, F)$. Esto completa la demostración del teorema. $\square$

Ejemplo 1.7.1. En general la aplicación

$$T \in L(E, F) \xrightarrow{\phi} \phi(T) = T' \in L(F', E')$$

no es sobreyectiva. En efecto, sean $E = F = c_0$; entonces $E' = F' = \ell^1$. El operador,

$$y = (y_n) \in \ell^1 \xrightarrow{S} S(y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n, y_2, y_3, \dots \right) \in \ell^1$$

es lineal y continuo, esto es, $S \in L(\ell^1)$, pues

$$\|S(y)\|_1 = \left| \sum_{n=1}^{\infty} y_n \right| + \sum_{n=2}^{\infty} |y_n| \leq 2\|y\|_1$$

para todo $y = (y_n) \in \ell^1$. Sin embargo, no existe ningún $T \in L(c_0)$ tal que $T' = S$. En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que existiera $T \in L(c_0)$ con $T' = S$. Sea $x = (x_n) \in c_0$ tal que $x_1 \neq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle T(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle &= x_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n \right) + x_2 y_2 + \dots = \\ &= x_1 y_1 + (x_1 + x_2) y_2 + \dots + (x_1 + x_n) y_n + \dots \end{aligned}$$

para todo $y = (y_n) \in \ell^1$, luego

$$T(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_3, \dots, x_1 + x_n, \dots)$$

de donde, como $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_n) = x_1 \neq 0$, tendríamos $T(x) \notin c_0$, lo que es una contradicción.

Proposición 1.7.1. Sean E, F espacios de Banach y $T \in L(E, F)$. El segundo adjunto $T'' \in L(E'', F'')$ de T es una extensión de T . Si E es reflexivo, entonces $T'' = T$.

Demostración. Sea $\phi : E \longrightarrow E''$, $\phi(x) = \tilde{x}$, la aplicación canónica de E en su bidual E'' .

El segundo adjunto de T es el operador

$$x'' \in E'' \xrightarrow{T''} T''(x'') \in F''$$

en donde $\langle y', T''(x'') \rangle = \langle T'(y'), x'' \rangle$, para todo $y' \in F'$. Para cada $x \in E$, se tiene que

$$\langle y', T''(\tilde{x}) \rangle = \langle T'(y'), \tilde{x} \rangle = \langle x, T'(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle = \langle y', \widetilde{Tx} \rangle$$

para todo $y' \in F'$. Por consiguiente, $T''(\tilde{x}) = \widetilde{T(x)}$, para todo $x \in E$. Si identificamos E con $\tilde{E}$ y F con $\tilde{F}$, entonces resulta que $T''(x) = T(x)$, para todo $x \in E$, esto es, $T'' \supset T$.

Consecuentemente, si E es reflexivo, entonces $T'' = T$. $\square$

Lema 1.7.1. Sean E, F, G espacios de Banach, $T \in L(E, F)$, y $S \in L(F, G)$. Entonces se tiene: $(S \circ T)' = T' \circ S'$.

Demostración. Una simple verificación. $\square$

Proposición 1.7.2. Sean E, F espacios de Banach. Entonces, un operador $T \in L(E, F)$ es invertible si y sólo si su adjunto $T' \in L(F', E')$ es invertible. En este caso, se tiene

$$(T^{-1})' = (T')^{-1}.$$

Demostración. Supongamos que T es invertible. Entonces, existe el operador inverso $T^{-1} \in L(F, E)$ de T , y, $T^{-1} \circ T = I_E$ (aplicación idéntica de E), $T \circ T^{-1} = I_F$; tomando adjuntos, obtenemos: $T' \circ (T^{-1})' = I_{E'}$, $(T^{-1})' \circ T' = I_{F'}$. Por lo tanto, T' es invertible, y, $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.

Recíprocamente, si T' es invertible, entonces también lo es T'' , esto es, $T'' : E'' \longrightarrow F''$ es un isomorfismo.

Sean $\phi : E \longrightarrow E''$ y $\psi : F \longrightarrow F''$ las aplicaciones canónicas de E y F en sus respectivos biduals E'' y F'' . Por la demostración de la proposición 1,7,1., vale la siguiente igualdad:

$$T''(\phi(E)) = \psi(T(E)),$$

y como $\phi(E)$ es un subespacio cerrado de E'' , entonces se sigue que $\psi(T(E))$ es un subespacio cerrado de F'' , luego $T(E)$ es un subespacio cerrado de F . Demostremos que $T(E) = F$. Supongamos que $T(E) \neq F$. Entonces, como $T(E)$ es cerrado, existe $y' \in F'$, $y' \neq 0$, tal que $\langle T(E), y' \rangle = \{0\}$ (teorema de Hahn-Banach). Por consiguiente,

$$\langle x, T'(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle = 0,$$

para todo $x \in E$, luego $T'(y') = 0$, de donde $y' = 0$ (pues T' es inyectivo), lo que es una contradicción. Por lo tanto, $T(E) = F$, esto es, T es sobreyectivo.

Además, como $T'' \circ \phi$ es inyectivo, también lo es $\psi \circ T$, luego T es inyectivo. Se sigue que T es un isomorfismo. $\square$

Proposición 1.7.3. Sean E, F espacios de Banach y $T \in L(E, F)$. Entonces, se tienen las siguientes propiedades:

1. $N(T) = {}^\perp R(T')$
2. $N(T') = R(T)^\perp$
3. $\overline{R(T)} = {}^\perp N(T')$
4. $\overline{R(T')} \subset N(T)^\perp$

Demostración. Las propiedades 1) y 2) son de inmediata verificación.

3) Por la proposición 1,3,4,2, se tiene que

$${}^\perp(R(T)^\perp) = \overline{[R(T)]} = \overline{R(T)},$$

de donde, por 2), resulta que $\overline{R(T)} = {}^\perp N(T')$.

4) Sea $x' \in R(T') \subset E'$. Entonces, existe $y' \in F'$ tal que $x' = T'(y')$. Por consiguiente,

$$\langle x, x' \rangle = \langle x, T'(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle = 0$$

para todo $x \in N(T)$, luego $x' \in N(T)^\perp$. Se sigue que $R(T') \subset N(T)^\perp$. $\square$

Corolario 1.7.1. Sean E, F espacios de Banach, y, $T \in L(E, F)$. Entonces:

1. El operador adjunto T' de T es inyectivo si y sólo si $R(T)$ es denso en F .
2. El operador T es inyectivo si sólo si $R(T')$ separa los puntos de E .

Demostración. La parte 1) del corolario es una consecuencia inmediata de la parte 2) de la proposición.

Demostremos la parte 2). Supongamos que T es inyectivo. Si x, y son dos elementos de E con $x \neq y$, entonces $T(x - y) \neq 0$, esto es, $x - y \notin N(T) = {}^\perp R(T')$, luego existe $x' \in R(T')$ tal que $\langle x - y, x' \rangle \neq 0$, esto es, $\langle x, x' \rangle \neq \langle y, x' \rangle$. Por lo tanto, $R(T')$ separa los puntos de E .

Recíprocamente, supongamos que $R(T')$ separa los puntos de E , y sea $x \in E$, $x \neq 0$. Entonces, por hipótesis, existe $x' \in R(T')$ tal que $\langle x, x' \rangle \neq 0$. Si $x' = T'(y')$ con $y' \in F'$, entonces

$$\langle T(x), y' \rangle = \langle x, T'(y') \rangle = \langle x, x' \rangle \neq 0,$$

de donde $T(x) \neq 0$. Por consiguiente, T es inyectivo. $\square$

Ejemplo 1.7.2. En general, $\overline{R(T')} \neq N(T)^\perp$. En efecto, sean $E = \ell^1$, $F = c_0$, y, $T : \ell^1 \longrightarrow c_0$ la inclusión: $T(x) = x$, $x \in \ell^1$. Entonces, se tiene que

$$N(T)^\perp = \ell^\infty.$$

Por otra parte, $T' : \ell^1 \longrightarrow \ell^\infty$ es la inclusión, $T'(x) = x$, $x \in \ell^1$. Por consiguiente, $R(T') = \ell^1$. Demostremos que $\overline{\ell^1} \neq \ell^\infty$ (la adherencia siendo tomada en la topología de ℓ^∞), luego $\overline{R(T')} \neq N(T)^\perp$. Si $x^0 = (1, 1, \dots, 1 \dots) \in \ell^\infty$, entonces para todo $y = (y_n) \in \ell^1$,

$$\|y - x^0\|_\infty = \sup_n |y_n - 1| \geq |y_k - 1|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, haciendo $k \rightarrow \infty$, se obtiene que $\|y - x^0\|_\infty \geq 1$, para todo $y \in \ell^1$, luego $x^0 \notin \overline{\ell^1}$. Sin embargo se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.7.4. Sean E, F espacios de Banach y $T \in L(E, F)$. Si $R(T)$ es cerrado, entonces $R(T')$ también es cerrado y vale que

$$R(T') = N(T)^\perp.$$

Demostración. Por la parte 4) de la proposición 1,7,3, se tiene que $R(T') \subset N(T)^\perp$.

Demostremos que $N(T)^\perp \subset R(T')$, de donde saldrá entonces la proposición. En efecto, sea $x' \in N(T)^\perp \subset E'$. Se define $y'_0 : R(T) \subset F \longrightarrow \mathbb{K}$ por la fórmula

$$y'_0(y) = \langle x, x' \rangle$$

si $y = T(x)$, $x \in E$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. y'_0 está bien definida. En efecto $T(x_1) = T(x_2)$ equivale a decir que $(x_1 - x_2) \in N(T)$, y en este caso $\langle x_1, x' \rangle = \langle x_2, x' \rangle$.

2. Obviamente, y'_0 es lineal. Además, y'_0 es continua. En efecto, como $R(T)$ es cerrado, entonces existe $\alpha > 0$ tal que a todo $y \in R(T)$ corresponde un $x \in E$, con $y = T(x)$, tal que

$$\|x\| \leq \alpha \|y\|$$

(corolario 1,5,2 del teorema 1,5,2), y por lo tanto se tiene que

$$|y'_0(y)| = |\langle x, x' \rangle| \leq \alpha \|x'\| \|y\|,$$

de donde y'_0 es continua en $R(T) \subset F$ (y, $\|y'_0\| \leq \alpha \|x'\|$), luego, por el teorema de Hahn-Banach, existe $y' \in F'$ tal que $y' \supset y'_0$. Ahora bien,

$$\langle x, T'(y') \rangle = \langle T(x), y' \rangle = \langle T(x), y'_0 \rangle = \langle x, x' \rangle,$$

para todo $x \in E$, luego $x' = T'(y') \in R(T')$, lo que queríamos demostrar. $\square$

En [5], teorema 4, §6, Cap. VI, se muestra que si $R(T')$ es cerrado, entonces también lo es $R(T)$.

Definición 1.7.2. Sean E, F espacios de Banach, (T_n) una sucesión en $L(E, F)$, y, $T \in L(E, F)$.

1. Se dice que la sucesión (T_n) converge *débilmente* (en el sentido de operadores) a T , lo cual se denota por $T_n \longrightarrow T$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n(x), y' \rangle = \langle T(x), y' \rangle,$$

para todo $x \in E$ y todo $y' \in F'$.

2. Se dice que la sucesión (T_n) converge *fuertemente*⁶ (en el sentido de operadores) a T , lo cual se denota por $T_n \longrightarrow T$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0,$$

para todo $x \in E$.

⁶o también, puntualmente

3. Se dice que la sucesión (T_n) converge *uniformemente* a T , lo cual se denota por $T_n \Rightarrow T$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$$

Es fácil ver que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte, y que esta última implica la convergencia débil.

Sin embargo, las implicaciones recíprocas, en general, no valen, como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.7.3.

1. La convergencia fuerte de operadores no implica la convergencia uniforme. En efecto, sean $E = F = \ell^2$,

$$T_n : x = (x_k) \in \ell^2 \mapsto T_n(x) = x_n e_n \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

y $T \equiv 0$ el operador idénticamente nulo. Entonces, $\|T_n(x)\|_2 \rightarrow 0$, para todo $x \in \ell^2$, esto es, $T_n \rightarrow 0$.

Por otra parte, $\|T_n\| = 1 \not\rightarrow 0$, esto es $T_n \not\Rightarrow 0$.

2. La convergencia débil (en el sentido de operadores) no implica la convergencia fuerte. En efecto, sean $E = F = \ell^2$,

$$T_n : x = (x_k) \in \ell^2 \mapsto T_n(x) = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{0}, x_1, x_2, \dots) \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

y $T \equiv 0$ el operador idénticamente nulo. Entonces,

$$\langle T_n(x), y' \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{n+k},$$

para $x = (x_k) \in \ell^2$, $y' = (y_k) \in \ell^2$, de donde, por las desigualdad de Hölder, se obtiene:

$$|\langle T_n(x), y' \rangle| \leq \|x\|_2 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

para todo $x = (x_k) \in \ell^2$ y todo $y' = (y_k) \in \ell^2$. Por consiguiente, $T_n \rightarrow 0$. Sin embargo, si $x \neq 0$, $\|T_n(x)\|_2 = \|x\|_2 \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), de donde $T_n \not\Rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.7.4. Una sucesión (T_n) en $L(E, F)$ puede ser fuertemente convergente (en el sentido de operadores) a un operador $T \in L(E, F)$ y sin embargo, la sucesión de sus operadores adjuntos (T'_n) puede no ser fuertemente convergente (en el sentido de operadores) a T' . En símbolos,

$$T_n \longrightarrow T \not\Rightarrow T'_n \longrightarrow T'.$$

En efecto, sean $E = F = \ell^2$,

$$T_n : x = (x_k) \in \ell^2 \longmapsto T_n(x) = (x_{n+j})_{j \geq 1} \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

y $T \equiv 0$ el operador idénticamente nulo. Entonces,

$$\|T_n(x)\|_2 = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

para todo $x = (x_k) \in \ell^2$, o sea, $T_n \longrightarrow 0$. Por otra parte,

$$T'_n : y' = (y_k) \in \ell^2 \longmapsto T'_n(y') = (0, 0, \dots, \underset{n}{0}, y_1, y_2, \dots) \in \ell^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

luego, si $y' \neq 0$, $\|T'_n(y')\|_2 = \|y'\|_2 \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), de donde $T'_n \not\rightarrow 0$.

Proposición 1.7.5. Sean E, F espacios de Banach, siendo E reflexivo. Si una sucesión (T_n) en $L(E, F)$ converge débilmente (en el sentido de operadores) a un operador $T \in L(E, F)$, entonces la sucesión de los adjuntos (T'_n) converge débilmente (en el sentido de operadores) a T' .

Demostración. Sean $y' \in F'$, y $x'' \in E''$. Existe $x \in E$ tal que $\tilde{x} = x''$. Ahora bien,

$$\langle T'_n(y'), x'' \rangle = \langle x, T'_n(y') \rangle = \langle T_n(x), y' \rangle.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T'_n(y'), x'' \rangle = \langle T(x), y' \rangle = \langle x, T'(y') \rangle = \langle T'(y'), x'' \rangle$$

para todo $y' \in F'$ y todo $x'' \in E''$. Por lo tanto, $T'_n \longrightarrow 0$. □

Observación 1.7.1. Si E no es reflexivo, lo anterior puede no ser cierto: Sea $T_n : c_0 \rightarrow c_0$, definida así : $T_n(x) = x_n e_1$. Se tiene

$$T'_n : y' = (y_k) \in \ell^1 \longmapsto T'_n(y') = y_1 e_n \in \ell^1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por consiguiente, si $y' = (y_k) \in \ell^1$ con $y_1 \neq 0$, y, $x'' = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in \ell^\infty$, se tiene que:

$$\langle T'_n(y'), x'' \rangle = y_1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

luego, $T'_n \not\rightarrow 0$.

Ejercicios de la sección 1.7

1. Sea P una proyección continua en un espacio de Banach E . Demostrar que el operador P' , adjunto de P , es una proyección en E' .
2. Sean E, F espacios de Banach y $T \in L(E, F)$ con $R(T)$ de dimensión finita. Demostrar que $R(T')$ también es de dimensión finita, y que $\dim(R(T)) = \dim(R(T'))$.
3. Sea c el subespacio de ℓ^∞ formado por las sucesiones convergentes de números complejos. Para $x = (x_n) \in c$, denotamos $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Sea

$$\phi : f \in (c_0)' \mapsto \phi(f) = (f(e_n)) \in \ell^1$$

el isomorfismo isométrico entre el dual de c_0 y el espacio ℓ^1 .

- a) Dar explícitamente un isomorfismo isométrico ψ entre el dual de c y el espacio ℓ^1 .
- b) Sea $S : c_0 \rightarrow c$ el operador inclusión, esto es, $S(x) = x$. Describir el operador $\phi \circ S' \circ \psi^{-1} : \ell^1 \rightarrow \ell^1$.
- c) Sea $T : c \rightarrow c_0$ la aplicación definida así:
Si $x \in c$, entonces se define $T(x) = y$, en donde $y_1 = x_\infty$, y, $y_{n+1} = x_n - x_\infty$, para $n \geq 1$. Demostrar que T es una biyección continua de c sobre c_0 , y describir el operador $\psi \circ T' \circ \phi^{-1} : \ell^1 \rightarrow \ell^1$.
4. Sean $I = [0, 1]$, y, $T : L^1(I) \rightarrow L^1(I)$ la aplicación definida por la fórmula

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad f \in L^1, x \in I.$$

- a) Demostrar que $T \in L(L^1(I))$, que $\|T\| = 1$, y que T es inyectivo.

- b) Demostrar que el operador adjunto T' de T está dado por la fórmula

$$T'(g)(t) = \int_t^1 g(x)dx, \quad g \in L^\infty(I), \quad t \in I$$

- c) Demostrar que la adherencia de la imagen de T' en $L^\infty(I)$ no contiene las funciones constantes no nulas.

- d) Concluir que $\overline{R(T')} \neq N(T)^\perp$.

5. Sean E, F espacios de Banach, y, $T : E \longrightarrow F$ un operador lineal tal que

$$x_n \longrightarrow 0 \quad \text{implique} \quad T(x_n) \longrightarrow 0,$$

para toda sucesión (x_n) en E . Demostrar que T es continuo.

Capítulo 2

ESPACIOS DE HILBERT

2.1. Definiciones y ejemplos.

Definición 2.1.1. Sea H un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un *producto interno* en H es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$, definida en el producto cartesiano $H \times H$, que satisface las siguientes condiciones, cualesquiera que sean $x, y, z \in H$, y el escalar $\alpha \in \mathbb{K}$:

- *PI1)* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- *PI2)* $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- *PI3)* $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- *PI4)* Si $x \neq 0$, entonces $\langle x, x \rangle > 0$

Observación 2.1.1.

1. En la definición usual de producto interno sólo se exige que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfaga las condiciones *PI1)* a *PI3)*, y que $\langle x, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in H$. Estrictamente hablando, si la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisface además la condición *PI4)*, entonces se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno *no degenerado* en H .
2. Las condiciones *PI2)* y *PI3)* significan que, fijando $y \in H$, la función

$$x \in H \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K},$$

es una forma lineal sobre H .

3. Supuesta $PI1)$ válida, las condiciones $PI2)$ y $PI3)$ son equivalentes, respectivamente, a las siguientes:

- $PI1')$ $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $PI2')$ $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, estas dos propiedades significan que la función

$$y \in E \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K},$$

es una forma *antilineal* (o *semilineal*) en H , para cada $x \in H$.

Por consiguiente, todo producto interno en un espacio vectorial H sobre $\mathbb{K}$ es una forma *bilineal* en H , si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y *sesquilineal*, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Lema 2.1.1. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*) Si H es un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces vale la siguiente desigualdad:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad (1)$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$. Además, se tiene igualdad en (1) si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

Demostración. Si $y = 0$, entonces (1) es trivial.

Supongamos $y \neq 0$. Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - \lambda \langle y, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle. \quad (2)$$

En particular, si $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ en (2), entonces se obtiene que

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}, \quad (3)$$

esto es, $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, para todo $x \in H$ y todo $y \in H$.

Ahora, evidentemente, si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces vale la igualdad en (1). Recíprocamente, si $x - \lambda y \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces la desigualdad es estricta en (3) y por lo tanto, en (1). $\square$

Teorema 2.1.1. Si H es un espacio vectorial con producto interno, entonces la función

$$x \in H \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (4)$$

es una norma en H .

Demostración. Es inmediato que $\|\cdot\|$ satisface las condiciones N1) y N2) de la definición de norma. Demostremos la desigualdad triangular. En efecto,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2.$$

Ahora bien, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq 2|\langle x, y \rangle| \leq 2\|x\|\|y\|.$$

Se sigue que

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2,$$

o sea, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x \in H$ y todo $y \in H$. $\square$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que el producto interno es una forma sesquilineal (o bilineal) continua.

Definición 2.1.2. Un *espacio de Hilbert* es un espacio con producto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que es completo para la norma (4) definida por ese producto interno.

Ejemplo 2.1.1.

1. $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

2. $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}.$$

3. El espacio ℓ^2 es de Hilbert con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Ejemplo 2.1.2. El espacio $C[a, b]$ de todas las funciones complejas continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ no es un espacio de Hilbert para el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

En efecto, sean $a < c < b$ y $f_n \in C[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, la función definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \leq t \leq c - \frac{1}{n}, \\ nt - nc + 1, & \text{si } c - \frac{1}{n} \leq t \leq c, \\ 1, & \text{si } c \leq t \leq b. \end{cases}$$

Si $n > m$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|^2 &= \int_{c-\frac{1}{m}}^{c-\frac{1}{n}} |f_m(t)|^2 dt + \int_{c-\frac{1}{n}}^c |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \leq \\ &\leq \int_{c-\frac{1}{m}}^c |f_m(t)|^2 dt < \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Análogamente, si $m > n$, entonces $\|f_n - f_m\|^2 < \frac{1}{n}$. Por consiguiente,

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}$, luego (f_n) es una sucesión de Cauchy en el espacio $C[a, b]$.

Sin embargo, no existe $f \in C[a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. En efecto, supongamos lo contrario.

Entonces,

$$\|f_n - f\|^2 = \int_a^{c-\frac{1}{n}} |f(t)|^2 dt + \int_{c-\frac{1}{n}}^c |f_n(t) - f(t)|^2 dt + \int_c^b |1 - f(t)|^2 dt,$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$, se obtiene que

$$\int_a^c |f(t)|^2 dt = 0, \quad \text{y} \quad \int_c^b |1 - f(t)|^2 dt = 0,$$

luego, como f es continua, se tiene que $f(t) = 0$, para todo $t \in (a, c)$, y $f(t) = 1$ para todo $t \in (c, b)$, lo que es una contradicción.

Definición 2.1.3. Sea $(\alpha_i)_{i \in I}$ una familia de números reales no negativos. Se llama *suma* de la familia $(\alpha_i)_{i \in I}$ al número real extendido

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \sup \left\{ \sum_{i \in F} \alpha_i; F \in \mathcal{F}(I) \right\},$$

en donde $\mathcal{F}(I)$ denota las partes finitas del conjunto I .

Si $\sum_{i \in I} \alpha_i < \infty$, se dice que la familia $(\alpha_i)_{i \in I}$ es *sumable*. En este caso, se tiene que $J = \{i \in I; \alpha_i \neq 0\}$ es enumerable. En efecto, si $V_n = \{i \in I; \alpha_i > \frac{1}{n}\}$, entonces, $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$; ahora bien, cada conjunto V_n es finito, pues

$$\frac{1}{n} \text{card}(V_n) = \sum_{i \in V_n} \frac{1}{n} \leq \sum_{i \in V_n} \alpha_i \leq \sum_{i \in I} \alpha_i < \infty.$$

Por consiguiente, J es enumerable.

Observación 2.1.2. Obsérvese que en el caso en que $I = \mathbb{N}$, entonces $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$. En particular, si $(\alpha_i)_{i \in I}$ es una familia sumable de números reales no negativos, entonces $\sum_{i \in I} \alpha_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, en donde (α_n) es la sucesión (eventualmente finita) formada por los elementos no nulos de la familia $(\alpha_i)_{i \in I}$.

Definición 2.1.4. Sean E un espacio normado y $(x_i)_{i \in I}$ una familia de elementos de E .

1. Se dice que la familia $(x_i)_{i \in I}$ es *sumable* en E si y sólo si existe un $x \in E$, con la siguiente propiedad: dado $\epsilon > 0$, podemos hallar $F \in \mathcal{F}(I)$, tal que para todo $G \in \mathcal{F}(I)$ con $G \supset F$, se tiene $\|x - \sum_{i \in G} x_i\| < \epsilon$. En este caso se dice que x es la *suma de la familia* $(x_i)_{i \in I}$, y se usa la notación $x = \sum_{i \in I} x_i$.

Se sigue que si una sucesión (x_n) en E es sumable, y su suma es $x \in E$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - \sum_{k=1}^n x_k\| = 0$.

2. Si $\sum_{i \in I} \|x_i\| < \infty$, entonces se dice que la familia $(x_i)_{i \in I}$ es *absolutamente sumable* en E .

Lema 2.1.2. Sea E un espacio normado. Si una familia $(x_i)_{i \in I}$ es sumable en E , entonces dado $\epsilon > 0$, existe un subconjunto finito $F \in \mathcal{F}(I)$ tal que para todo $H \in \mathcal{F}(I)$, disjunto de F , se tiene

$$\left\| \sum_{i \in H} x_i \right\| < \epsilon$$

Demostración. Sean $x = \sum_{i \in I} x_i$, y $\epsilon > 0$. Existe entonces un subconjunto finito $F \in \mathcal{F}(I)$ tal que para todo $G \in \mathcal{F}(I)$ con $G \supset F$, se tiene $\|x - \sum_{i \in G} x_i\| < \frac{\epsilon}{2}$. Si $H \in \mathcal{F}(I)$ y $H \cap F = \emptyset$, entonces vale que

$$\sum_{i \in H} x_i = \sum_{i \in H \cup F} x_i - \sum_{i \in F} x_i,$$

luego,

$$\left\| \sum_{i \in H} x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i \in H \cup F} x_i \right\| + \left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \epsilon. \quad \square$$

Teorema 2.1.2. Un espacio normado E es completo si y sólo si toda familia absolutamente sumable es sumable en E .

Demostración.

1. Supongamos que E es completo y sea $(x_i)_{i \in I}$ una familia absolutamente sumable en E . Si $(\tilde{x}_n)$ es la sucesión formada por los elementos no nulos de la familia $(x_i)_{i \in I}$, entonces resulta que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\tilde{x}_n\| = \sum_{i \in I} \|x_i\| < \infty$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

- a) La sucesión $(\sum_{k=1}^n \tilde{x}_k)_n$ es de Cauchy en E . En efecto, sea $\epsilon > 0$; entonces, por el lema, existe un subconjunto finito $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ tal que para todo

$$H \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \quad \text{con} \quad H \cap F = \emptyset, \quad \text{se tiene} \quad \sum_{k \in H} \|\tilde{x}_k\| < \frac{\epsilon}{2} \quad (5)$$

Por consiguiente, si $n_0 = \max \{n; n \in F\}$, entonces

$$n > m > n_0 \implies \left\| \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k - \sum_{k=1}^m \tilde{x}_k \right\| \leq \sum_{k \in H_{mn}} \|\tilde{x}_k\| < \epsilon,$$

ya que $H_{mn} \cap F = \emptyset$, en donde $H_{mn} = \{m+1, m+2, \dots, n\}$.

Se sigue la afirmación a).

Como E es completo, existe $x \in E$ tal que la sucesión $(\sum_{k=1}^n \tilde{x}_k)$ converge a x en E .

- b) La sucesión $(\tilde{x}_n)$ es sumable a x en E . En efecto, existe $n_1 > n_0 = \text{máx } F$ tal que

$$n > n_1 \implies \left\| x - \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k \right\| < \frac{\epsilon}{2} \quad (6)$$

Sea $F_1 = \{1, 2, \dots, n_0, \dots, n_1\} \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Si $G \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ y $G \supset F_1$, entonces se tiene que

$$\sum_{k \in G} x_k = \sum_{k=1}^{n_1} \tilde{x}_k + \sum_{k \in G-F_1} \tilde{x}_k,$$

de donde, ya que $(G - F_1) \cap F = \emptyset$ y teniendo en cuenta (5) y (6), se obtiene que

$$\left\| x - \sum_{k \in G} \tilde{x}_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n_1} \tilde{x}_k \right\| + \sum_{k \in G-F_1} |\tilde{x}_k| < \epsilon,$$

cualquiera que sea $G \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ con $G \supset F_1$. Se sigue la afirmación b).

Así, $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{x}_n$, y como $x_i = 0$ si $x_i \neq \tilde{x}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = \sum_{i \in I} x_i$, esto es, la familia $(x_i)_{i \in I}$ es sumable a x en E , lo cual queríamos demostrar.

2. Viceversa, supongamos que E tiene la propiedad de que toda familia absolutamente sumable es sumable en E . Demostremos que E es completo. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en E . Entonces, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k},$$

para $k = 1, 2, \dots$, de donde (por la observación 2,1,2)

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty,$$

luego, por hipótesis, la sucesión $(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ es sumable en E , digamos a x . Por consiguiente, como $\sum_{k=1}^p (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_{p+1}} - x_{n_1}$, entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x - (x_{n_{p+1}} - x_{n_1})\| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^p (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right\| = 0,$$

esto es, (x_{n_k}) es una subsucesión convergente a $(x + x_{n_1})$ de la sucesión de Cauchy (x_n) , luego la propia sucesión (x_n) es convergente (al mismo límite, $x + x_{n_1}$). Se sigue que E es completo. $\square$

Proposición 2.1.1. *Sea $I \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera. Entonces, el conjunto*

$$\ell^2(I) = \left\{ x = (x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{K}; \sum_{i \in I} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

de todas las familias en $\mathbb{K}$ de cuadrado sumable, con conjunto de índices I , es un espacio de Hilbert para el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i.$$

Demostración. Para cada $x = (x_i) \in \ell^2(I)$, el conjunto $I(x) = \{i \in I; x_i \neq 0\}$ es enumerable. Por consiguiente, la demostración de que $\ell^2(I)$ es un espacio vectorial se reduce al ya conocido caso enumerable (ejemplo 1,1,9). Análogamente para ver que el producto interno está bien definido, ya que

$$\sum_{i \in I} x_i \bar{y}_i = \sum_{i \in I(x) \cap I(y)} x_i \bar{y}_i,$$

e, $I(x) \cap I(y)$ es enumerable.

Finalmente, $\ell^2(I)$ es completo. En efecto, sea $(x^{(m)})$ una sucesión de Cauchy en el espacio $\ell^2(I)$. Entonces, el conjunto $P = \bigcup_{m=1}^{\infty} I(x^{(m)})$ es enumerable y $(x^{(m)})$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $\ell^2(P)$, el cual es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\mathbb{N})$ o $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Por consiguiente, $\ell^2(P)$ es completo y $(x^{(m)})$ es convergente en $\ell^2(P)$, luego en $\ell^2(I)$. $\square$

Ejercicios de la sección 2.1

1. Demostrar que la norma $\|\cdot\|$ de un espacio normado E es inducida por un producto interno en E si y sólo si satisface la siguiente identidad:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

para todo $x \in E$ y todo $y \in E$ (*Ley del paralelogramo*)

Sugerencia: Definir

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

en el caso real, y

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2),$$

en el caso complejo.

En un espacio con producto interno, las identidades anteriores se llaman *identidades polares*.

2. Demostrar que el espacio ℓ^p ($1 \leq p \leq \infty$) es de Hilbert (esto es, su norma proviene de un producto interno) si y sólo si $p = 2$.

2.2. Ortogonalidad

A menos que se diga explícitamente otra cosa, de ahora en adelante H denotará un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 2.2.1. Sean $x \in H$, $y \in H$, y F, G dos subconjuntos de H .

1. Se dice que x es *ortogonal* a y , o que y es ortogonal a x o que x, y son ortogonales, lo cual se denota $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.
2. Se dice que x es ortogonal a F , lo cual se denota $x \perp F$, cuando $x \perp y$ para todo $y \in F$. Se usa la notación

$$F^\perp = \{x \in H; x \perp F\}.$$

3. Se dice que F y G son ortogonales, lo cual se denota $F \perp G$, cuando $x \perp y$, para todo $x \in F$ y todo $y \in G$.

4. Un *sistema* (o conjunto) *ortogonal* en H es un subconjunto E de H tal que $x \perp y$, para todo $x \in E$ y todo $y \in E$, con $x \neq y$.
5. Un *sistema ortonormal* en H es un sistema ortogonal E en H tal que $\|x\| = 1$, para todo $x \in E$.

Proposición 2.2.1. (*Teorema de Pitágoras*) Si $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es un sistema finito ortogonal en H , entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^n z_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|z_k\|^2.$$

Demostración. Ya que $\langle z_i, z_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, entonces se tiene que

$$\left\| \sum_{k=1}^n z_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n z_i, \sum_{j=1}^n z_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle z_i, z_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|z_i\|^2. \quad \square$$

Teorema 2.2.1. Sean H un espacio de Hilbert y (z_n) una sucesión ortogonal en H . Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente en H si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$. En este caso,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 \quad (1)$$

Demostración. Sea $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ la n -ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Si $n > m$, entonces, por el teorema de Pitágoras, se tiene que

$$\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|z_k\|^2,$$

luego, (S_n) es una sucesión de Cauchy (o equivalentemente, convergente) en H si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty$. Ahora bien, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente en H , entonces, como por el teorema de Pitágoras,

$$\left\| \sum_{n=1}^m z_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^m \|z_n\|^2,$$

para $m = 1, 2, \dots$, usando la continuidad de la norma, resulta (1). $\square$

Proposición 2.2.2. *Todo sistema ortogonal E en H con $0 \notin E$, es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración. Sean $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un subconjunto finito de E , y, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ escalares tales que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

Por consiguiente, como $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, si $i \neq j$, resulta que

$$0 = \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, x_i \rangle = \alpha_i \|x_i\|^2,$$

luego $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, ya que $0 \notin E$. Se sigue que E es linealmente independiente. $\square$

Definición 2.2.2. Sea $E \neq \emptyset$ un sistema ortogonal en H . El número $\langle x, z \rangle$, $x \in H, z \in E$, se llama el *coeficiente de Fourier* de x en relación a z .

Ejemplo 2.2.1.

1. La base canónica $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{C}^n$ es un sistema ortonormal en $\mathbb{C}^n$. El coeficiente de Fourier $\langle z, e_k \rangle$ de $z \in \mathbb{C}^n$ en relación a e_k , es la k -ésima coordenada de z , $k = 1, 2, \dots, n$.
2. $H = L^2[0, 2\pi]$, el espacio de todas las funciones complejas de cuadrado (Lebesgue-) integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$, es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

La sucesión $\phi_n : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, es un sistema ortonormal en $L^2[0, 2\pi]$. El n -ésimo coeficiente de Fourier de $f \in L^2[0, 2\pi]$ está dado por

$$f(n) = \langle f, e^{int} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Proposición 2.2.3. *Sean $z_1, z_2, \dots, z_n$ un sistema finito ortonormal, $x \in H$ y $c_k = \langle x, z_k \rangle$ el k -ésimo coeficiente de Fourier de x , $k = 1, 2, \dots, n$. Entonces*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n c_k z_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k z_k \right\|, \quad (2)$$

cualquiera que sean los $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, 2, \dots, n$. En otras palabras la función

$$f : (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k z_k \right\|,$$

asume su valor mínimo en $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, en donde $c_k = \langle x, z_k \rangle$, $k = 1, 2, \dots, n$

Demostración. Como $\langle z_i, z_j \rangle = \delta_{ij}$, entonces el vector $x - \sum_{k=1}^n c_k z_k$ es ortogonal a cada vector z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, luego ortogonal a cualquier combinación lineal $\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k$ de los vectores $z_1, z_2, \dots, z_n$. Por consiguiente, por el teorema de Pitágoras, resulta que

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k z_k \right\|^2 &= \left\| \left(x - \sum_{k=1}^n c_k z_k \right) + \sum_{k=1}^n (c_k - \alpha_k) z_k \right\|^2 = \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k z_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (c_k - \alpha_k) z_k \right\|^2 \geq \\ &\geq \left\| x - \sum_{k=1}^n c_k z_k \right\|^2, \end{aligned}$$

para todo $\alpha_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, 2, \dots, n$, lo cual prueba (2). $\square$

Lema 2.2.1. Si $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es un sistema finito ortonormal en H , entonces

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, z_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad (3)$$

para todo $x \in H$.

Demostración. Sea $c_k = \langle x, z_k \rangle$ $k = 1, 2, \dots, n$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle x - \sum_{k=1}^n c_k z_k, x - \sum_{k=1}^n c_k z_k \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n c_k \langle z_k, x \rangle - \sum_{k=1}^n \bar{c}_k \langle x, z_k \rangle + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2, \end{aligned}$$

para todo $x \in H$, lo cual prueba la desigualdad (3). $\square$

Proposición 2.2.4. (*Desigualdad de Bessel*) Si E es un sistema ortonormal en H , entonces

$$\sum_{z \in E} |\langle x, z \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad (4)$$

para todo $x \in H$.

Demostración. Por el lema, para cualquier subconjunto finito $F \subset E$, se tiene que

$$\sum_{z \in F} |\langle x, z \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

luego, tomando el supremo sobre los subconjuntos finitos de E , resulta la desigualdad de Bessel (4). $\square$

Teorema 2.2.2. Si H es un espacio de Hilbert y (z_n) es una sucesión ortonormal en H , entonces para todo $x \in H$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n$ es convergente en H , digamos hacia y . Además $(x - y) \perp z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\langle x, z_n \rangle z_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, z_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

luego, por el teorema 2.2.1, existe $y \in H$ tal que $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n$.

Demostremos que $(x - y) \perp z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $S_m = \sum_{k=1}^m \langle x, z_k \rangle z_k$ la m -ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, z_k \rangle z_k$. Si $m > n$, como $\langle z_i, z_j \rangle = \delta_{ij}$, entonces $\langle x, z_n \rangle = \langle S_m, z_n \rangle$, luego

$$|\langle x - y, z_n \rangle| = |\langle S_m - y, z_n \rangle| \leq \|S_m - y\|,$$

para todo $m > n$. Por consiguiente, $\langle x - y, z_n \rangle = 0$, pues $S_m \rightarrow y$ en H . $\square$

Definición 2.2.3. Se dice que un sistema ortonormal E en H es *completo*, cuando $E^\perp = \{0\}$, esto es, si el único vector ortogonal a E es el vector nulo.

Teorema 2.2.3. Todo espacio vectorial $H \neq \{0\}$ con producto interno posee un sistema ortonormal completo. Más precisamente, si F es un sistema ortonormal en H , entonces existe un sistema ortonormal completo E en H tal que $E \supset F$.

Demostración. Sean F un sistema ortonormal en H , y

$$\xi = \{E \subset H; E \text{ es un sistema ortonormal en } H, \text{ y } E \supset F\}.$$

Ordenamos a ξ por inclusión: Si $F_i \in \xi$, $i = 1, 2$ entonces

$$F_1 \leq F_2 \iff F_1 \subset F_2.$$

Se sigue que $(\xi, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Además,

1. $\xi \neq \emptyset$, pues $F \in \xi$.
2. $(\xi, \leq)$ es inductivo, esto es, toda cadena en ξ posee una cota superior en ξ .

Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal $E_0 \in \xi$. Demostremos que E_0 es completo. Si no fuera así, existiría $z \in H$, $z \neq 0$, tal que $z \in E_0^\perp$. Entonces, $E = E_0 \cup \left\{ \frac{z}{\|z\|} \right\} \in \xi$, y, $E_0 \subsetneq E$, lo que contradice la maximalidad de E_0 . $\square$

Proposición 2.2.5. (*Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt*)

Si $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ es una sucesión, finita o infinita, linealmente independiente en H , entonces existe una sucesión ortonormal $(u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$, del mismo cardinal de la sucesión dada, tal que $[y_1, y_2, \dots, y_n] = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, la sucesión (u_n) es única en el siguiente sentido: Si (v_n) es otra sucesión con las mismas propiedades, entonces existe una sucesión (γ_n) en $\mathbb{K}$ tal que $|\gamma_n| = 1$, y, $v_n = \gamma_n u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1. *Construcción:* Se define $u_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$. Supongamos definidos $u_1, u_2, \dots, u_n$ con las propiedades de la proposición. Si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ es el conjunto de los valores de la sucesión dada, entonces no hay más nada que hacer. Si existe y_{n+1} , entonces se define

$$u'_{n+1} = y_{n+1} - \sum_{k=1}^n \langle y_{n+1}, u_k \rangle u_k.$$

Como $y_{n+1} \notin [y_1, y_2, \dots, y_n] = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, entonces $u'_{n+1} \neq 0$. Además $\langle u'_{n+1}, u_k \rangle = 0$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Se sigue que, si $u_{n+1} = \frac{u'_{n+1}}{\|u'_{n+1}\|}$, entonces $\{u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ es ortonormal y $[y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}] = [u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}]$. Esto demuestra la existencia de la sucesión (u_n) .

2. *Unicidad:* Sea (v_n) otra sucesión en H con las mismas propiedades de la sucesión (u_n) .
 - a) Como $v_1 \in [v_1] = [u_1]$ y $\|v_1\| = \|u_1\| = 1$, entonces existe $\gamma_1 \in \mathbb{K}$ con $|\gamma_1| = 1$ tal que $v_1 = \gamma_1 u_1$.
 - b) Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Como $v_n \in [v_1, v_2, \dots, v_n] = [u_1, u_2, \dots, u_n]$, entonces existen escalares $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \gamma_n$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$v_n = \gamma_n u_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k u_k.$$

Además, como $v_n \perp [v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] = [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]$, entonces resulta que

$$0 = \langle v_n, u_k \rangle = \gamma_n \langle u_n, u_k \rangle + \beta_k = \beta_k,$$

para $k = 1, 2, \dots, n-1$. Por consiguiente, $v_n = \gamma_n u_n$. Además, $|\gamma_n| = 1$. Esto completa la demostración de la proposición. $\square$

Teorema 2.2.4. *En todo espacio con producto interno, separable, H , existe un sistema enumerable ortonormal completo.*

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un subconjunto enumerable denso en H , con $0 \notin D$.

A seguir, construiremos inductivamente un conjunto enumerable, linealmente independiente $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ contenido en D tal que $D \subset [y_1, y_2, \dots, y_n, \dots]$, de la siguiente manera:

1. Se define $y_1 = x_1$.
2. Supongamos ya definidos los enteros $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1} < n_k$, de tal manera que, poniendo $y_i = x_{n_i}$, $i = 1, 2, \dots, k$, el conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ sea linealmente independiente, y además

$$[y_1, y_2, \dots, y_k] = [x_1, x_2, \dots, x_{n_k}]$$

Sea

$$A_k = \{n > n_k; x_n \notin [y_1, y_2, \dots, y_k]\}.$$

Si $A_k = \emptyset$, esto es, si $x_n \in [y_1, y_2, \dots, y_k]$, para todo $n > n_k$, entonces $D \subset [y_1, y_2, \dots, y_k]$. Ortonormalizando, por el proceso de Gram-Schmidt, del conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ se obtiene un sistema ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ tal que

$$D \subset [y_1, y_2, \dots, y_k] = [u_1, u_2, \dots, u_k],$$

de donde, por ser D denso en H , se sigue que $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es completo.

Si $A_k \neq \emptyset$, se definen $n_{k+1} = \min A_k$, $y_{k+1} = x_{n_{k+1}}$.

Continuando de esta manera, se construye un conjunto enumerable linealmente independiente $\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ tal que $y_{k+1} = x_{n_{k+1}}$, en donde $D \subset [y_1, y_2, \dots, y_k, \dots]$, pues si $x_j \in D$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \leq j < n_{k+1}$, luego, por la definición de n_{k+1} , se tiene que $x_j \in [y_1, y_2, \dots, y_k]$.

Usando el proceso de Gram-Schmidt, encontramos un sistema enumerable ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$ tal que

$$D \subset [y_1, y_2, \dots, y_k, \dots] = [u_1, u_2, \dots, u_k, \dots],$$

de donde, como D es denso en H , se sigue que $\{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots\}$ es completo. $\square$

Teorema 2.2.5. Sean H un espacio de Hilbert y E un sistema ortonormal en H . Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. E es completo.

2. Para todo $x \in H$, se tiene que

$$x = \sum_{z \in E} \langle x, z \rangle z \quad (\text{Serie de Fourier})$$

3. Para todo $x \in H$ y todo $y \in H$, vale que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{z \in E} \langle x, z \rangle \overline{\langle y, z \rangle}$$

4. Para todo $x \in H$, vale la siguiente identidad:

$$\|x\|^2 = \sum_{z \in E} |\langle x, z \rangle|^2 \quad (\text{Identidad de Parseval})$$

5. E es total en H , esto es, $\overline{[E]} = H$.

Demostración. 1) $\implies$ 2): Sea $x \in H$. Por la desigualdad de Bessel, se tiene que

$$\sum_{z \in E} |\langle x, z \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty,$$

luego el conjunto $\{z \in E; \langle x, z \rangle \neq 0\}$ es enumerable¹. Escribámoslo en forma de sucesión: $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$. Se sigue que existe $y \in H$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n = y.$$

Además, $(x - y) \perp z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (teorema 2,2,2). Se deduce que

$$\{z \in E; \langle y, z \rangle \neq 0\} = \{z_n; n \in \mathbb{N}\} \quad (*)$$

¹En el caso en que este conjunto sea finito, la demostración se simplifica grandemente.

pues

$$0 = \langle x - y, z_n \rangle = \langle x, z_n \rangle - \langle y, z_n \rangle,$$

esto es, $\langle y, z_n \rangle = \langle x, z_n \rangle \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $z \in E$, y

$$\langle y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle \langle z_n, z \rangle = 0,$$

entonces $z \neq z_n$ para todo n (pues E es un sistema ortonormal). Se tiene, por lo tanto, la igualdad (*).

Se sigue que $(x - y) \perp E$, y siendo E completo, entonces $y = x$, luego

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n = \sum_{z \in E} \langle x, z \rangle z,$$

pues $\langle x, z \rangle = 0$, si $z \neq z_n$, $n \in \mathbb{N}$.

2) $\implies$ 3): Sean $x \in H$, $y \in H$. El conjunto

$$A(x, y) = \{z \in E; \langle x, z \rangle \neq 0, \text{ ó, } \langle y, z \rangle \neq 0\}$$

es enumerable, digamos $A(x, y) = (w_n)$. Por hipótesis,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, w_k \rangle w_k, \quad (5)$$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, w_k \rangle w_k, \quad (6)$$

Si (x_n) , y, (y_n) denotan las sucesiones de las sumas parciales de las series (5) y (6), respectivamente, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \langle x, y \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, w_k \rangle \overline{\langle y, w_k \rangle} \right| &= |\langle x, y \rangle - \langle x_n, y_n \rangle| = \\ &= |\langle x, y \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y_n \rangle| \leq \\ &\leq \|y\| \|x_n - x\| + \|x_n\| \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ya que $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, resulta que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, w_k \rangle \overline{\langle y, w_k \rangle} = \sum_{z \in E} \langle x, z \rangle \overline{\langle y, z \rangle}.$$

Finalmente, las implicaciones 3) $\implies$ 4) $\implies$ 1) y 2) $\implies$ 5) $\implies$ 1) son inmediatas. $\square$

Proposición 2.2.6. *En un espacio de Hilbert H todos los sistemas ortonormales completos tienen el mismo número cardinal.*

Demostración. Sean E_1 y E_2 sistemas ortonormales completos en H .

1. Si E_1 es finito, entonces (por el teorema 2,2,5) E_1 es una base algebraica de H , y siendo E_2 linealmente independiente, entonces $\text{card}(E_2) \leq \text{card}(E_1)$. Por simetría, $\text{card}(E_1) \leq \text{card}(E_2)$, luego $\text{card}(E_1) = \text{card}(E_2)$.
2. Supongamos que E_1 y E_2 son infinitos. Para cada $a \in E_1$, el conjunto

$$E_2(a) = \{b \in E_2; \langle a, b \rangle \neq 0\},$$

es enumerable, pues $\sum_{b \in E_2} |\langle a, b \rangle|^2 = \|a\|^2 < \infty$.

Ahora bien, $E_2 = \cup_{a \in E_1} E_2(a)$. En efecto, dado $b \in E_2$, como

$$\sum_{a \in E_1} |\langle b, a \rangle|^2 = \|b\|^2 = 1 \neq 0,$$

entonces existe $a \in E_1$ tal que $\langle b, a \rangle \neq 0$, luego $b \in E_2(a)$. Por consiguiente,

$$\text{card}(E_2) \leq \sum_{a \in E_1} \text{card}(E_2(a)) \leq \text{card}(E_1) \cdot \aleph_0 = \text{card}(E_1),$$

Por simetría $\text{card}(E_1) \leq \text{card}(E_2)$, luego $\text{card}(E_2) = \text{card}(E_1)$. $\square$

Definición 2.2.4. Sea $H \neq \{0\}$ un espacio de Hilbert. Entonces,

1. El cardinal de cualquier sistema ortonormal completo en H se llama *dimensión ortogonal* de H .

Si $H = \{0\}$, entonces la dimensión ortogonal de H se define como 0.

2. Una *base ortonormal* de H es cualquier sistema ortonormal completo en H .

Teorema 2.2.6. *Cualquier espacio de Hilbert H es isométricamente isomorfo a $\ell^2(I)$, para algún conjunto (de índices) I .*

Demostración. Sean E un sistema ortonormal completo en H (teorema 2,2,3), I un conjunto con cardinal igual a la dimensión ortogonal de E (esto es, $\text{card}(I) = \text{card}(E)$), $\psi : I \longrightarrow E$ una biyección de I sobre E y $T : H \longrightarrow \ell^2(I)$ la aplicación definida por

$$T(x) = (\langle x, \psi(i) \rangle)_{i \in I}.$$

Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. T está bien definida. En efecto, para cada $x \in H$, por el teorema 2,2,5, se tiene que

$$\sum_{i \in I} |\langle x, \psi(i) \rangle|^2 = \sum_{z \in E} |\langle x, z \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

Además, T es lineal.

2. T es una biyección. En efecto, es claro que T es inyectiva. Demostremos que T también es sobreyectiva. Sea $(\beta_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$. Entonces,

$$\sum_{i \in I} \|\beta_i \psi(i)\|^2 = \sum_{i \in I} |\beta_i|^2 < \infty,$$

luego, por el teorema 2,2,1, existe $x \in H$ tal que $x = \sum_{i \in I} \beta_i \psi(i)$, de donde, por el teorema 2,2,5, se obtiene que $\beta_i = \langle x, \psi(i) \rangle$, $i \in I$. Por lo tanto, $T(x) = (\beta_i)_{i \in I}$.

3. Finalmente, T es una isometría, pues, por el mismo teorema 2,2,5, resulta que

$$\|x\|^2 = \sum_{z \in E} |\langle x, z \rangle|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, \psi(i) \rangle|^2 = \|T(x)\|_2^2,$$

esto es, $\|T(x)\|_2 = \|x\|$, para todo $x \in H$. Esto completa la demostración del teorema. $\square$

Ejemplo 2.2.2. Las funciones

$$\phi_n : t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

forman un sistema (enumerable) ortonormal completo en $L^2[0, 2\pi]$ para el producto interno $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$. En efecto,

1. Es claro que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un sistema enumerable ortonormal en el espacio $L^2[0, 2\pi]$ (ejemplo 2,2,1,2).
2. Demostremos que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es completo en $L^2[0, 2\pi]$, esto es, que el subespacio

$$M = \left\{ \sum_{k=-n}^n \alpha_k \phi_k; \alpha_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\},$$

es denso en $L^2[0, 2\pi]$. En efecto, sea $f \in L^2[0, 2\pi]$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, por [9], teorema 13,21 ó [23], teorema 3,14, existe una función continua h con soporte compacto contenido en $(0, 2\pi)$ tal que

$$\|f - h\|_2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora bien, como h es periódica de período 2π (pues, $h(0) = 0 = h(2\pi)$), entonces existe $p \in M$ tal que

$$\|h - p\| = \max \{|h(t) - p(t)|; t \in [0, 2\pi]\} < \frac{\epsilon}{2}$$

(teorema de Stone-Weierstrass) . Por consiguiente,

$$\|h - p\|_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |h(t) - p(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|h - p\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Se sigue que

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - h\|_2 + \|h - p\|_2 < \epsilon$$

Observación 2.2.1.

1. Como $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2[0, 2\pi]$, entonces del teorema 2,2,5 se obtiene que

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikt}, \quad (\text{Serie de Fourier de } f)^2 \quad (2.1)$$

para todo $f \in L^2[0, 2\pi]$, en donde

$$\widehat{f}(k) = \langle f, e^{ikt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

²téngase bien presente que la convergencia es *en la norma* de $L^2[0, 2\pi]$.

Además, por el mismo teorema,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \|f\|_2^2 < \infty.$$

En particular, se tiene el *teorema de Riemann-Lebesgue*:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0,$$

para todo $f \in L^2[0, 2\pi]$.

Recíprocamente, si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, en donde $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, entonces existe una función $f \in L^2[0, 2\pi]$ tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ es la serie de Fourier de f , y, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}\|_2 = 0$ (*teorema de Riesz-Fischer*) .

2. Otra manera de ver el ejemplo 2,2,2 es como sigue:

Sea $f \in L^2[0, 2\pi]$ tal que $\langle \phi_k, f \rangle = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, esto es,

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sea

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Entonces, integrando por partes, se obtiene que cualquiera que sea $a \in \mathbb{C}$,

$$\int_0^{2\pi} (F(t) - a) e^{ikt} dt = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (*)$$

Pongamos $a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt$; entonces (*) vale también para $k = 0$.

Ahora bien, como $F(0) = 0 = F(2\pi)$, entonces $F - a$ es una función periódica de período 2π , luego (por el teorema de Weierstrass) dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio trigonométrico $p \in M$ tal que

$$\|F - a - p\| = \max \{|F(t) - a - p(t)|; t \in [0, 2\pi]\} < \epsilon$$

Además, (*) implica que

$$\int_0^{2\pi} (F(t) - a) \overline{p(t)} dt = 0$$

Por lo tanto, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |F(t) - a|^2 dt &= \int_0^{2\pi} (F(t) - a) \left(\overline{F(t)} - \bar{a} - \overline{p(t)} \right) dt \leq \\ &\leq \epsilon \int_0^{2\pi} |F(t) - a| dt \leq \\ &\leq \epsilon \left(\int_0^{2\pi} |F(t) - a|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} dt \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_0^{2\pi} |F(t) - a|^2 dt \leq 2\pi\epsilon^2,$$

para todo $\epsilon > 0$, luego F es constante, de donde $F \equiv 0$, esto es,

$$\int_0^t f(s) ds = 0,$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$, y como $f \in L^2[0, 2\pi] \subset L^1[0, 2\pi]$, entonces $f(t) = 0$, para casi todos los $t \in [0, 2\pi]$, esto es, $f = 0$ en el espacio $L^2[0, 2\pi]$. Se sigue que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un sistema enumerable ortonormal completo.

Proposición 2.2.7. *(y Definición) Si H es un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H , entonces $H = M \oplus M^\perp$ (suma directa topológica).*

La proyección de H sobre M a lo largo de $M^\perp$ se llama la proyección ortogonal sobre M .

Demostración.

1. Es claro que $M \cap M^\perp = \{0\}$. Además,

$$M^\perp = \{y \in H; \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in M\} = \bigcap_{x \in M} \{y \in H; \langle x, y \rangle = 0\}$$

es un subespacio cerrado de H .

2. Demostremos que $H = M + M^\perp$. En efecto, siendo M un subespacio cerrado de H , es un espacio de Hilbert. Sea $(z_i)_{i \in I}$ un sistema ortonormal completo en M ; $(z_i)_{i \in I}$ se extiende a un sistema ortonormal completo

en H , $(z_i)_{i \in I \cup J}$, en donde $I \cap J = \emptyset$ (teorema 2,2,3). Para cada $x \in H$, se tiene que

$$x = \underbrace{\sum_{i \in I} \langle x, z_i \rangle z_i}_{\in M} + \underbrace{\sum_{j \in J} \langle x, z_j \rangle z_j}_{\in M^\perp} \in M + M^\perp. \quad \square$$

Proposición 2.2.8. *Sea M un subespacio lineal de un espacio de Hilbert H . Entonces*

1. $M^{\perp\perp} = \overline{M}$
2. M es denso en H si y solamente si $M^\perp = \{0\}$.

Demostración.

1. Si $x \in M$, entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in M^\perp$, luego $x \in M^{\perp\perp}$. Por consiguiente, $M \subset M^{\perp\perp}$, de donde $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$.

Ahora bien, como $M^\perp = \overline{M}^\perp$, entonces, por la proposición 2,2,7, se tiene que

$$H = \overline{M} \oplus M^\perp.$$

Por lo tanto, si $x \in M^{\perp\perp}$, $x \neq 0$, entonces existen $x_1 \in \overline{M}$ y $x_2 \in M^\perp$ tales que $x = x_1 + x_2$, y, $x_1 \neq 0$ (pues, $x \notin M^\perp$), luego

$$x - x_1 = x_2 \in M^\perp.$$

También, como $x \in M^{\perp\perp}$, y, $x_1 \in \overline{M} \subset M^{\perp\perp}$, entonces

$$(x - x_1) \in M^{\perp\perp}.$$

Además, como $M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$, entonces $x_2 = x - x_1 = 0$, esto es, $x = x_1 \in \overline{M}$. Se sigue que $M^{\perp\perp} \subset \overline{M}$, y por lo tanto, $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

2. Es claro que si M es denso en H , entonces $M^\perp = \{0\}$ (aún si H no es de Hilbert).

Viceversa, si $\overline{M} = \{0\}$, entonces

$$\overline{M} = M^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H,$$

esto es, M es denso en H . $\square$

Teorema 2.2.7. (Riesz) Si H es un espacio de Hilbert, entonces para cada $f \in H'$ existe un único vector $y_f \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle,$$

para todo $x \in H$. Además, $\|f\| = \|y_f\|$.

Demostración. La unicidad del elemento y_f , para $f \in H$, dado, es evidente.

Sea $M = \ker(f)$. Si $M = H$, entonces es suficiente tomar $y_f = 0$.

Supongamos, pues, que $M \neq H$. Entonces, M es un subespacio (hiperplano) cerrado de H , luego $H = M \oplus M^\perp$. Fijemos $z \in M^\perp \setminus \{0\}$; nótese que $M^\perp = [z]$.

Si $x \in H$, entonces

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(z)} z \right) + \frac{f(x)}{f(z)} z \in M \oplus M^\perp.$$

También, como

$$x = \left(x - \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} z \right) + \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} z,$$

$$\frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} z \in M^\perp, \text{ y, } \left(x - \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} z \right) \in [z]^\perp = M^{\perp\perp} = M,$$

usando la unicidad de la descomposición de todo elemento de H como suma de un elemento de M con un elemento de $M^\perp$, resulta que

$$\frac{f(x)}{f(z)} z = \frac{\langle x, z \rangle}{\|z\|^2} z,$$

de donde

$$f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z \right\rangle,$$

para todo $x \in H$. Por lo tanto, es suficiente tomar $y_f = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$.

Ahora bien,

$$\|y_f\| = \frac{|f(z)|}{\|z\|^2} \|z\| = \frac{|f(z)|}{\|z\|} \leq \|f\|.$$

También, para todo $x \in H$,

$$|f(x)| = |\langle x, y_f \rangle| \leq \|x\| \|y_f\|,$$

de donde $\|f\| = \|y_f\|$. Esto completa la demostración del teorema. $\square$

Corolario 2.2.1. *Todo espacio de Hilbert H es isométricamente antiisomorfo a su dual H' . Más exactamente, la aplicación*

$$f \in H' \xrightarrow{\phi} y_f \in H,$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $\|\phi(f)\| = \|f\|$.
2. $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$.
3. $\phi(\alpha f) = \bar{\alpha}\phi(f)$.

Corolario 2.2.2. *El espacio dual H' de un espacio de Hilbert H es un espacio de Hilbert. Además, todo espacio de Hilbert H es reflexivo.*

Demostración. Sea ϕ como en el corolario 2,2,1 anterior. Se define en H' el siguiente producto interno: Si $f \in H'$, $g \in H'$, entonces

$$\langle f, g \rangle = \langle \phi(g), \phi(f) \rangle.$$

Con este producto interno, H' es un espacio de Hilbert.

Demostremos ahora que H es reflexivo. Sea $x'' \in H''$; entonces, existe $f \in H'$ tal que

$$x''(g) = \langle g, f \rangle,$$

para toda $g \in H'$. Ahora bien,

$$x''(g) = \langle g, f \rangle = \langle y_f, y_g \rangle = g(y_f),$$

para toda $g \in H'$. $\square$

El teorema de Riesz no es válido sin la hipótesis de que el espacio H sea completo, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. Sea $H = C[0, 1]$ el espacio de las funciones complejas continuas en el intervalo $[0, 1]$, dotado del producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Este espacio no es completo (ejemplo 2,1,2). Fijemos $a \in (0, 1)$. La forma lineal $T : f \mapsto T(f) = \int_a^1 f(t)dt$ es continua sobre H , pues, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, vemos que $|T(f)| \leq \int_a^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$, para todo $f \in H$.

Por otra parte, no puede existir ninguna función g continua sobre $[0, 1]$, tal que se tenga $T(f) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ para toda $f \in C[0, 1]$. En efecto, es un ejercicio de cálculo elemental demostrar que para una tal función g se debería tener $g(t) \equiv 0$ en $(0, a)$, y, $g(t) \equiv 1$ en $(a, 1)$, lo que es absurdo.

Ya que el espacio dual H' de todo espacio de Hilbert H se identifica, por medio del producto interno, al propio espacio H , se tiene la siguiente definición.

Definición 2.2.5. Se dice que una sucesión (x_n) en un espacio de Hilbert H converge débilmente a $x \in H$, cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $y \in H$.

Ejercicios de la sección 2.2

1. Sean H un espacio de Hilbert, M y N subespacios cerrados de H con $M \perp N$, y $G = M + N$. Demostrar que G es cerrado en H .
2. Para n entero ≥ 0 , sea $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n]$ (n-ésimo polinomio de Legendre). Demostrar que las funciones $\sqrt{n + \frac{1}{2}} P_n$ forman un sistema ortonormal completo en $L^2[-1, 1]$.
3. Sean H un espacio con producto interno, y, $\{x, y, z\} \subset H$ con $\|x\| = \|y\| = \|z\|$. Demostrar que
$$|\langle x, x \rangle \langle z, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle z, x \rangle|^2 \leq \{ \langle x, x \rangle^2 - |\langle y, x \rangle|^2 \} \{ \langle x, x \rangle^2 - |\langle z, x \rangle|^2 \}$$

Sugerencia: Reducir el problema al caso $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, reducir a un problema en $\mathbb{K}^3$.

4. Sean H un espacio de Hilbert separable, (x_n) una base ortonormal de H , y, (y_n) una sucesión en H tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1.$$

Demostrar que si $z \perp y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $z = 0$.

Sugerencia: Usar la identidad de Parseval.

5. Sean H un espacio de Hilbert separable, (e_n) una base ortonormal de H , y, (f_n) un sistema ortonormal en H tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

Demostrar que (f_n) también es una base ortonormal de H .

Sugerencia: Sea $f_0 \perp f_n$, para $n \geq 1$. Demostrar que si se escoge $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|e_n - f_n\|^2 < 1,$$

entonces el conjunto $\{e_1, \dots, e_m, f_{m+1}, \dots, f_n, \dots\}$ es total en E (observar la solución del ejercicio anterior). Deducir que el conjunto $\{f_0, f_1, \dots, f_m\}$ es linealmente dependiente, y por lo tanto, que $f_0 = 0$.

6. Sea H un espacio de Hilbert, $K \neq \emptyset$ un subconjunto convexo cerrado de H , y, $x_0 \in H$, $x_0 \notin K$. Demostrar que existe un único punto $x_1 \in K$ tal que

$$\|x_0 - x_1\| = \inf \{\|x_0 - y\|; y \in K\}.$$

Sugerencia: Usar la ley del paralelogramo.

7. Suponga que en el ejercicio anterior $K = M$ es un subespacio cerrado de H . Demostrar que $(x_0 - x_1) \in M^\perp$. Concluir que $H = M \oplus M^\perp$.

Sugerencia: Sea $x = x_0 - x_1$. Demostrar que

$$\|x\| \leq \|x + y\|,$$

para todo $y \in M$. En particular, si $y \in M$, $y \neq 0$, entonces

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Escoger convenientemente $\lambda \in \mathbb{K}$ para mostrar que $\langle x, y \rangle = 0$.

8. Sean H un espacio de Hilbert, M un subespacio cerrado de H , y, $f \in M'$ una forma lineal continua sobre M . Demostrar que existe una *única* forma lineal continua $g \in H'$ tal que $g \subset f$, y, $\|g\| = \|f\|$.
9. Sean H un espacio de Hilbert, y, (x_n) una sucesión en H tal que
 - a) $x_n \rightharpoonup x$.
 - b) $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Demostrar que $x_n \rightarrow x$ en H .
10. Sea H un espacio de Hilbert. Demostrar que si $x_n \rightharpoonup x$, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que la sucesión $(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_{n_k})$ converge al mismo punto x en H .
11. Sea (x_n) una sucesión en un espacio de Hilbert H tal que para todo $y \in H$, la sucesión $(\langle x_n, y \rangle)$ es convergente. Demostrar que existe $x \in H$ tal que $x_n \rightarrow x$.
Deducir que todo espacio de Hilbert es *débilmente secuencialmente completo*.
12. Demostrar que en todo espacio de Hilbert H la bola unitaria cerrada $B = \{x \in H; \|x\| \leq 1\}$ es *débilmente secuencialmente compacta*, esto es, toda sucesión en B posee una subsucesión débilmente convergente a algún punto de B .
Sugerencia: Sean (x_n) una sucesión en B , y, $M = \overline{[(x_n)]}$. Entonces, M es separable. Sea (z_n) una sucesión densa en M . Demostrar que existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que la sucesión numérica $(\langle x_{n_k}, z_n \rangle)_k$ es convergente, para cada $n \in \mathbb{N}$. Concluir que $(\langle x_{n_k}, y \rangle)_k$ es convergente, para cada $y \in M$. Usar el ejercicio 2,2,11.

2.3. Operadores continuos - Convergencia de operadores

Definición 2.3.1. Un *álgebra de Banach* es un espacio de Banach E en el cual está definida una operación de multiplicación,

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x.y \in E,$$

tal que $(E, +, \cdot)$ es un álgebra y

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|,$$

cualesquiera que sean $x, y \in E$.

Además, si existe $e \in E$ tal que $e \cdot x = x = x \cdot e$ para todo $x \in E$ y E es no trivial, entonces se dice que E es un álgebra de Banach con elemento unidad e . En este caso, $\|e\| \geq 1$.

Si E es un álgebra de Banach con elemento unidad e , entonces la nueva norma $\|\cdot\|_1$ en E definida por

$$\|x\|_1 = \sup \{ \|xy\|; y \in E, \|y\| = 1 \},$$

es equivalente a la norma original de E . Además, $\|e\|_1 = 1$.

Proposición 2.3.1. *Si E es un espacio de Banach, entonces $L(E)$, el espacio de los operadores lineales continuos en E , es una álgebra de Banach con elemento unidad, siendo la multiplicación definida por la composición de operadores:*

$$(T_1, T_2) \in L(E) \times L(E) \longmapsto T_1 T_2 = T_1 \circ T_2 \in L(E).$$

El elemento unidad en el álgebra $L(E)$ es el operador identidad $I \in L(E)$.

Proposición 2.3.2. *(y Definición) Sea H un espacio de Hilbert. Para cada $T \in L(H)$ existe un único operador $T^* \in L(H)$ tal que*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$.

El operador $T^ \in L(H)$ se llama operador adjunto de T .*

Demostración. Demostremos la existencia del operador T^* , siendo que su unicidad es inmediata. Para $y \in H$ fijo, la función

$$x \in H \longmapsto \langle T(x), y \rangle \in \mathbb{K}$$

es una función lineal continua en H , luego, por el teorema de Riesz, existe un único vector $T^*(y) \in H$ tal que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle,$$

para todo $x \in H$. La aplicación

$$T^* : y \in H \longrightarrow T^*(y) \in H,$$

es lineal. Además, T^* es continua, pues del teorema de Riesz también se tiene que

$$\begin{aligned} \|T^*(y)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T(x), y \rangle| \leq \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \\ &= \|T\| \|y\|. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $T^* \in L(H)$ y $\|T^*\| \leq \|T\|$. $\square$

Proposición 2.3.3. *La aplicación*

$$T \in L(H) \longmapsto T^* \in L(H),$$

tiene las siguientes propiedades:

1. $T^{**} = T$.
2. $\|T^*\| = \|T\|$.
3. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
4. $(ST)^* = T^*S^*$.
5. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$
6. $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Las cinco primeras propiedades nos dicen que la aplicación

$$T \in L(H) \longmapsto T^* \in L(H),$$

es un anti-automorfismo isométrico e involutivo del álgebra de Banach $L(H)$.

Demostración.

1) Usando las definiciones, se tiene que

$$\langle x, T^{**}(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle = \overline{\langle y, T^*(x) \rangle} = \langle x, T(y) \rangle,$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$. Por consiguiente, $T^{**} = T$.

2) Por la proposición 2,2,2, se tiene que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Usando la misma proposición, resulta que

$$\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|,$$

de donde $\|T^*\| = \|T\|$.

6) Por 2), se tiene que

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

Ahora bien,

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle T^*T(x), x \rangle \leq \|T^*T\| \|x\|^2,$$

cualquiera que sea $x \in H$. Se sigue que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$ de donde $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Las propiedades 3), 4), 5), son de verificación inmediata. $\square$

Proposición 2.3.4. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$, un operador lineal continuo en H . Entonces,

1. $N(T) = R(T^*)^\perp$, y
2. $N(T^*) = R(T)^\perp$.

Demostración. Solamente mostraremos la parte 1), siendo que 2) es análoga.

Sea $x \in N(T)$. Si $z = T^*(y) \in R(T^*)$, $y \in H$, entonces

$$\langle x, z \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle = 0,$$

de donde $x \in R(T^*)^\perp$. Por consiguiente, $N(T) \subset R(T^*)^\perp$.

Viceversa, si $x \in R(T^*)^\perp$, entonces

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle = 0,$$

para todo $y \in H$. Por consiguiente, $T(x) = 0$, esto es, $x \in N(T)$. Se sigue que $R(T^*)^\perp \subset N(T)$ y por lo tanto, $N(T) = R(T^*)^\perp$, lo que queríamos demostrar. $\square$

Corolario 2.3.1. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. Entonces,

1. T es inyectivo si y sólo si $\overline{T^*(H)} = H$.

2. T^* es inyectivo si y sólo si $\overline{T(H)} = H$.

Proposición 2.3.5. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $T \in L(H)$ es invertible si y sólo si su adjunto $T^* \in L(H)$ también lo es. En este caso,

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

Demostración. Es suficiente demostrar que si T es invertible, entonces T^* también es invertible, pues $T^{**} = T$.

Si T es invertible, entonces $T(H) = H$, luego (por el corolario de la proposición 2,3,4) T^* es inyectivo.

Por otra parte,

$$\langle T^* (T^{-1})^* (x), y \rangle = \langle (T^{-1})^* (x), T(y) \rangle = \langle x, (T^{-1}T)(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$. Por consiguiente, $T^* (T^{-1})^* = I$, de donde T^* posee inverso a la derecha, esto es T^* es sobreyectivo. Por consiguiente, T^* es una biyección continua, luego $T^* \in L(H)$ es un isomorfismo, esto es, T^* es invertible en $L(H)$. Además, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. $\square$

Definición 2.3.2. Sean H un espacio de Hilbert, (T_n) una sucesión en $L(H)$, y, $T \in L(H)$. Entonces,

1. Se dice que (T_n) converge *débilmente* a T (en el sentido de operadores), lo cual se denota $T_n \rightharpoonup T$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n(x), y \rangle = \langle T(x), y \rangle,$$

para todo $x \in H$.

2. Se dice que (T_n) converge *fuertemente* a T , lo cual se denota $T_n \rightarrow T$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0,$$

para todo $x \in H$

3. Se dice que (T_n) converge *uniformemente* a T , lo cual se denota $T_n \Rightarrow T$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Se tiene que la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte, y que esta última implica la convergencia débil.

En general, las recíprocas de estas implicaciones no son verdaderas (ejemplo 1,7,3).

Lema 2.3.1. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, en $L(H)$, toda sucesión (T_n) débilmente convergente es acotada.*

Demostración. Sea $x \in H$ fijo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\phi_n^x : H \rightarrow \mathbb{K}$ la forma lineal continua definida por la formula

$$\phi_n^x(y) = \langle y, T_n(x) \rangle.$$

Como (T_n) es una sucesión débilmente convergente en $L(H)$, entonces (ϕ_n^x) es una sucesión de formas lineales continuas, puntualmente acotada, esto es, para cada $y \in H$ existe una constante $\alpha(x, y) > 0$ tal que

$$|\phi_n^x(y)| \leq \alpha(x, y),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema de Banach-Steinhaus, existe una constante $\alpha(x) > 0$ tal que

$$\|\phi_n^x\| \leq \alpha(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente,

$$\|T_n(x)\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle T_n(x), y \rangle| = \|\phi_n^x\| \leq \alpha(x),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se sigue, por el mismo teorema, que existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|T_n\| \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que queríamos demostrar. $\square$

Proposición 2.3.6. *Sean H un espacio de Hilbert, (T_n) y (S_n) sucesiones en $L(H)$, $T \in L(H)$ y $S \in L(H)$ dos operadores. Se tiene:*

1. Si $T_n \rightarrow T$, y , $S_n \rightarrow S$, entonces $T_n S_n \rightarrow TS$.
2. Si $T_n \rightarrow T$, y , $S_n \rightarrow S$, entonces $T_n S_n \rightarrow TS$.
3. Si $T_n \Rightarrow T$, y , $S_n \Rightarrow S$, entonces $T_n S_n \Rightarrow TS$.

Demostración. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente identidad:

$$T_n S_n - TS = T_n(S_n - S) + (T_n - T)S \quad (*)$$

1. Como $T_n \longrightarrow T$, por el lema 2,3,1 existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|T_n\| \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, teniendo en cuenta la identidad (*), se obtiene que

$$|\langle T_n S_n(x), y \rangle - \langle TS(x), y \rangle| \leq \alpha \|y\| \|(S_n - S)(x)\| + |\langle (T_n - T)(S(x)), y \rangle|,$$

de donde, por hipótesis, se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n S_n(x), y \rangle = \langle TS(x), y \rangle,$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$, esto es, $T_n S_n \longrightarrow TS$.

2. Por (*), se tiene que

$$\|T_n S_n(x) - TS(x)\| \leq \alpha \|S_n(x) - S(x)\| + \|T(S(x)) - T_n(S(x))\|,$$

para todo $x \in H$, en donde α es como en 1). Por lo tanto, de la hipótesis se sigue que $T_n S_n \longrightarrow TS$.

3. Nuevamente, por (*), resulta que

$$\|T_n S_n - TS\| \leq \alpha \|T_n - T\| + \|S\| \|S_n - S\|,$$

de donde obtenemos que $T_n S_n \Longrightarrow TS$. $\square$

Proposición 2.3.7. Sean H un espacio de Hilbert, (T_n) una sucesión en $L(H)$, $y, T \in L(H)$. Se tiene:

1. Si $T_n \longrightarrow T$, entonces $T_n^* \longrightarrow T^*$.
2. Si $T_n \Longrightarrow T$, entonces $T_n^* \Longrightarrow T^*$.

La demostración de esta proposición es sencilla y se deja al lector como ejercicio.

Ejemplo 2.3.1. En general, la convergencia fuerte de una sucesión (T_n) hacia un operador T no implica la convergencia fuerte de la sucesión de sus adjuntos (T_n^*) hacia el operador adjunto T^* de T . En efecto, sean $H = \ell^2$, $T_n \in L(\ell^2)$, $n \in \mathbb{N}$, definido por

$$T_n(x) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots),$$

si $x = (x_k) \in \ell^2$, y $T \equiv 0$ el operador idénticamente nulo. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el operador adjunto $T_n^* \in L(\ell^2)$ de T_n está dado por

$$T_n^*(y) = (0, 0, \dots, \underset{n}{0}, y_1, y_2, \dots),$$

si $y = (y_k) \in \ell^2$. Por consiguiente,

$$T_n \longrightarrow 0, \text{ y } T_n^* \not\longrightarrow 0.$$

Nótese que en este ejemplo también se tiene que

$$T_n \longrightarrow 0, \quad T_n^* \longrightarrow 0,$$

pero,

$$T_n T_n^* = I;$$

(compare con la proposición 2,3,6, parte 1)

Ejercicios de la sección 2.3

1. Sea E un espacio de Banach.
 - a) Demostrar que para todo $T \in L(E)$ con $\|T\| < 1$, el operador $(I - T)$ es invertible en $L(E)$.
 - b) Demostrar que el conjunto de los operadores invertibles es abierto en el álgebra de Banach $L(E)$.
2. Demostrar que si H es un espacio de Hilbert y T es un operador lineal en H tal que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$, entonces T es continuo.

3. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in L(H)$ un operador lineal continuo en H , (z_n) un sistema enumerable ortonormal en H , y (λ_n) una sucesión en $\mathbb{K}$ tal que $T^*(z_n) = \lambda_n z_n$, $n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, z_n \rangle| < \infty,$$

para cualquier $y \in T(H)$.

4. Sean H un espacio de Hilbert separable, y (e_j) una base ortonormal de H . Entonces, a cada $T \in L(H)$ se le asocia una matriz infinita $A_T = (a_{ij})$, en donde $a_{ij} = \langle T(e_i), e_j \rangle$.

Demstrar que para una matriz infinita $A = (a_{ij})$ represente un operador en $L(H)$:

- a) Es necesario que para todo $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$, y, para todo $j \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$.
- b) Es suficiente que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty$.
- c) Las condiciones de la parte a) no son suficientes.
- d) La condición en b) no es necesaria.

2.4. Operadores hermitianos, normales y unitarios.

En esta sección, la letra H denotará un espacio de Hilbert.

Definición 2.4.1. Se dice que un operador $T \in L(H)$ es hermitiano (simétrico o autoadjunto), si $T^* = T$.

Proposición 2.4.1. Si H es un espacio de Hilbert complejo, entonces un operador T en $L(H)$ es hermitiano si y sólo si $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in H$.

Demostración. Es inmediato que si T es hermitiano, entonces $\langle T(x), x \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in H$.

Recíprocamente, supongamos que $\langle T(x), x \rangle$ sea real para todo $x \in H$. Entonces,

$$\underbrace{\langle T(x+y), x+y \rangle}_{\in \mathbb{R}} = \underbrace{\langle T(x), x \rangle}_{\in \mathbb{R}} + \langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle + \underbrace{\langle T(y), y \rangle}_{\in \mathbb{R}}$$

por consiguiente,

$$\langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle = \overline{\langle T(x), y \rangle + \langle T(y), x \rangle} = \overline{\langle T(x), y \rangle} + \overline{\langle T(y), x \rangle},$$

o sea,

$$\langle T(x), y \rangle - \overline{\langle T(x), y \rangle} = -\langle T(y), x \rangle + \overline{\langle T(y), x \rangle} \quad (1)$$

También,

$$\langle T(x + iy), x + iy \rangle = \langle T(x), x \rangle - i \langle T(x), y \rangle + i \langle T(y), x \rangle + \langle T(y), y \rangle,$$

luego,

$$-i \langle T(x), y \rangle + i \langle T(y), x \rangle = \overline{-i \langle T(x), y \rangle + i \langle T(y), x \rangle} = i \overline{\langle T(x), y \rangle} - i \overline{\langle T(y), x \rangle},$$

de donde

$$\langle T(x), y \rangle + \overline{\langle T(x), y \rangle} = \langle T(y), x \rangle + \overline{\langle T(y), x \rangle}. \quad (2)$$

Sumando (1) y (2), resulta que

$$\langle T(x), y \rangle = \overline{\langle T(y), x \rangle} = \langle x, T(y) \rangle,$$

cualesquiera que sean $x \in H$, $y \in H$. Por consiguiente, $T^* = T$. $\square$

NOTA: El término *hermitiano* se usa únicamente para operadores continuos. En el caso de operadores no continuos, los términos *simétrico* y *autoadjunto* tienen significados diferentes.

Proposición 2.4.2. Si $T \in L(H)$ es hermitiano, entonces

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle|.$$

Demostración. Sea $\alpha = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle|$. Como $|\langle T(x), x \rangle| \leq \|T\| \|x\|^2$, para todo $x \in H$, entonces $\alpha \leq \|T\|$.

Por otra parte,

$$|\langle T(y), y \rangle| \leq \alpha \|y\|^2, \quad (3)$$

para todo $y \in H$.

Ahora bien, teniendo en cuenta (3), para todo $\lambda > 0$ y todo $x \in H$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \left\langle T\left(\lambda x + \frac{1}{\lambda} T(x)\right), \lambda x + \frac{1}{\lambda} T(x) \right\rangle - \left\langle T\left(\lambda x - \frac{1}{\lambda} T(x)\right), \lambda x - \frac{1}{\lambda} T(x) \right\rangle \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left\{ \alpha \left\| \lambda x + \frac{1}{\lambda} T(x) \right\|^2 + \alpha \left\| \lambda x - \frac{1}{\lambda} T(x) \right\|^2 \right\} = \\ &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \lambda^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|T(x)\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $T(x) \neq 0$, y, $\lambda^2 = \frac{\|T(x)\|^2}{\|x\|^2}$, entonces resulta que

$$\|T(x)\|^2 \leq \alpha \|T(x)\| \|x\|,$$

luego, $\|T(x)\| \leq \alpha \|x\|$, para todo $x \in H$, esto es, $\|T\| \leq \alpha$, de donde $\alpha = \|T\|$, lo que queríamos demostrar. $\square$

Observación 2.4.1. Si T no es hermitiano, la proposición anterior no es válida, en general. En efecto, sean $H = \mathbb{R}^2$, y, $T \in L(\mathbb{R}^2)$ el operador de rotación $\frac{\pi}{2}$. Entonces, $\|T\| = 1$ y $\langle T(x), x \rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Definición 2.4.2.

1. Se dice que un operador $T \in L(H)$ es *positivo*, lo cual se denota $T \geq 0$, cuando,
 - a) T es hermitiano, y
 - b) $\langle T(x), x \rangle \geq 0$, para todo $x \in H$.
2. Si $S \in L(H)$ y $T \in L(H)$ son dos operadores hermitianos, entonces se dice que S es *mayor o igual* que T , lo cual se denota $S \geq T$, cuando $(S - T) \geq 0$, esto es, si $\langle S(x), x \rangle \geq \langle T(x), x \rangle$, para todo $x \in H$.
3. Si $T \in L(H)$ es hermitiano, entonces los números

$$M = \sup_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle, \text{ y } m = \inf_{\|x\|=1} \langle T(x), x \rangle,$$

se llaman *supremo* de T e *ínfimo* de T , respectivamente.

Observación 2.4.2.

1. Sean $T \in L(H)$ hermitiano, M y m como en la definición. Entonces, M (resp. m) es el menor número real (resp. el mayor número real) tal que

$$mI \leq T \leq MI.$$

Además, como $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle|$, entonces

$$\|T\| = \max \{|M|, |m|\}$$

(ejercicio 2,4,2).

2. La relación $\geq$ es un orden parcial en el conjunto de los operadores hermitianos de $L(H)$. Además, si $T_1 \geq 0$, $T_2 \geq 0$ y $\alpha \geq 0$, entonces $T_1 + T_2 \geq 0$, y, $\alpha T_2 \geq 0$.
3. Si $T \in L(H)$ es un operador hermitiano, entonces $T^2 \geq 0$. Además,

$$0 \leq T \leq I \implies 0 \leq T^2 \leq I.$$

4. Si $T \in L(H)$ es un operador hermitiano invertible, entonces el operador inverso T^{-1} también es hermitiano (proposición 2,3,5).

Proposición 2.4.3. *El producto de dos operadores hermitianos es hermitiano si y sólo si los operadores conmutan.*

Corolario 2.4.1. *Si $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ es un polinomio con coeficientes reales y si $T \in L(H)$ es un operador hermitiano, entonces $p(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$ es un operador hermitiano.*

Proposición 2.4.4. *Si $S \in L(H)$ es límite fuerte de una sucesión $(S_n) \subset L(H)$, y si un operador dado $T \in L(H)$ conmuta con todos los operadores S_n , $n \in \mathbb{N}$, entonces T conmuta con S .*

Demostración. Como

$$ST - TS = (S - S_n)T + T(S_n - S),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|(ST - TS)(x)\| \leq \|(S - S_n)(T(x))\| + \|T\| \|(S_n - S)(x)\|,$$

de donde $(ST - TS)(x) = 0$, para todo $x \in H$, ya que $S_n \rightarrow S$. $\square$

Proposición 2.4.5. *Si $T \in L(H)$ es un operador positivo, entonces*

$$|\langle T(x), y \rangle|^2 \leq \langle T(x), x \rangle \langle T(y), y \rangle, \quad (4)$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$.

Demostración. Sean $x \in H$, $y \in H$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle T(x + \lambda \langle T(x), y \rangle y), x + \lambda \langle Tx, y \rangle y \rangle = \\ &= \langle T(x), x \rangle + 2\lambda |\langle T(x), y \rangle|^2 + \lambda^2 |\langle T(x), y \rangle|^2 \langle T(y), y \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Ahora bien, si $a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $b^2 - 4ac \leq 0$. Aplicando esto al polinomio de segundo grado en λ del lado derecho de (5), se obtiene la desigualdad (4). $\square$

Proposición 2.4.6. *Toda sucesión monótona acotada (T_n) de operadores lineales hermitianos es fuertemente convergente hacia algún operador hermitiano $T \in L(H)$.*

Demostración.

1. Supongamos que (T_n) es una sucesión monótona no decreciente de operadores lineales positivos, acotada por el operador identidad I :

$$0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq \dots \leq I.$$

Para $n > m$, sea

$$T_{mn} = T_n - T_m.$$

Como $0 \leq T_n \leq I$, para todo n , entonces

$$I - T_{mn} = I - T_n + T_m \geq I - T_n \geq 0,$$

luego $T_{mn} \leq I$, de donde $\|T_{mn}\| \leq 1$. Por lo tanto, usando la desigualdad (4), se obtiene que para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T_m(x)\|^4 &= \|T_{mn}(x)\|^4 = \\ &= \langle T_{mn}(x), T_{mn}(x) \rangle^2 = \\ &= \langle T_{mn}(T_{mn}(x)), x \rangle^2 \leq \\ &\leq \langle T_{mn}^2(x), T_{mn}(x) \rangle \langle T_{mn}(x), x \rangle \leq \\ &\leq \|T_{mn}\|^2 \|T_{mn}\| \|x\|^2 \langle T_{mn}(x), x \rangle \leq \\ &\leq \{ \langle T_n(x), x \rangle - \langle T_m(x), x \rangle \} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Por simetría, si $m > n$, entonces

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|^4 \leq \{ \langle T_m(x), x \rangle - \langle T_n(x), x \rangle \} \|x\|^2.$$

Por consiguiente,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|^4 \leq |\langle T_n(x), x \rangle - \langle T_m(x), x \rangle| \|x\|^2, \quad (6)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $x \in H$. Ahora bien, para cada $x \in H$, la sucesión numérica $(\langle T_n(x), x \rangle)$ es no decreciente y acotada, luego convergente, de donde, en virtud de (6), resulta que $(T_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en H , luego convergente. Se sigue que el operador

$$T : x \in H \mapsto T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \in H$$

es lineal, continuo y hermitiano, y por la propia definición, $T_n \longrightarrow T$.

2. Hagamos ahora el caso general.

- a) Si (T_n) es una sucesión no decreciente de operadores hermitianos, acotada por algún operador $A \in L(H)$,

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq \dots \leq A,$$

entonces

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots \leq I,$$

en donde

$$S_n = \frac{T_n - T_1}{\|A - T_1\|}.$$

Por consiguiente, por la parte 1), existe $S \in L(H)$ operador hermitiano tal que $S_n \longrightarrow S$, luego, $T_n \longrightarrow T$, en donde $T = T_1 + \|A - T_1\|S$.

- b) Finalmente, si (T_n) es una sucesión de operadores hermitianos tal que

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n \geq \dots \geq A,$$

para algún $A \in L(H)$, entonces

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots \leq I,$$

en donde

$$S_n = \frac{T_1 - T_n}{\|T_1 - A\|}$$

Análogamente como en a) se ve que existe $T \in L(H)$ hermitiano, tal que $T_n \longrightarrow T$. $\square$

Teorema 2.4.1. *Todo operador positivo $T \in L(H)$ tiene una única raíz cuadrada positiva $T^{\frac{1}{2}} \in L(H)$, la cual es límite fuerte de polinomios en T con coeficientes reales, y por lo tanto conmuta con cualquier operador que conmute con T .*

Demostración.

1. *Existencia:* Se puede suponer que $0 \leq T \leq I$, pues de lo contrario se toma $S = \frac{T}{\|T\|}$.

Sea $A = I - T$; si Y es un operador que verifique la relación: $Y = \frac{1}{2}(A + Y^2)$, poniendo $X = I - Y$, tendremos

$$X^2 = (I - Y)^2 = I - 2Y + Y^2 = I - A = T,$$

de donde X será el operador buscado. Por consiguiente, es suficiente mostrar la existencia de un tal operador Y . Para esto, se define inductivamente la sucesión de operadores siguiente:

$$Y_0 = 0, \quad Y_{n+1} = \frac{1}{2}(A + Y_n^2) \quad \text{para } n \geq 0.$$

Entonces,

- a) Se muestra, por inducción, que cada operador Y_n , $n \geq 0$, es un polinomio en A con coeficientes reales positivos, de donde $Y_{n+1} - Y_n$, $n \geq 0$, también es un polinomio en A con coeficientes reales no negativos, pues

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}),$$

ya que $Y_n Y_{n-1} = Y_{n-1} Y_n$.

- b) Demostremos que

$$0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n \leq \dots \leq I.$$

Como $A = I - T$ es hermitiano, entonces

$$\langle A^{2n}(x), x \rangle = \langle A^n(x), A^n(x) \rangle \geq 0,$$

para todo $x \in H$ y todo $n \geq 0$; también, como $A \geq 0$ (pues $T \leq I$), entonces

$$\langle A^{2n+1}(x), x \rangle = \langle A(A^n(x)), A^n(x) \rangle \geq 0.$$

Por consiguiente, $A^n \geq 0$, para todo $n \geq 0$, y siendo Y_n , $n \geq 0$, un polinomio en A con coeficientes reales positivos, entonces, $Y_n \geq 0$, para todo $n \geq 0$. Análogamente, ya que $Y_{n+1} - Y_n$, $n \geq 0$, es un polinomio en A con coeficientes reales no negativos, entonces $Y_{n+1} - Y_n \geq 0$, esto es, $Y_{n+1} \geq Y_n$, para todo $n \geq 0$. Ahora bien, $Y_0 = 0 \leq I$. Supongamos que $Y_{n-1} \leq I$, en donde $n \geq 1$. Entonces,

$$Y_n = \frac{1}{2} (A + Y_{n-1}^2) \leq \frac{1}{2} (I + I) = I.$$

Por consiguiente, $Y_n \leq I$, para todo $n \geq 0$, y queda demostrada la afirmación b).

Así, $(Y_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión monótona (no decreciente) acotada de operadores hermitianos, luego, por la proposición 2.4.6 anterior, existe un operador hermitiano $Y \in L(H)$ tal que $Y_n \rightarrow Y$. Además, por la proposición 2.3.6.2, también $Y_n^2 \rightarrow Y^2$. Por lo tanto, ya que

$$\begin{aligned} & \left\| Y(x) - \frac{1}{2} (A(x) + Y^2(x)) \right\| \leq \\ & \leq \|Y(x) - Y_{n+1}(x)\| + \left\| Y_{n+1}(x) - \frac{1}{2} (A(x) + Y^2(x)) \right\| = \\ & = \|Y(x) - Y_{n+1}(x)\| + \left\| \frac{1}{2} (A(x) + Y_n^2(x)) - \frac{1}{2} (A(x) + Y^2(x)) \right\| = \\ & = \|Y(x) - Y_{n+1}(x)\| + \frac{1}{2} \|Y_n^2(x) - Y^2(x)\|, \end{aligned}$$

nos resulta

$$Y(x) = \frac{1}{2} (A(x) + Y^2(x)),$$

para todo $x \in H$, esto es, $Y = \frac{1}{2} (A + Y^2)$.

Finalmente, como $0 \leq Y_n \leq I$, y, $Y_n \rightarrow Y$, entonces $0 \leq Y \leq I$. Por consiguiente, si $X = I - Y$, entonces $0 \leq X \leq I$. Además, X es límite fuerte de polinomios en T con coeficientes reales (pues así lo es Y).

2. *Unicidad:* Sea X la raíz cuadrada positiva de T construída por el procedimiento anterior, y sea X_1 otra raíz cuadrada positiva de T .

Sean Z y Z_1 , a su vez, raíces cuadradas (positivas) de X y X_1 , respectivamente. Tenemos que

$$X_1 T = X_1 X_1^2 = X_1^2 X_1 = T X_1,$$

luego

$$X_1 X = X X_1,$$

pues X es límite fuerte de polinomios en T .

Sea $x \in H$ cualquiera, pero fijo. Demostremos que si $y = (X - X_1)(x)$, entonces $y = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|Z(y)\|^2 + \|Z_1(y)\|^2 &= \langle Z(y), Z(y) \rangle + \langle Z_1(y), Z_1(y) \rangle = \\ &= \langle Z^2(y), y \rangle + \langle Z_1^2(y), y \rangle = \\ &= \langle (X + X_1)(y), y \rangle = \\ &= \langle (X + X_1)(X - X_1)(x), y \rangle = \\ &= \langle (X^2 - X_1^2)(x), y \rangle = \\ &= 0, \end{aligned}$$

luego $Z(y) = Z_1(y) = 0$, de donde

$$X(y) = Z^2(y) = 0 = Z_1^2(y) = X_1(y).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \|y\|^2 = \|(X - X_1)(x)\|^2 &= \langle (X - X_1)(x), (X - X_1)(x) \rangle = \\ &= \langle (X - X_1)(x), y \rangle = \\ &= \langle x, (X - X_1)(y) \rangle = \\ &= 0, \end{aligned}$$

esto es, $y = 0$, o sea $X(x) = X_1(x)$, cualquiera que sea $x \in H$. Por consiguiente, $X = X_1$. Esto completa la demostración del teorema.

□

Definición 2.4.3. Se dice que un operador $T \in L(H)$ es *normal* si $T^*T = TT^*$.

Proposición 2.4.7. Si H es un espacio de Hilbert complejo, entonces todo operador $T \in L(H)$ se representa de manera única en la forma

$$T = A + iB,$$

en donde A y B son operadores hermitianos.

Además, T es normal si y sólo si $AB = BA$.

Demostración. Es suficiente definir

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \text{ y, } B = \frac{1}{2i}(T - T^*). \quad (7)$$

Recíprocamente, si $T = A + iB$, con A y B hermitianos, entonces A y B son como en (7).

La segunda afirmación de sigue de la siguiente igualdad:
 $TT^* - T^*T = (A + iB)(A - iB) - (A - iB)(A + iB) = 2i(BA - AB)$. $\square$

Proposición 2.4.8. *Un operador $T \in L(H)$ es normal si y sólo si $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$, para todo $x \in H$.*

Demostración. Supongamos que T sea normal. Entonces

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x) \rangle = \langle T^*T(x), x \rangle = \langle T^*(x), T^*(x) \rangle = \|T^*(x)\|^2,$$

esto es, $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$, para cada $x \in H$.

Recíprocamente, si $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ para todo $x \in H$, entonces

$$\langle (T^*T - TT^*)(x), x \rangle = 0,$$

para todo $x \in H$, luego $T^*T - TT^* = 0$, por ser $(T^*T - TT^*)$ hermitiano (proposición 2,4,2), esto es, $T^*T = TT^*$. $\square$

Definición 2.4.4. Se dice que un operador $U \in L(H)$ es *unitario*, si U es invertible (en $L(H)$) y $U^{-1} = U^*$ (esto es, si $UU^* = U^*U = I$).

Proposición 2.4.9. *Un operador $U \in L(H)$ es unitario si y sólo si U es una isometría de H sobre H .*

Demostración. Si U es unitario, entonces

$$\|U(x)\|^2 = \langle U(x), U(x) \rangle = \langle U^*U(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2,$$

esto es, $\|U(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in H$. Por consiguiente, U es una isometría de H sobre H .

Recíprocamente, si U es una isometría de H sobre H , entonces U es invertible, y además ⁴

$$\langle x, y \rangle = \langle U(x), U(y) \rangle = \langle U^*U(x), y \rangle,$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$. Por consiguiente, $U^*U = I$. Se sigue que $U^{-1} = U^*$. $\square$

Se debe observar que existen isometrías T que son no sobreyectivas. En este caso, $T^*T = I$, pero $TT^* \neq I$. Por ejemplo, sean $H = \ell^2$ y $T \in L(\ell^2)$ el operador definido por

$$T(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

si $x = (x_n) \in \ell^2$. Entonces, el operador $T^* \in L(\ell^2)$ está dado por

$$T^*(y) = (y_2, y_3, \dots, y_n, \dots),$$

si $y = (y_n) \in \ell^2$. Se sigue que $\|T(x)\|_2 = \|x\|_2$, para todo $x \in \ell^2$. También, $T^*T = I$, pero $TT^* \neq I$.

Ejercicios de la sección 2.4

1. Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(H)$ tal que $\langle T(x), x \rangle = 0$, para todo $x \in H$. Demostrar que $T = 0$.
2. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in L(H)$ hermitiano, M y m como en la definición 2.4.2.3. Demostrar que

$$\|T\| = \max\{|M|, |m|\}$$

Sugerencia: Es claro que $M \leq \|T\|$ y que $m \leq \|T\|$. Ahora, como $\|T\| \geq -\langle T(x), x \rangle$ si $\|x\| \leq 1$, se sigue que $-m \leq \|T\|$ y $-M \leq \|T\|$. Por consiguiente, $|M| \leq \|T\|$, $|m| \leq \|T\|$, de donde, $\max\{|M|, |m|\} \leq \|T\|$. Para demostrar la desigualdad contraria, considerar separadamente los casos $m \geq 0$ y $m < 0$. También puede usarse la proposición 2.4.2.

⁴el que toda isometría conserve el producto interno es consecuencia de las identidades polares (Ejercicio 2.1.1).

3. Sea H un espacio de Hilbert.

- a) Demostrar que si $S \geq 0$, $T \geq 0$ y $ST = TS$, entonces $ST \geq 0$.
- b) Sean S , T_1 y T_2 tres operadores en H tales que $S \geq 0$, $T_1 \geq T_2$ y S conmuta con ambos operadores T_1 y T_2 . Demostrar que $ST_1 \geq ST_2$.

4. Sean H un espacio de Hilbert, $A \in L(H)$ y $B \in L(H)$ dos operadores en H . Demostrar que $0 \leq A \leq B$ implica que $0 \leq A^2 \leq B^2$, si A y B conmutan, pero no necesariamente si no conmutan.

5. Sea T un operador *normal* en un espacio de Hilbert H . Demostrar que T se puede expresar en la forma $T = UP$, en donde U es un operador unitario, P es un operador positivo y, U y P conmutan con todos los operadores continuos que conmuten con ambos operadores T y T^* (descomposición polar de T).

Sugerencia: Sea $P = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Definir $U_1 : R(P) \longrightarrow R(T)$ por la fórmula

$$U_1(P(x)) = T(x), \quad x \in H.$$

Demostrar que $R(T)^\perp = R(P)^\perp$. Extender U_1 a $U : H \longrightarrow H$.

6. Sea H un espacio de Hilbert

- a) Demostrar que un operador positivo $T \in L(H)$ es invertible si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $(T - \epsilon I) > 0$.
- b) Demostrar que un operador $T \in L(H)$ es invertible si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $(TT^* - \epsilon I) > 0$ y $(T^*T - \epsilon I) > 0$

2.5. Proyecciones ortogonales

Recordamos que un operador lineal $P : E \longrightarrow E$ en un espacio normado E es una proyección si $P^2 = P$.

Si H es un espacio del Hilbert y M es un subespacio cerrado de H , entonces $H = M \oplus M^\perp$, y los operadores

$$\begin{aligned} P : x = x_1 + x_2 \in M \oplus M^\perp &\longmapsto P(x) = x_1 \in M, \\ (I - P) : x = x_1 + x_2 \in M \oplus M^\perp &\longmapsto (I - P)(x) = x_2 \in M^\perp, \end{aligned}$$

son proyecciones continuas en H , llamadas las proyecciones ortogonales de H sobre M (a lo largo de $M^\perp$), y de H sobre $M^\perp$ (a lo largo de M), respectivamente. (Proposición 2,2,7).

A menos que se diga otra cosa explícitamente, en este párrafo H denotará un espacio de Hilbert.

Teorema 2.5.1. *Un operador $P \in L(H)$ es una proyección ortogonal si y sólo si*

1. $P^2 = P$, y
2. $P^* = P$.

Demostración.

1. Supongamos que $P \in L(H)$ es la proyección ortogonal de H sobre el subespacio M . Entonces, se sabe que $P^2 = P$. Demostremos que $P^* = P$. En efecto, como $P(H) \perp (I - P)(H)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle P^*(x), y \rangle &= \langle x, P(y) \rangle = \\ &= \langle (I - P)(x) + P(x), P(y) \rangle = \\ &= \langle P(x), P(y) \rangle = \\ &= \langle P(x), P(y) + (I - P)(y) \rangle = \\ &= \langle P(x), y \rangle, \end{aligned}$$

para todo $x \in H$ y todo $y \in H$. Por consiguiente, $P^* = P$.

2. Recíprocamente, supongamos que $P \in L(H)$ satisface las condiciones 1) y 2) del teorema. Entonces, $M = P(H)$ y $N(P)$ son subespacios cerrados de H (proposición 1,5,1,1). Además, por la proposición 2,3,4,1, como $P^* = P$, se tiene que

$$P^{-1}(0) = N(P) = R(P^*)^\perp = R(P)^\perp = M^\perp.$$

Por consiguiente, P es la proyección de H sobre M a lo largo de $M^\perp$, o sea, la proyección ortogonal de H sobre M . $\square$

Proposición 2.5.1. *Si P es una proyección ortogonal en H , entonces $0 \leq P \leq I$. Además, si $P \neq 0$, entonces $\|P\| = 1$.*

Demostración. Para cada $x \in H$, se tiene que

$$\langle P(x), x \rangle = \langle P(x), (I - P)(x) + P(x) \rangle = \langle P(x), P(x) \rangle \geq 0,$$

esto es, $P \geq 0$. También, como $(I - P)$ es proyección ortogonal, entonces $(I - P) \geq 0$ o sea $P \leq I$. Por consiguiente, $0 \leq P \leq I$.

Ahora bien, por la proposición 2,4,2 y como $0 \leq P \leq I$, se obtiene que

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle P(x), x \rangle \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, x \rangle \leq 1.$$

Por otra parte, si $y \in P(H)$ con $\|y\| = 1$, entonces

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \geq \|P(y)\| = \|y\| = 1.$$

Por consiguiente, $\|P\| = 1$. $\square$

En el resto de esta sección, la palabra *proyección* significa *proyección ortogonal*

Proposición 2.5.2. Sean M y N subespacios cerrados de H . Si P y Q son las proyecciones sobre M y N , respectivamente, y si $PQ = QP$, entonces PQ es la proyección sobre $M \cap N$.

Demostración.

1. PQ es una proyección, pues

$$a) (PQ)^2 = (PQ)(PQ) = P^2Q^2 = PQ.$$

$$b) (PQ)^* = Q^*P^* = QP = PQ.$$

2. Ya que $PQ(H) = P(N) \subset M$, y $PQ(H) = QP(H) = Q(M) \subset N$, entonces $PQ(H) \subset M \cap N$.

Por otra parte, $M \cap N \subset PQ(H)$, pues $x \in M \cap N \implies PQ(x) = P(x) = x$. Por consiguiente, $PQ(H) = M \cap N$. $\square$

Proposición 2.5.3. Sean P y Q las proyecciones sobre los subespacios cerrados M y N de H , respectivamente. Si $PQ = 0$, entonces $M \perp N$ y $(P + Q)$ es la proyección sobre $M + N$. En este caso, se dice que $P \perp Q$.

Demostración.

1. Como $PQ = 0$, entonces para $x \in M$, $y \in N$ se tiene
 $\langle x, y \rangle = \langle Px, Qy \rangle = \langle x, PQy \rangle = 0$.
2. $QP = Q^*P^* = (PQ)^* = 0$, luego
 $(P + Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + Q$. Además,
 $(P + Q)^* = P^* + Q^* = P + Q$. Por consiguiente, $(P + Q)$ es una proyección en H .
3. $(P + Q)(H) \subset P(H) + Q(H) = M + N$. Por otra parte,
 $M + N \subset (P + Q)(H)$, pues si $x \in M$, $y \in N$, entonces

$$\begin{aligned}(P + Q)(x + y) &= P(x) + P(y) + Q(x) + Q(y) = \\ &= x + P(Q(y)) + Q(P(x)) + y = \\ &= x + y.\end{aligned}$$

Se sigue que $(P + Q)$ es la proyección sobre $M + N$. $\square$

Proposición 2.5.4. Sean P y Q las proyecciones sobre los subespacios cerrados M y N de H , respectivamente. Si $PQ = Q$, entonces $M \supset N$ y $(P - Q)$ es la proyección sobre $M \cap N^\perp$.

Demostración. Ya que

$$QP = Q^*P^* = (PQ)^* = Q^* = Q = PQ,$$

entonces, por la proposición 2,5,2, $Q = PQ$ es la proyección sobre $M \cap N$. Por consiguiente, $N = M \cap N$, luego $M \supset N$.

Por hipótesis, $I - Q$ es la proyección sobre $N^\perp$. Ahora bien, como $P(I - Q) = (I - Q)P$, entonces por la misma proposición, $P - Q = P(I - Q)$ es la proyección sobre $M \cap N^\perp$. $\square$

Proposición 2.5.5. Si P y Q son proyecciones en H , entonces

$$PQ = Q \quad \text{si y solamente si} \quad P \geq Q.$$

Demostración. Si $PQ = Q$, entonces (por la proposición anterior) $P - Q$ es una proyección, luego (por la proposición 2,4,1) $(P - Q) \geq 0$, esto es, $P \geq Q$.

Viceversa, si $P \geq Q$, entonces $I - P \leq I - Q$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|(Q - PQ)(x)\|^2 &= \|(I - P)Q(x)\|^2 = \\
&= \langle (I - P)Q(x), (I - P)Q(x) \rangle = \\
&= \langle (I - P)Q(x), Q(x) \rangle \leq \\
&\leq \langle (I - Q)Q(x), Q(x) \rangle = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $x \in H$. Por consiguiente, $PQ = Q$. $\square$

Proposición 2.5.6. Sean P y Q las proyecciones sobre los subespacios M y N de H , respectivamente. Si $PQ = QP$, entonces $P + Q - PQ$ es la proyección sobre $M + N$. En particular, $M + N$ es cerrado.

Demostración. Es fácil verificar que $P + Q - PQ$ es una proyección en H .

Demostremos que $(P + Q - PQ)(H) = M + N$. En efecto,

1. Es claro que $(P + Q - PQ)(H) \subset M + N$.
2. Ahora bien, si $x \in M$, $y \in N$, entonces

$$\begin{aligned}
(P + Q - PQ)(x + y) &= P(x) + Q(x) - PQ(x) + P(y) + Q(y) - PQ(y) = \\
&= x + QP(x) - PQ(x) + PQ(y) + y - PQ(y) = \\
&= x + y,
\end{aligned}$$

luego $(x + y) \in (P + Q - PQ)(H)$. Por consiguiente,
 $M + N \subset (P + Q - PQ)(H)$. $\square$

Observación 2.5.1. En general, si M y N son subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H , no necesariamente $M + N$ es un subespacio cerrado de H . En efecto, sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador continuo cuya imagen $R(T)$ no sea un subespacio cerrado de H . Entonces, los subespacios

$$\begin{aligned}
M &= H \times \{0\} \\
N &= G(T) = \{(x, T(x)); x \in H\},
\end{aligned}$$

son cerrados en el espacio producto $H \times H$. Sin embargo, $M + N = H \times R(T)$ no es cerrado en $H \times H$.

Definición 2.5.1. Sean E un espacio con producto interno, $T \in L(H)$ y M un subespacio cerrado de E .

1. Se dice que M es *invariante por* T , cuando $T(M) \subset M$.
2. Se dice que M *reduce a* T cuando ambos subespacios M y $M^\perp$ son invariantes por T .

Proposición 2.5.7. Sean H un espacio de Hilbert, $T \in L(H)$, M un subespacio cerrado de H , y P la proyección sobre M . Entonces

1. M es invariante por T si y sólo si $TP = PTP$.
2. M reduce a T si y sólo si $TP = PT$.

Demostración.

1. Si M es invariante por T , entonces $T(P(x)) \in M$, para todo $x \in H$, luego $T(P(x)) = P(T(P(x)))$, para todo $x \in H$, esto es, $TP = PTP$.

Recíprocamente, si $TP = PTP$, entonces

$$T(M) = TP(M) = P(TP(M)) \subset M,$$

luego M es invariante por T .

2. Supongamos que ambos subespacios M y $M^\perp$ son invariantes por T . Entonces, por la parte 1), se tiene que

$$TP = PTP.$$

Ahora bien, sea $x = x_1 + x_2 \in M \oplus M^\perp = H$. Como $T(x_2) \in M^\perp$, entonces $P(T(x_2)) = 0$, luego

$$PT(x) = PT(x_1) + PT(x_2) = PT(x_1) = PTP(x),$$

para todo $x \in H$, esto es, $PT = PTP$. Por consiguiente, $PT = TP$.

Recíprocamente, si $TP = PT$, entonces

$$TP = TPP = PTP,$$

luego, por la parte 1), M es invariante por T . También, como

$$T(I - P) = T(I - P)(I - P) = (I - P)T(I - P)$$

luego, nuevamente por la parte 1), $M^\perp$ es invariante por T . Por consiguiente, M reduce a T . $\square$

Ejercicios de la sección 2.5

1. En un espacio de Hilbert H , sean P y Q las proyecciones *ortogonales* sobre los subespacios cerrados M y N , respectivamente. Demostrar que $PQ = QP$ si y sólo si $M = (M \cap N) \oplus (M \cap N^\perp)$.

Capítulo 3

OPERADORES COMPACTOS

3.1. Espectro de los operadores compactos en espacios de Banach.

Definición 3.1.1. Sean E un espacio de Banach y $T \in L(E)$ un operador lineal continuo en E .

1. El conjunto

$$\mathbf{P}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K}; (T - \lambda I) \text{ es invertible en } L(E)\}$$

se llama *conjunto resolvente* de T .

La función

$$R_T : \lambda \in \mathbf{P}(T) \mapsto R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1} \in L(E),$$

se llama *resolvente* de T , y el operador $R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{P}(T)$, se llama operador resolvente de T en λ .

2. El complemento en $\mathbb{K}$ del conjunto resolvente de T se llama *espectro* de T , y se denota por $\sigma(T)$.

Observación 3.1.1. Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces se tienen las tres alternativas siguientes:

1. El operador $(T - \lambda I)$ no es inyectivo. En este caso, se dice que λ es *autovalor* de T , y el conjunto

$$N_\lambda = N(T - \lambda I)$$

se llama el *subespacio propio* de T . Un elemento $x \in N_\lambda$, $x \neq 0$, se llama *autovector* de T asociado al autovalor λ .

El conjunto de los autovalores de T ,

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K}; (T - \lambda I) \text{ no es inyectivo}\},$$

se llama *espectro puntual* de T .

2. El operador $(T - \lambda I)$ es inyectivo pero no sobreyectivo, mas su imagen $R(T - \lambda I)$ es *densa* en E . En este caso el operador $(T - \lambda I)^{-1}$ *no* es continuo sobre $R(T - \lambda I)$; en efecto, si $(T - \lambda I)^{-1}$ fuera continuo, el subespacio $R(T - \lambda I)$ sería cerrado (ver corolario 1,5,3), luego igual a E , y λ estaría en el conjunto resolvente de T . Tenemos por consiguiente que dado $\epsilon > 0$, podemos hallar $x_\epsilon \in E$, tal que $\|x_\epsilon\| = 1$, y, $\|Tx_\epsilon - \lambda x_\epsilon\| \leq \epsilon$. Los escalares λ con esta última propiedad se llaman *autovalores aproximados* de T . Los autovalores aproximados λ de T , tales que el subespacio $R(T - \lambda I)$ es denso en E , forman el *espectro continuo* de T , que se denota por $\sigma_c(T)$.
3. El operador $(T - \lambda I)$ es inyectivo y $\overline{R(T - \lambda I)} \neq E$. El conjunto de estos λ forma el *espectro residual* $\sigma_r(T)$ del operador T . Un elemento λ del espectro residual de T será un autovalor aproximado, si el subespacio $R(T - \lambda I)$ de E *no* es cerrado.

Se tiene entonces, que

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \quad (\text{unión disyunta}).$$

Proposición 3.1.1. Sean E un espacio de Banach y $T \in L(E)$. Entonces, $\mathbf{P}(T)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{K}$.

Demostración. Sea $\lambda_0 \in \mathbf{P}(T)$. Como $(\lambda_0 I - T)$ es invertible, entonces por el ejercicio 2,3,1.b, existe $\delta > 0$ tal que

$$S \in L(E), \text{ y, } \|S - (\lambda_0 I - T)\| < \delta \implies S \text{ es invertible.}$$

Por lo tanto, si $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, entonces

$$\|(\lambda I - T) - (\lambda_0 I - T)\| = |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

luego $\lambda \in \mathbf{P}(T)$. $\square$

Proposición 3.1.2. *El espectro $\sigma(T)$ de cualquier operador $T \in L(E)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}$.*

Demostración. Por la proposición anterior, es suficiente demostrar que $\sigma(T)$ es acotado. Más exactamente, demostremos que

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

En efecto, si $|\lambda| > \|T\|$, entonces $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$, luego (por el ejercicio 2,3,1.a) el operador $(I - \frac{1}{\lambda}T)$ es invertible. Por consiguiente,

$$(\lambda I - T) = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda}T \right)$$

es invertible, esto es, $\lambda \notin \sigma(T)$. $\square$

Ejemplo 3.1.1. Sean $E = \ell^2$, y, $T \in L(\ell^2)$ el operador definido por

$$T(x) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

si $x = (x_n) \in \ell^2$. Entonces, se tienen las siguientes afirmaciones:

1. T no tiene autovalores, esto es, $\sigma_p(T) = \emptyset$, pues $(T - \lambda I)(x) = 0$ implica $x = 0$, cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Como $\|T\| = 1$, entonces $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\} = D$.
3. Si $U = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$, entonces $\sigma_r(T) = U$. En efecto, el operador adjunto $T^* \in L(\ell^2)$ de T está dado por

$$T^*(y) = (y_2, y_3, \dots, y_n, \dots),$$

si $y = (y_n) \in \ell^2$. Ahora bien, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de T^* , entonces existe $y = (y_n) \in \ell^2$, $y \neq 0$ tal que $(T^* - \lambda I)y = 0$, esto es,

$$y_{n+1} = \lambda^n y_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por consiguiente, $y_1 \neq 0$, y como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, entonces $|\lambda| < 1$, esto es, $\lambda \in U$.

Recíprocamente, si $|\lambda| < 1$, entonces λ es autovalor de T^* . Por consiguiente, $\sigma_p(T^*) = U$. Por lo tanto,

$$\lambda \in U \iff \bar{\lambda} \in U \iff \{0\} \neq N(T^* - \bar{\lambda}I) = N((T - \lambda I)^*) = R(T - \lambda I)^\perp,$$

esto es,

$$\lambda \in U \iff \overline{R(T - \lambda I)} \neq \ell^2,$$

y como T no tiene autovalores, entonces $\sigma_r(T) = U$.

4. $\sigma(T) = D$, pues $U = \sigma_r(T) \subset \sigma(T) \subset D$, y $\sigma(T)$ es cerrado.
5. Como $\sigma_p(T) = \emptyset$, entonces de la parte 3) se sigue que $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$.
6. Análogamente como en 3) y en 4), puesto que $\sigma_p(T^*) = U$ también se tiene que $\sigma(T^*) = D$.

Ejemplo 3.1.2. Sean $E = C[0, 1]$ el espacio de las funciones complejas continuas en $[0, 1]$, con la norma del máximo:

$$\|f\| = \max \{|f(t)|; t \in [0, 1]\},$$

y, $T \in L(C[0, 1])$ el operador definido así: si $f \in C[0, 1]$, la función $T(f) \in C[0, 1]$ viene dada por $T(f)(t) = tf(t)$, $t \in [0, 1]$. Entonces, $\sigma(T) = [0, 1]$. En efecto,

1. T no tiene autovalores, pues si $(T - \lambda I)(f) = 0$, esto es,

$$(t - \lambda)f(t) = 0,$$

para todo $t \in [0, 1]$, entonces $f(t) = 0$, para todo $t \neq \lambda$, de donde, por la continuidad de f , $f \equiv 0$.

2. Si $\lambda \notin [0, 1]$, entonces, $\lambda \notin \sigma(T)$, pues el operador S en $C[0, 1]$ definido por

$$S(g(t)) = \frac{1}{t - \lambda}g(t), \quad t \in [0, 1], \quad g \in C[0, 1],$$

es el inverso en $L(C[0, 1])$ de $(T - \lambda I)$. Por consiguiente,

$$\sigma(T) \subset [0, 1].$$

Ahora bien, si $\lambda \in [0, 1]$, entonces el operador $(T - \lambda I)$ no es sobreyectivo, ya que si $g \in C[0, 1]$, y, $g(\lambda) \neq 0$, entonces

$$(T - \lambda I)(f)(\lambda) = 0 \neq g(\lambda),$$

para toda $f \in C[0, 1]$. Por consiguiente, $\lambda \in \sigma(T)$. Se sigue que $\sigma(T) = [0, 1]$, lo que queríamos demostrar. $\square$

Definición 3.1.2. Se define el *radio espectral* $\rho(T)$ de un operador $T \in L(E)$ como el número real

$$\rho(T) = \sup \{ |\lambda|; \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Observación 3.1.2. Se muestra en [24] o [25] que en un espacio de Banach *complejo* $E \neq \{0\}$ todo operador $T \in L(E)$ tiene espectro $\sigma(T) \neq \emptyset$, como también que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \rho(T) = \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

Definición 3.1.3. Sean E, F espacios normados. Se dice que un operador lineal $T : E \longrightarrow F$ es *compacto* cuando la imagen por T de todo subconjunto acotado de E es un subconjunto precompacto de F .

Ya que todo operador lineal compacto $T : E \longrightarrow F$ es continuo (ejercicio 3,1,2), entonces no se pierde generalidad si en la definición de operador lineal compacto se exige la continuidad del mismo.

Obsérvese que para que un operador lineal $T : E \longrightarrow F$ sea compacto es necesario y suficiente que la imagen por T de la bola unitaria (abierta o cerrada) de E sea un subconjunto precompacto de F o equivalentemente, que la imagen $(T(x_n))$ por T de cualquier sucesión (x_n) en la bola unitaria posea una subsucesión de Cauchy.

Proposición 3.1.3. Sean E, F espacios de Banach y $T \in L(E, F)$. Entonces

1. T es compacto si y sólo si toda sucesión acotada (x_n) en E posee una subsucesión (x_{n_k}) tal que $(T(x_{n_k}))$ es convergente en F .
2. Si $R(T)$ es de dimensión finita, entonces T es compacto. Recíprocamente, si $R(T)$ es cerrado y T es compacto, entonces $R(T)$ es de dimensión finita.

Demostración.

1. Esto es inmediato por el hecho de que en espacios métricos completos los conceptos de conjunto precompacto y de conjunto relativamente compacto coinciden.

2. Es claro que si $\dim(R(T)) < \infty$, entonces T es compacto.

Recíprocamente si $R(T)$ es cerrado, entonces es de Banach. Por lo tanto (por el teorema de la aplicación abierta), $T : E \longrightarrow R(T)$ es una aplicación abierta, y, siendo T compacto, entonces la bola unitaria de $R(T)$ es precompacta, luego (por el teorema de Riesz) $\dim(R(T)) < \infty$. $\square$

Proposición 3.1.4. Sean E, F espacios de Banach, y $T \in L(E, F)$. Entonces:

1. Para que el operador T sea compacto, es necesario que T transforme sucesiones débilmente convergentes de E en sucesiones fuertemente convergentes de F .
2. Si el espacio E es reflexivo, la condición anterior también es suficiente para la compacidad de T .

Demostración.

1. Sea (x_n) una sucesión débilmente convergente en E , digamos $x_n \rightharpoonup x$. Entonces (x_n) es acotada (ejercicio 1,5,2), y por lo tanto, posee una subsucesión (x_{n_k}) tal que $(T(x_{n_k}))$ es convergente en F , necesariamente hacia $T(x)$. Como el raciocinio que acabamos de hacer para la sucesión (x_n) es aplicable a cualquiera de sus subsucesiones, se concluye que $T(x_n) \longrightarrow T(x)$.
2. Supongamos ahora que E es reflexivo, y que el operador T cumple la condición del enunciado. Entonces, por la reflexividad de E , toda sucesión acotada (x_n) de E contiene una subsucesión débilmente convergente (x_{n_k}) (Proposición 1,4,9), luego la sucesión $(T(x_{n_k}))$ es convergente en F , y por lo tanto, de la proposición 3,1,3 se sigue que T es un operador compacto. $\square$

Proposición 3.1.5. Sean E, F espacios normados. Entonces, el conjunto $L_c(E, F)$ de todos los operadores lineales compactos de E en F es un subespacio cerrado de $L(E, F)$.

Demostración. Sean

$$A = \{x \in E; \|x\| < 1\}, \quad \text{y}, \quad B = \{y \in F; \|y\| < 1\},$$

las bolas unitarias abiertas de E y F , respectivamente.

1. $L_c(E, F)$ es un subespacio lineal de $L(E, F)$. En efecto, si $T_1 \in L_c(E, F)$, $T_2 \in L_c(E, F)$ y $\delta > 0$, entonces existen elementos $y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_m$ en F tales que

$$T_1(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left(y_i + \frac{\delta}{2} B \right),$$

y,

$$T_2(A) \subset \bigcup_{j=1}^m \left(z_j + \frac{\delta}{2} B \right),$$

luego

$$(T_1 + T_2)(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (y_i + z_j + \delta B)$$

Por consiguiente, $(T_1 + T_2)(A)$ es precompacto. Se sigue que $(T_1 + T_2) \in L_c(E, F)$.

Análogamente se muestra que si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $T \in L_c(E, F)$ entonces $\lambda T \in L_c(E, F)$.

2. Sean $S \in \overline{L_c(E, F)} \subset L(E, F)$ y $\delta > 0$. Entonces, existe $T \in L_c(E, F)$ tal que

$$\|T - S\| < \frac{\delta}{2}.$$

También, existen elementos $y_1, y_2, \dots, y_n$ en F tales que

$$T(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left(y_i + \frac{\delta}{2} B \right).$$

Ahora bien, si $x \in A$, entonces existe i , $1 \leq i \leq n$, tal que $T(x) \in \left(y_i + \frac{\delta}{2} B \right)$, esto es,

$$\|T(x) - y_i\| < \frac{\delta}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\|S(x) - y_i\| \leq \|S(x) - T(x)\| + \|T(x) - y_i\| < \delta.$$

Se sigue que

$$S(A) \subset \bigcup_{i=1}^n (y_i + \delta B),$$

por consiguiente, S es compacto.

Se concluye que $L_c(E, F)$ es un subespacio cerrado de $L(E, F)$. $\square$

Proposición 3.1.6. *Sea E un espacio de Banach.*

1. Si $T \in L_c(E)$, y $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, entonces $\dim(N(T - \lambda I)) < \infty$.
2. Si $T \in L_c(E)$ y $\dim(E) = \infty$, entonces $0 \in \sigma(T)$.
3. El subespacio $L_c(E)$ es un ideal bilateral del álgebra de Banach $L(E)$, o sea,

$$T \in L_c(E), y, S \in L(E) \implies TS \in L_c(E), y, ST \in L_c(E).$$

Demostración.

1. Sean $F = N(T - \lambda I)$, $\lambda \neq 0$, y $T_1 = T|_F$ el operador T restringido al subespacio F . Entonces, T_1 es un operador compacto, y, como $\lambda \neq 0$, $R(T_1) = F$, que es un subespacio cerrado de E ; por la proposición 3.1.3, $\dim(F) < \infty$, lo cual queríamos demostrar.
2. Sea $T \in L_c(E)$. Si $0 \notin \sigma(T)$, entonces T es invertible en $L(E)$, en particular, $T(E) = E$, y, siendo T compacto, $\dim(T(E)) < \infty$.
3. Sean $T \in L_c(E)$ y $S \in L(E)$.

Si (x_n) es una sucesión acotada en E , entonces $(S(x_n))$ también es acotada, y siendo T compacto, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $(T(S(x_{n_k})))$ es convergente en E . Por consiguiente, $TS \in L_c(E)$.

Análogamente se muestra que $ST \in L_c(E)$. $\square$

Teorema 3.1.1. *Sean E, F espacios de Banach. Entonces, $T \in L(E, F)$ es compacto si y sólo si su adjunto $T' \in L(F', E')$ es compacto.*

Demostración. Sean B la bola unitaria abierta de E , y, $\phi : E \longrightarrow E''$ y $\psi : F \longrightarrow F''$ las aplicaciones canónicas de E en su bidual E'' , y de F en su bidual F'' , respectivamente.

1. Supongamos que T es compacto y sea (y'_n) una sucesión acotada en F' , digamos, $\|y'_n\| \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

a) Ya que

$$|y'_n(x) - y'_n(y)| \leq \alpha \|x - y\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $x \in F$ y todo $y \in F$, entonces (y'_n) es una sucesión uniformemente equicontinua en F , en particular en $\overline{T(B)} \subset F$.

- b) La sucesión numérica $(y'_n(y))$ es acotada para cada $y \in F$, en particular, para cada $y \in \overline{T(B)}$.

Por consiguiente, por el teorema de Ascoli (ejercicio 0,4,8), existe una subsucesión (y'_{n_k}) de (y'_n) que converge a alguna función continua, uniformemente sobre el conjunto $\overline{T(B)}$. En particular, (y'_{n_k}) es una sucesión de Cauchy uniformemente sobre $T(B)$, o sea, dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$i > n_0, j > n_0 \implies |y'_{n_i}(y) - y'_{n_j}(y)| < \delta,$$

para todo $y \in T(B)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \|T'(y'_{n_i}) - T'(y'_{n_j})\| &= \sup_{x \in B} \left| \langle x, T'(y'_{n_i}) - T'(y'_{n_j}) \rangle \right| = \\ &= \sup_{x \in B} \left| \langle T(x), y'_{n_i} - y'_{n_j} \rangle \right| = \\ &= \sup_{y \in T(B)} \left| \langle y, y'_{n_i} - y'_{n_j} \rangle \right| \leq \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

si $i > n_0, j > n_0$. Por consiguiente, $(T'(y'_{n_k}))$ es una subsucesión de Cauchy de $(T'(y'_n))$. Por lo tanto, T' es compacto.

2. Recíprocamente, supongamos que T' es compacto, y sea (x_n) una sucesión acotada en E . Entonces, por la parte 1), $T'' \in L(E'', F'')$ es compacto, luego, como $(\phi(x_n))$ es una sucesión acotada en E'' , existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) , tal que la sucesión $(T''(\phi(x_{n_k})))$ es de Cauchy. Por lo tanto, como

$$T''(\phi(x_{n_k})) = \psi(T(x_{n_k})), k \in \mathbb{N},$$

pues, $T'' \circ \phi = \psi \circ T$ (demostración de la proposición 1,7,2), y siendo ψ una isometría (sobre su imagen), entonces $(T(x_{n_k}))$ también es una sucesión de Cauchy en F . Por lo tanto, T es compacto. Esto completa la demostración del teorema. $\square$

Proposición 3.1.7. Sean E un espacio de Banach, $T \in L_c(E)$, $y, \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces, $R(T - \lambda I)$ es cerrado.

Demostración. Como $\dim(N(T - \lambda I)) < \infty$ (proposición 3,1,6), entonces existe un subespacio cerrado M de E tal que $E = N(T - \lambda I) \oplus M$ (ejercicio 1,5,13). Sea $S = (T - \lambda I)|_M$ el operador $(T - \lambda I)$ restringido a M . Se sigue que $S \in L(M, E)$ es inyectivo, y, $R(S) = R(T - \lambda I)$.

Demostremos que existe $\delta > 0$, tal que para todo $x \in M$,

$$\delta \|x\| \leq \|S(x)\|,$$

lo cual implica que $R(T - \lambda I) = R(S)$ es cerrado, que es la conclusión del teorema. Supongamos que no sea así. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar $x_n \in M$, con $\|x_n\| = 1$, y, $\|S(x_n)\| < \frac{1}{n}$. Como T es compacto, entonces existen $x_0 \in E$ y una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tales que $T(x_{n_k}) \rightarrow x_0$ en E . Por lo tanto, como $S(x_{n_k}) \rightarrow 0$ y $S(x_{n_k}) = T(x_{n_k}) - \lambda x_{n_k}$, se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T(x_{n_k}) - S(x_{n_k})) = x_0,$$

luego $x_0 \in M$, pues, $(\lambda x_{n_k}) \in M$, $k \in \mathbb{N}$ y M es cerrado. Además,

$$S(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} S(\lambda x_{n_k}) = 0,$$

luego $x_0 = 0$, pues S es inyectivo. Por consiguiente,

$$0 = \|x_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda x_{n_k}\| = |\lambda|,$$

esto es, $\lambda = 0$, lo que es una contradicción. $\square$

Lema 3.1.1. Sean E un espacio normado y M un subespacio lineal de E tal que $\overline{M} \neq E$. Entonces, para todo $r > 1$, podemos hallar $x \in E$, tal que $\|x\| < r$, y, $d(x, M) = 1$.

Demostración. Sea $r > 1$. Como $\overline{M} \neq E$, entonces existe $y \in E/\overline{M}$ tal que

$$\alpha = \|y\| \neq 0.$$

Si $x_0 = \frac{y}{\alpha}$, donde $y \in \dot{y}$, entonces

$$d(x_0, M) = d(x_0, \overline{M}) = \|\dot{x}_0\| = \left\| \left(\frac{y}{\alpha} \right) \cdot \right\| = 1 < r,$$

luego existe $y_0 \in M$ tal que

$$\|x_0 - y_0\| < r.$$

Es suficiente tomar $x = x_0 - y_0$. $\square$

Lema 3.1.2. Sean E un espacio de Banach y $T \in L(E)$. Supongamos que existen una sucesión estrictamente creciente de subespacios cerrados de E ,

$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n \subsetneq \dots,$$

y una sucesión (λ_n) en $\mathbb{K}$ con las siguientes propiedades:

1. $|\lambda_n| \geq \delta > 0$,
2. $T(M_n) \subset M_n$, y
3. $(T - \lambda_{n+1}I)(M_{n+1}) \subset M_n$,

para $n = 1, 2, \dots$. Entonces el operador T no es compacto.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por el lema 3,1,1 con $r = 2$, existe $x_{n+1} \in M_{n+1}$ tal que

$$\|x_{n+1}\| < 2, \quad \text{y} \quad d(x_{n+1}, M_n) = 1.$$

Sea $n > m \geq 2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - T(x_m)\| &= \|(T(x_n) - \lambda_n x_n - T(x_m)) + \lambda_n x_n\| = \\ &= |\lambda_n| \|x_n - \lambda_n^{-1} \{T(x_m) - (T - \lambda_n I)(x_n)\}\|. \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} T(x_m) &\in T(M_m) \subset M_{n-1}, \\ (T - \lambda_n I)(x_n) &\in (T - \lambda_n I)(M_n) \subset M_{n-1}, \end{aligned}$$

entonces $\{T(x_m) - (T - \lambda_n I)(x_n)\} \in M_{n-1}$, luego

$$\|x_n - \lambda_n^{-1} \{T(x_m) - (T - \lambda_n I)(x_n)\}\| \geq d(x_n, M_{n-1}) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| \geq |\lambda_n| \geq \delta,$$

para todo $n > m \geq 2$. Por consiguiente, $(T(x_n))$ no posee ninguna subsucesión de Cauchy, de donde $T \notin L_c(E)$. $\square$

Teorema 3.1.2. Sean E un espacio de Banach, $T \in L_c(E)$, $\delta > 0$ y

$$A = \{\lambda \in \sigma_p(T); |\lambda| > \delta\}$$

Entonces

1. $R(T - \lambda I) \neq E$, para todo $\lambda \in A$.
2. El conjunto A es finito.

Demostración.

1. Supongamos que existe $\lambda_0 \in A$ tal que $R(T - \lambda_0 I) = E$. Sea

$$M_n = N((T - \lambda_0 I)^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

- a) La sucesión de subespacios cerrados (M_n) es estrictamente creciente

$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \dots \subsetneq M_n \subsetneq \dots$$

En efecto, es claro que la sucesión es creciente. Ahora bien, por ser λ_0 autovalor de T , entonces existe $x_1 \in E$, $x_1 \neq 0$, tal que $(T - \lambda_0 I)(x_1) = 0$. Como $R(T - \lambda_0 I) = E$, entonces existe una sucesión (x_n) en E tal que

$$x_n = (T - \lambda_0 I)(x_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

luego

$$(T - \lambda_0 I)^n(x_{n+1}) = x_1 \neq 0, \quad y, \quad (T - \lambda_0 I)^{n+1}(x_{n+1}) = (T - \lambda_0 I)(x_1) = 0,$$

esto es, $x_{n+1} \in M_{n+1}$, y, $x_{n+1} \notin M_n$. Por consiguiente, $M_n \subsetneq M_{n+1}$.

b) $T(M_n) \subset M_n$, $n = 1, 2, \dots$, pues si $x \in M_n$, entonces

$$(T - \lambda_0 I)^n(T(x)) = T((T - \lambda_0 I)^n(x)) = 0$$

esto es, $T(x) \in M_n$.

c) $(T - \lambda_0 I)(M_{n+1}) \subset M_n$, $n = 1, 2, \dots$, pues si $x \in M_{n+1}$, entonces

$$(T - \lambda_0 I)^n((T - \lambda_0 I)(x)) = (T - \lambda_0 I)^{n+1}(x) = 0,$$

esto es, $(T - \lambda_0 I)(x) \in M_n$.

Por consiguiente, el lema 3,1,2, con $\lambda_n = \lambda_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, implica que $T \notin L_c(E)$. Esto demuestra la parte 1).

2. Supongamos que A es infinito y sea (λ_n) una sucesión de elementos de A , dos a dos distintos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x_n \in N(T - \lambda_n I)$, y,

$$M_n = [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Ya que autovectores correspondientes a autovalores dos a dos distintos son linealmente independientes¹, se tiene que (M_n) es una sucesión estrictamente creciente de subespacios cerrados de E . También,

$$(T - \lambda_{n+1} I)(M_{n+1}) \subset M_n \quad n = 1, 2, \dots,$$

pues si $x \in M_{n+1}$, entonces $x = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j$, de donde

$$(T - \lambda_{n+1} I)(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{n+1}) x_j \in M_n.$$

Además, $T(M_n) \subset M_n$, y, por hipótesis, $|\lambda_n| > \delta$, $n = 1, 2, \dots$. El lema 3,1,2 implica que $T \notin L_c(E)$. Esto finaliza la demostración del teorema.

□

Lema 3.1.3. *Si E es un espacio normado y M_0 un subespacio cerrado de E , entonces*

$$\dim(E/M_0) \leq \dim(M_0^\perp).$$

¹demuéstrese esta afirmación, a manera de ejercicio.

Demostración. Es claro que probar el lema es equivalente a demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \leq \dim(E/M_0)$, entonces $n \leq \dim(M_0^\perp)$.

Sean, pues, $n \leq \dim(E/M_0)$, y, $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementos en E tales que el conjunto $\{x_1 + M_0, x_2 + M_0, \dots, x_n + M_0\}$ es linealmente independiente. Si

$$M_k = [x_1, x_2, \dots, x_k] + M_0,$$

$k = 1, 2, \dots, n$, entonces $M_{k-1} \subset M_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ahora bien, como cada subespacio M_k es cerrado y $x_k \notin M_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ entonces existe $x'_k \in E'$ tal que

$$\langle x_k, x'_k \rangle = 1, \quad \text{y} \quad \langle M_{k-1}, x'_k \rangle = \{0\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Se sigue que $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $M_0^\perp$. Por consiguiente, $n \leq \dim(M_0^\perp)$, lo que queríamos demostrar. $\square$

Teorema 3.1.3. Sean E un espacio de Banach y $T \in L_c(E)$. Entonces:

1. Si $\lambda \neq 0$, los cuatro números siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha &= \dim(N(T - \lambda I)), \\ \beta &= \dim(E/R(T - \lambda I)), \\ \alpha' &= \dim(N(T' - \lambda I)), \quad \text{y} \\ \beta' &= \dim(E'/R(T' - \lambda I)), \end{aligned}$$

son finitos e iguales.

2. Si $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$, λ es autovalor de T y T' .

3. $\sigma(T)$ es un conjunto (compacto) a lo sumo enumerable, y 0 es su único punto de acumulación posible.

Demostración.

1. a) Se sabe (proposición 3,1,6) que $\alpha < \infty$. Ahora bien, como $R(T - \lambda I)$ es cerrado (proposición 3,1,7), entonces (por la proposición 1,7,4) $R(T' - I)$ también es cerrado y

$$R(T' - \lambda I) = N(T - \lambda I)^\perp.$$

Por lo tanto, como $N(T - \lambda I) \simeq (N(T - \lambda I))'$ entonces por el ejercicio 1,3,14, resulta que

$$N(T - \lambda I) \simeq E'/N(T - \lambda I)^\perp = E'/R(T' - \lambda I),$$

luego $\alpha = \beta'$.

b) Por la proposición 1,7,3, se tiene que

$$R(T - \lambda I)^\perp = N(T' - \lambda I).$$

Por lo tanto, usando el lema 3,1,3, con $M_0 = R(T - \lambda I)$, se obtiene que

$$\beta = \dim(E/R(T - \lambda I)) \leq \dim(R(T - \lambda I)^\perp) = \dim(N(T' - \lambda I)) = \alpha',$$

esto es, $\beta \leq \alpha'$.

c) Demostremos que $\alpha \leq \beta$. Supongamos por reducción al absurdo, que $\alpha > \beta$.

Sea F complemento topológico de $N(T - \lambda I)$ en E (ejercicio 1,5,13):

$$E = N(T - \lambda I) \oplus F \text{ (suma directa topológica)} \quad (*)$$

También, puesto que

$$\dim(E/R(T - \lambda I)) = \beta < \alpha < \infty,$$

por el ejercicio 1,5,15, a), existe un subespacio G de E tal que $\dim(G) = \beta$ y

$$E = R(T - \lambda I) \oplus G \text{ (suma directa topológica)}. \quad (**)$$

Sea $\phi : N(T - \lambda I) \longrightarrow G$ una aplicación lineal sobreyectiva. Ya que $\alpha > \beta$, entonces existe $x_0 \in N(T - \lambda I)$, $x_0 \neq 0$, tal que

$$\phi(x_0) = 0.$$

Se define el operador $S : E \longrightarrow E$ por la fórmula

$$S(x) = T(x) + \phi \circ P(x), \quad x \in E,$$

en donde

$$P : x = x_1 + x_2 \in N(T - \lambda I) \oplus F \longrightarrow x_1 \in N(T - \lambda I)$$

es la proyección a lo largo de F . Como $\dim(R(\phi \circ P)) < \infty$, el operador S es compacto, y además λ es autovalor de S , pues

$$S(x_0) = T(x_0) + \phi(P(x_0)) = \lambda x_0 + \phi(x_0) = \lambda x_0;$$

entonces el teorema 3,1,2 implica que

$$R(S - \lambda I) \neq E. \quad (***)$$

Por otra parte, ya que $\phi \circ P(F) = \{0\}$, entonces usando (*), resulta que

$$(S - \lambda I)(F) = (T + \phi \circ P - \lambda I)(F) = (T - \lambda I)(F) = (T - \lambda I)(E) = R(T - \lambda I).$$

También,

$$(S - \lambda I)(N(T - \lambda I)) = G.$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta (*) y (**), resulta que

$$R(S - \lambda I) = R(T - \lambda I) \oplus G = E,$$

lo que es una contradicción con (**). Esta contradicción muestra que $\alpha \leq \beta$.

d) Aplicando la misma técnica que en c) a $T' \in L_c(E')$, se tiene que $\alpha' \leq \beta'$.

Se sigue de a), b), c), y d) que

$$\beta' = \alpha \leq \beta \leq \alpha' \leq \beta',$$

de donde $\alpha = \beta = \alpha' = \beta'$, lo que queríamos demostrar.

2. Si $\lambda \neq 0$ no es autovalor de T , entonces por 1), $\alpha = 0$, luego $\beta = 0$, esto es, $R(T - \lambda I) = E$, de donde $(T - \lambda I)$ es invertible en $L(E)$, o sea $\lambda \neq \sigma(T)$. Por consiguiente, si $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \neq 0$, entonces λ es autovalor de T , y de T' , pues $\alpha' = \alpha > 0$.

3. Por la parte 2), se tiene que

$$\{\lambda \in \sigma(T); \lambda \neq 0\} \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T),$$

luego, si $0 \in \sigma(T)$, entonces

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\},$$

y si $0 \notin \sigma(T)$, entonces

$$\sigma(T) = \sigma_p(T).$$

Ahora bien, para cada entero $n > 0$, el conjunto

$$A_n = \left\{ \lambda \in \sigma_p(T); |\lambda| > \frac{1}{n} \right\}$$

es finito (teorema 3,1,2,2), luego el conjunto

$$\{\lambda \in \sigma_p(T); \lambda \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

es enumerable. Por consiguiente, $\sigma(T)$ es enumerable.

También, 0 es el único punto de acumulación posible de $\sigma(T)$, pues fuera de cualquier vecindad de 0 sólo existe un número finito de autovalores de T . Esto completa la demostración del teorema. $\square$

Corolario 3.1.1. *Si E es un espacio de Banach y $T \in L_c(E)$, entonces $\sigma(T)$ está formado por un número finito o infinito enumerable de autovalores no nulos, y eventualmente el 0. Cada uno de los autovalores no nulos tiene multiplicidad finita, y si son infinitos en número, se acumulan en 0.*

Recuérdese que si $\dim(E) = \infty$, entonces $0 \in \sigma(T)$.

Ejercicios de la sección 3.1

1. Sean E un espacio de Banach, $T \in L(E)$ y $S \in L(E)$. Demostrar que los elementos no nulos del espectro de TS y los del espectro de ST coinciden.

Sugerencia:

- a) Reducir el problema a mostrar que $(I - ST)$ es invertible si y sólo si $(I - TS)$ es invertible.
 - b) Suponiendo $\|T\| \|S\| < 1$, encontrar una relación entre $(I - TS)^{-1}$ e $(I - ST)^{-1}$.
 - c) Demostrar que si $(I - ST)$ es invertible, entonces $(I - TS)$ es invertible, usando el resultado de b).
2. Sean E, F espacios normados. Demostrar que todo operador lineal compacto $T : E \longrightarrow F$ es continuo.
3.
 - a) Sean (λ_n) una sucesión acotada de números complejos, y, $T : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ el operador definido por $T(x) = (\lambda_n x_n)$, si $x = (x_n) \in \ell^1$. Encontrar $\sigma(T)$.
 - b) Demostrar que todo subconjunto compacto no vacío K de $\mathbb{C}$ es el espectro de algún operador $T \in L(\ell^1)$.
Sugerencia: Sea (λ_n) una sucesión densa en el compacto K . Defina $T : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ por $T(x) = (\lambda_n x_n)$.
4. Sean E, F espacios de Banach, siendo E reflexivo, y, $T \in L_c(E, F)$. Demostrar que existe $x_0 \in E$ con $\|x_0\| = 1$, tal que $\|T\| = \|T(x_0)\|$.
5. Sea H un espacio de Hilbert.
 - a) Demostrar que todo operador $T \in L(H, \ell^1)$ es compacto (y por tanto que $R(T) \neq \ell^1$).
 - b) Demostrar que todo operador $T \in L(c_0, H)$ es compacto.
6.
 - a) Sean E un espacio de Banach reflexivo y $T \in L_c(E)$, inyectivo. Demostrar que si (v_n) es una sucesión acotada de autovectores linealmente independientes de T , entonces $v_n \longrightarrow 0$.
 - b) Mostrar con un ejemplo, que, sin la hipótesis de que E es reflexivo, el resultado de a) puede ser falso.
Sugerencia: Sea $E = \ell^1$ y $T \in L(\ell^1)$ el operador definido por $T(x) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots)$, si $x = (x_n) \in \ell^1$.
7. Sea E un espacio de Banach.

- a) Demostrar que un operador lineal $T : E \longrightarrow c_0$ es compacto si y sólo si existe una sucesión (x'_n) en E' tal que $x'_n \longrightarrow 0$ en E' , y, $T(x) = (\langle x, x'_n \rangle)_n$, $x \in E$.
- b) Concluir de a) que un operador lineal $T : E \longrightarrow c_0$ es compacto si y sólo si T puede ser aproximado en $L(E, c_0)$ por operadores con imagen de dimensión finita.
- c) Demostrar que si E es de dimensión infinita, entonces E_σ no es metrizable (esto es, la topología débil $\sigma(E, E')$ en E no es metrizable).

Sugerencia: Demostrar que existe un operador lineal compacto $T : E \longrightarrow c_0$, tal que $T(E)$ es de dimensión infinita, y aplicar la parte b) del ejercicio 1,5,14. Para construir T , escoger una sucesión topológicamente libre conveniente, (x_n) , en E , para (usando el ejercicio 1,3,11) hallar una sucesión (x'_n) en E' tal que $\langle x_k, x'_n \rangle = \delta_{kn}$, y $\|x'_n\| = \frac{1}{n}$. Definir $T : E \longrightarrow c_0$ por $T(x) = (\langle x, x'_n \rangle)_n$, $x \in E$.

- 8. Sean E un espacio de Banach, $T, S \in L(E)$.
 - a) Demostrar con un ejemplo, que $ST = I$ no implica necesariamente que $TS = I$.
 - b) Suponga que T es compacto. Demostrar que $S(I - T) = I$ si y sólo si $(I - T)S = I$.
 - c) Demostrar que, para T compacto, cualquiera de las igualdades de b) implica que el operador $I - (I - T)^{-1}$ es compacto.

3.2. Operadores compactos en espacios de Hilbert.

En esta sección, la letra H denotará siempre un espacio de Hilbert.

Si H es de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, entonces todo operador $T \in L(H)$ tiene por lo menos un autovalor. Además, λ es autovalor de T si y sólo si $\bar{\lambda}$ es autovalor de T^* . Sin embargo, si H es de dimensión infinita, estos resultados, en general, no valen (ejemplo 3,1,1 partes 1) y 3)). Más aún, existen operadores hermitianos que no poseen autovalores (ejercicio 2.b). Por otra parte, si $T \in L(H)$ es hermitiano y compacto, entonces T posee autovalores, como lo muestra la proposición 3,2,2, más adelante.

Proposición 3.2.1. *Los autovalores de un operador hermitiano $T \in L(H)$ son reales. Además autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

Demostración.

1. Sean λ autovalor de $T \in L(H)$, operador hermitiano, y x autovector asociado a λ . Entonces,

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle T(x), x \rangle = \langle x, T(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2,$$

de donde, como $x \neq 0$, tenemos que $\lambda = \bar{\lambda}$, esto es, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sean $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalores de T y x_1 y x_2 autovectores asociados a λ_1 y λ_2 , respectivamente.

Entonces,

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \lambda x_1, x_2 \rangle = \langle T(x_1), x_2 \rangle = \langle x_1, T(x_2) \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle$$

esto es,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0,$$

luego, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tenemos que $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. $\square$

Proposición 3.2.2. *Todo operador hermitiano compacto $T \in L(H)$ tiene por lo menos un autovalor μ_1 con $|\mu_1| = \|T\|$.*

Demostración. Por la proposición 2.4.2 se tiene que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle|.$$

Entonces:

1. Existen $\mu_1 \in \mathbb{R}$ y una sucesión (x_n) en H , con $\|x_n\| = 1$, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(x_n), x_n \rangle = \mu_1 = \pm \|T\|.$$

En efecto, sea (y_k) una sucesión con $\|y_k\| = 1$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} |\langle T(y_k), y_k \rangle| = \|T\|$. Ahora bien, existen $\mu_1 \in \mathbb{R}$ y una subsucesión (y_{k_n}) de (y_k) tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(y_{k_n}), y_{k_n} \rangle = \mu_1.$$

Por consiguiente,

$$|\mu_1| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle T(y_{k_n}), y_{k_n} \rangle| = \|T\|,$$

luego, $\mu_1 = \pm \|T\|$. Por lo tanto es suficiente tomar $x_n = y_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (T(x_n) - \mu_1 x_n) = 0$. En efecto, ya que

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - \mu_1 x_n\|^2 &= \langle T(x_n) - \mu_1 x_n, T(x_n) - \mu_1 x_n \rangle = \\ &= \|T(x_n)\|^2 - 2\mu_1 \langle T(x_n), x_n \rangle + \mu_1^2 \leq \\ &\leq \|T\|^2 - 2\mu_1 \langle T(x_n), x_n \rangle + \mu_1^2 = \\ &= 2\mu_1^2 - 2\mu_1 \langle T(x_n), x_n \rangle = \\ &= 2\mu_1(\mu_1 - \langle T(x_n), x_n \rangle), \end{aligned}$$

entonces, por 1) se obtiene la afirmación.

3. Como T es compacto, entonces existen $x \in H$ y una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $T(x_{n_k}) \longrightarrow x$. Por lo tanto, ya que

$$\|\mu_1 x_{n_k} - x\| \leq \|\mu_1 x_{n_k} - T(x_{n_k})\| + \|T(x_{n_k}) - x\|,$$

y teniendo en cuenta 2), resulta que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_1 x_{n_k}) = x.$$

Por consiguiente,

$$T(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(\mu_1 x_{n_k}) = \mu_1 \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_{n_k}) = \mu_1 x,$$

esto es, μ_1 es autovalor de T , lo cual queríamos demostrar. $\square$

Teorema 3.2.1. *(Teorema espectral para operadores hermitianos compactos). Sea $T \in L(H)$ un operador hermitiano compacto. Entonces*

1. *T tiene un número finito o infinito enumerable de autovalores reales no nulos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$, tales que*

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_n| \geq \dots$$

2. Cada uno de estos autovalores tiene multiplicidad finita.
3. Si los autovalores μ_n , $n \in \mathbb{N}$, son infinitos, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$.
4. A la sucesión de autovalores (μ_n) , en donde cada autovalor μ_n aparece un número (finito) de veces igual a su multiplicidad, le corresponde un sistema ortonormal (e_n) de autovectores, tal que $\forall x \in H$,

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n \quad . \quad (\text{Representación espectral de } T)$$

5. El escalar 0 es autovalor de T si y sólo si el sistema ortonormal (e_n) no es completo.

Demostración.

1. Por la proposición 3,2,2, existen $\mu_1 \in \mathbb{R}$, autovalor de T con $|\mu_1| = \|T\|$, y, $e_1 \in H$, autovector de T , con $\|e_1\| = 1$, asociado a μ_1 .

Sean $H_1 = [e_1]^\perp$ y $T_1 = T|_{H_1}$ el operador T restringido a H_1 . Entonces, T_1 es un operador hermitiano compacto en H_1 , luego existen $\mu_2 \in \mathbb{R}$, autovalor de T_1 (y por consiguiente, de T) con $|\mu_2| = \|T_1\|$, y $e_2 \in H_1$, autovector de T_1 asociado a μ_2 , con $\|e_2\| = 1$. Se sigue que

$$|\mu_1| \geq |\mu_2|.$$

Supongamos que hemos encontrado escalares no nulos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ y vectores con norma 1, $e_1, e_2, \dots, e_k$ tales que si

$$H_i = [e_1, e_2, \dots, e_i]^\perp, \quad \text{y,} \quad T_{i-1} = T|_{H_{i-1}},$$

$i = 1, 2, \dots, k$ (definiendo $H_0 = H$ y $T_0 = T$), entonces e_i es autovector de T_{i-1} asociado a μ_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Si

$$T_k = T|_{H_k} \neq 0,$$

entonces T_k es un operador (no nulo) hermitiano compacto en H_k , luego existen $\mu_{k+1} \in \mathbb{R}$ autovalor de T_k con $|\mu_{k+1}| = \|T_k\| \neq 0$, y, $e_{k+1} \in H_k$, autovector de T_k asociado a μ_{k+1} , tal que $\|e_{k+1}\| = 1$. Por consiguiente, $\{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ es un conjunto de vectores ortonormales y

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_k| \geq |\mu_{k+1}|.$$

Se puede continuar indefinidamente este proceso, a menos que $T_m = 0$, para algún $m \in \mathbb{N}$ (véase la demostración de la parte 4), al final). Esto demuestra 1).

2. Esta afirmación es el contenido de la proposición 3,1,6,1.
3. Si la sucesión de autovalores (μ_n) es infinita, entonces el escalar 0 es punto de acumulación del conjunto $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots\}$, pues para cada $\delta > 0$, el conjunto $\{\lambda \in \sigma_p(T); |\lambda| \geq \delta\}$ es finito (teorema 3,1,2). Se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$ (pues, $|\mu_n| \geq |\mu_{n+1}|$, $n \in \mathbb{N}$), que es la afirmación 3.

Otra demostración de este resultado es como sigue:

Supongamos, por reducción al absurdo, que (μ_n) es infinita (y por lo tanto, que el conjunto ortonormal de autovectores correspondiente, $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$, también es infinito) pero que μ_n no converge a 0. Entonces, existen $\delta > 0$ y una subsucesión (μ_{n_k}) de (μ_n) , tales que $|\mu_{n_k}| \geq \delta$, para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde, en virtud de que $|\mu_n| \geq |\mu_{n+1}|$, se tiene que $|\mu_n| \geq \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $y_n = \frac{e_n}{\mu_n}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|y_n\| = \frac{1}{|\mu_n|} \leq \frac{1}{\delta}, \quad n \in \mathbb{N},$$

esto es, la sucesión (y_n) es acotada y, como

$$\|T(y_n) - T(y_m)\| = \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}, \quad \text{si } n \neq m,$$

la sucesión $(T(y_n))$ no posee ninguna subsucesión de Cauchy, lo que es una contradicción, pues T es compacto. Esta contradicción demuestra que si (μ_n) es infinita, entonces necesariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$.

4. Es claro que el sistema (e_n) construido en 1), en donde e_n es autovector de T asociado a μ_n , es ortonormal. Ahora bien,

a) Supongamos que, en 1), $T_m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$H = H_m \oplus H_m^\perp, \quad \text{y} \quad T(H_m) = \{0\}.$$

Por consiguiente, si $x = x_1 + x_2 \in H_m \oplus H_m^\perp$, entonces

$$T(x) = T(x_2).$$

También, ya que $x_2 \in H_m^\perp = [e_1, e_2, \dots, e_m]$, y, $\langle x_1, e_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, entonces

$$x_2 = \sum_{i=1}^m \langle x_2, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Por lo tanto,

$$T(x) = \sum_{i=1}^m \mu_i \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in H.$$

T es entonces un operador con imagen de dimensión finita.

- b) Supongamos que, en 1), $T_m \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ (esto es, el proceso se continua indefinidamente). Entonces, resulta una sucesión μ_n de autovalores no nulos con

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_n| \geq \dots$$

Ahora bien, la sucesión (μ_n) es infinita, pues si existiera $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n = \mu_m$, para todo $n \geq m$, entonces la multiplicidad de μ_m (esto es, $\dim(N(T - \mu_m I))$) sería infinita, lo que es una contradicción, por 2). Se sigue entonces, por 3) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0.$$

Ya que, por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n \langle x, e_n \rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq |\mu_1|^2 \|x\|^2 < \infty$$

para cada $x \in H$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n$ es convergente en H . Sea

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H, \quad k = 1, 2, \dots$$

Entonces, como $(x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n) \in H_k$, $k \in \mathbb{N}$, y

$$\left\| x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right\| \leq \|x\|,$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\|T(x) - S_k(x)\| &= \left\| T(x) - \sum_{n=1}^k T(\langle x, e_n \rangle e_n) \right\| = \\
&= \left\| T \left(x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right) \right\| = \\
&= \left\| T_k \left(x - \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n \right) \right\| \leq \\
&\leq \|T_k\| \|x\| = \\
&= |\mu_{k+1}| \|x\|,
\end{aligned}$$

luego $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(x) - S_k(x)\| = 0$, esto es,

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H,$$

lo que demuestra 4).

5. Supongamos que 0 es un autovalor de T , esto es, que existe $x \in H$, $x \neq 0$, tal que $T(x) = 0$. Entonces, por 4),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n = 0,$$

luego (ya que la serie converge en H) resulta que

$$0 = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n, e_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_k \rangle = \mu_k \langle x, e_k \rangle$$

de donde $\langle x, e_k \rangle = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, (e_n) no es completo.

Recíprocamente, si (e_n) no es completo, entonces existe $x \in H$, $x \neq 0$, tal que $\langle x, e_n \rangle = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n = 0.$$

Por lo tanto, T no es inyectivo, esto es, 0 es autovalor de T . Esto completa la demostración del teorema. $\square$

Usando la representación espectral de un operador hermitiano compacto $T \in L(H)$ se puede demostrar que $\sigma(T)$ es formado sólo por autovalores y, eventualmente, el 0 , de la siguiente manera:

Supongamos que $\lambda \neq 0$ no es un autovalor de T . Para todo $y \in H$, la ecuación

$$(T - \lambda I)(x) = y,$$

tiene solución en H . En efecto,

$$y = T(x) - \lambda x = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n - \lambda x, \quad (*)$$

luego

$$\langle y, e_k \rangle = \mu_k \langle x, e_k \rangle - \lambda \langle x, e_k \rangle,$$

esto es,

$$\langle x, e_k \rangle = \frac{\langle y, e_k \rangle}{\mu_k - \lambda}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pues, $\lambda \neq \mu_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por $(*)$, se obtiene que

$$x = -\frac{1}{\lambda}y + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\mu_n - \lambda} \langle y, e_n \rangle e_n.$$

Se sigue que si $\lambda \neq 0$ no es autovalor de T , entonces $(T - \lambda I)$ es biyectivo, luego invertible en $L(H)$. Por lo tanto, $\lambda \notin \sigma(T)$.

El siguiente teorema muestra la recíproca del teorema 3,2,1

Teorema 3.2.2. *Si (μ_n) es una sucesión de números reales no nulos con*

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_n| \geq \dots$$

y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$, y si (e_n) es un sistema ortonormal en H , entonces la fórmula

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in H,$$

define un operador hermitiano compacto con autovalores μ_n , $n = 1, 2, \dots$, y cada uno de estos autovalores tiene multiplicidad igual al número de veces que aparece en la sucesión.

Además, 0 es autovalor de T si y sólo si el sistema ortonormal (e_n) no es completo.

Demostración. Ejercicio

Ejercicios de la sección 3.2

1. Sea $T \in L(H)$ un operador normal. Demostrar que $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de T si y sólo si $\bar{\lambda}$ es autovalor de T^* , y que en este caso, los correspondientes subespacios propios de T y T^* coinciden.
2. a) Demostrar que para que $\lambda \in \mathbb{K}$ no esté en el espectro de un operador hermitiano $T \in L(H)$ es necesario y suficiente que exista una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\|(T - \lambda I)(x)\| \geq \alpha \|x\|,$$

para todo $x \in H$. Equivalentemente, λ está en el espectro de un operador hermitiano $T \in L(H)$ si y sólo si existen sucesiones (x_n) en H y (a_n) en $\mathbb{K}$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, tales que

$$\|(T - \lambda I)(x_n)\| < a_n \|x_n\|,$$

para $n = 1, 2, \dots$.

- b) Sean $H = L^2[0, 1]$ y $T \in L(L^2[0, 1])$, el operador definido por

$$T(f)(t) = tf(t), \quad c.t.p., \quad f \in L^2[0, 1],$$

en donde *c.t.p.* significa *casi en toda parte*, esto es, salvo para t perteneciente a un conjunto de medida (de Lebesgue) nula. Demostrar que T es un operador hermitiano, que $\sigma(T) = [0, 1]$, y que $\sigma_p(T) = \emptyset$.

3. Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(H)$ un operador hermitiano.

- a) Demostrar que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Sugerencia: Si $\lambda = \alpha + \beta i$, con $\beta \neq 0$, entonces demostrar que $(T - \lambda I)$ es invertible, usando el ejercicio 2a.

- b) Demostrar, más exactamente, que $\sigma(T) \subset [m, M]$, en donde m y M son el ínfimo y el supremo de T (definición 2,4,2,3).

Sugerencia: Si por ejemplo, $\lambda > M$, $\lambda = M + \alpha$ con $\alpha > 0$, entonces $\lambda \notin \sigma(T)$.

- c) Demostrar que ambos, M y m , son elementos de $\sigma(T)$. Concluir que todo operador hermitiano $T \in L(H)$ en un espacio de Hilbert complejo tiene espectro no vacío.

Sugerencia: Existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}$ con $M - \alpha \geq m - \alpha > 0$. Si $S = T - \alpha I$, entonces por el ejercicio 2,4,2, $\|S\| = M - \alpha$. También existen sucesiones (x_n) en H , con $\|x_n\| = 1$, y (δ_n) en $\mathbb{R}$, $\delta_n > 0$, $\delta_n \rightarrow 0$, tales que $\langle S(x_n), x_n \rangle = (M - \alpha) - \delta_n$. Usando el ejercicio 2a, demostrar que $(M - \alpha) \in \sigma(S)$. Concluir que $M \in \sigma(T)$.

4. Sean $S, M \in L(\ell^2)$ definidos así:

$$\begin{aligned} S(x) &= (0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \\ M(x) &= \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots \right), \end{aligned}$$

si $x = (x_n) \in \ell^2$, y sea $T = MS$.

- a) Demostrar que T es un operador compacto, y que T no tiene autovalores. ¿Cuál es $\sigma(T)$?
- b) Para $n = 1, 2, \dots$, calcular $\|T^n\|$. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$.
5. Sean $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$, $H = L^2[0, 1]$, y T el operador en H definido por

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy, \quad c.t.p$$

- a) Demostrar que T está bien definido, que $T \in L(H)$, y que

$$\|T\|^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 dx dy.$$

- b) Para $1 \leq j \leq n$, sean $\phi_j, \psi_j \in H$, y, $K_1(x, y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)\psi_j(y)$. Se define T_1 en términos de K_1 de la misma forma como T fue definido en términos de K . Demostrar que $\dim(R(T_1)) < \infty$.

- c) Deducir de la parte b) que T es un operador compacto.
 - d) Sea $\lambda \neq 0$. Demostrar la siguiente afirmación (*Alternativa de Fredholm*)²: la ecuación $T(f) - \lambda f = g$ tiene solución única $f \in H$ para cada $g \in H$, o existen infinitas soluciones para algunos valores de g , y no existen soluciones para otros.
 - e) Calcular T^* .
6. Sean H un espacio de Hilbert separable y $E = (e_n)$ una base ortonormal de H . Se dice que $T \in L(H)$ es un *operador diagonal* (en relación a E) cuando, $T(e_n) = \alpha_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$, en donde α_n es un escalar. La sucesión (α_n) se llama diagonal de T .
- a) Demostrar que una sucesión de escalares (α_n) representa un operador diagonal T si y sólo si ella es acotada.
 - b) Demostrar que en el caso anterior, $\|T\| = \sup_n |\alpha_n|$.
 - c) Demostrar que el operador diagonal T es invertible si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $|\alpha_n| \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - d) Demostrar que el operador diagonal T es compacto si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.
7. Demostrar que todo operador compacto $T \in L(H)$ puede ser aproximado en $L(H)$ por una sucesión de operadores con imagen de dimensión finita.
- Sugerencia:* Sea $T = UP$ la descomposición polar de T (ejercicio 2,4,5). Entonces, P es un operador (positivo) hermitiano compacto. Usar la representación espectral de P .

²aquí interviene únicamente la compacidad de T , no su expresión explícita.

Bibliografía

Bibliografía

- [1] L. Ahlfors. *Complex Analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. 3rd. Edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [2] S. Banach. *Théorie des Opérations Linéaires*. Warszawa, 1932. (Reimpreso por: Chelsea Publishing Company, New York, 1978).
- [3] L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.*, 116:135–157, 1966.
- [4] M. Day. *Normed Linear Spaces, 3rd. Edition*, Volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
- [5] N. Dunford and J. Schwartz. *Linear Operators, Part I*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1967.
- [6] C. Goffman and G. Pedrick. *First Course in Functional Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1965.
- [7] S. Goldberg. *Unbounded Linear Operators*. McGraw-Hill Series in Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966. [Reimpreso por Dover Publications Inc., New York, 1985].
- [8] P. Halmos. *A Hilbert Space Problem Book*. 2nd. Edition. Graduate Texts in Mathematics, 19. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [9] E. Hewitt and K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. 3rd. Printing. Volume 25 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

- [10] J. Horváth. *Topological Vector Spaces and Distributions*, volume 1. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
- [11] R.C. James. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 37:174–177, 1951.
- [12] R.C. James. Weak compactness and reflexivity. *Israel J. Math.*, 2:101–119, 1964.
- [13] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. (Eds.) *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*. Volume I. North Holland-Elsevier, 2001.
- [14] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. (Eds.) *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*. Volume II. North Holland-Elsevier, 2003.
- [15] B. Josefson. Weak sequential convergence in the dual of a Banach space does not imply norm convergence. *Arkiv för Matematik*, 13:79–89, 1975.
- [16] G. Köthe. *Topological vector spaces*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.
- [17] E. Lima. *Elementos de Topologia Geral*. Ao Livro Técnico, S.A., Rio de Janeiro, R.J., 1970.
- [18] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. On the complemented subspaces problem. *Israel J. Math.*, 9:263–269, 1971.
- [19] L. Liusternik and V. Sobolev. *Elements of Functional Analysis*. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1965.
- [20] A. Nissenzweig. w^* -sequential convergence. *Israel J. Math.*, 22:266–272, 1975.
- [21] J.C. Oxtoby. *Measure and Category. A survey of the analogies between topological and measure spaces*. 2nd. Edition. Graduate Texts in Mathematics, 2. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
- [22] F. Riesz and B. Sz-Nagy. *Functional Analysis*. Frederick Ungar Publishers Co., New York, 1972. [Reimpreso por Dover Publications Inc., New York, 1990].

- [23] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. 3rd. Edition. McGraw-Hill, New York, 1987. [Traducción al español: *Análisis Real y Complejo*. 3a. Edición. McGraw-Hill, 1987].
- [24] W. Rudin. *Functional Analysis*. 2nd. Edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [25] K. Yosida. *Functional Analysis*. 6th. Edition. Springer-Verlag, 1980. [Reimpreso en la serie Classics in Mathematics, Springer, 1995].
- [26] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Applications to Mathematical Physics*. Applied Mathematical Sciences 108. Springer, 1995.
- [27] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*. Applied Mathematical Sciences 109. Springer, 1995.

Índice alfabético

- álgebra de Banach, 199
- abiertos, 7
- absolutamente
 - convexo, 123
 - sumable, 175
- absorbente, 123
- acotada en el interior, 32
- acotado, 119
 - totalmente, 37
- adherencia, 8
- adherente, 15
- adjunto, 160, 200
- Alaoglu, 119
- aplicación
 - uniformemente continua, 18
- aplicación lineal, 71
 - acotada, 72
 - continua, 72
- autoadjunto, 207, 208
- autovalor, 224
- autovalores
 - aproximados, 225
- autovector, 225
- axioma de enumerabilidad, 15
- Banach, 54, 83
- base, 8
 - Hamel, 119
 - ortonormal, 189
- bidual, 97
- bola abierta, 9
- bola cerrada, 9
- bola unitaria
 - abierta, 51
 - cerrada, 51
- cerrado, 7
- circular, 123
- clausura, 8
- coeficientes de Fourier, 150
- compacto, 34
- complemento topológico, 143
- completado, 19, 20
 - isométricos, 23
- completo, 183
- congruentes, 75
- conjunto
 - denso, 8
 - resolvente, 224
- continua, 10
- convergencia, 14
 - débil, 112
 - débil*, 113
 - de operadores
 - débil, 166, 203
 - fuerte, 166, 203
 - uniforme, 167, 203
 - fuerte, 113
 - uniforme, 59
- convexo, 123

- débilmente
 - convergente, 112
 - holomorfa, 147
 - secuencialmente compacto, 117
 - relativamente, 117
 - secuencialmente completo, 199
- densa, 225
- desigualdad
 - Bessel, 183
 - Cauchy, 48
 - Cauchy-Schwarz, 172
 - Hölder, 60
 - Minkowski, 62
 - triangular, 4
- dimensión ortogonal, 189
- distancia, 4, 38
- equicontinua, 32
- equilibrado, 123
- equivalentes, 50
- esfera, 9
- espacio
 - $C^m(I; \mathbb{R})$, 57
 - $C_0(\mathbb{R})$, 68
 - C_{00} , 56
 - ℓ^2 , 173
 - c_0 , 55
 - ℓ^∞ , 64
 - ℓ^p ($1 \leq p < \infty$), 60
 - Baire, 25–27
 - Banach, 54
 - cociente, 75
 - dual (topológico), 81
 - Hilbert, 173
 - homeomorfos, 10
 - isométricos, 19
 - métrico, 4, 20, 27
 - acotado, 16
 - completo, 17
 - separable, 38
 - precompacto, 37
 - reflexivo, 98
 - separable, 93
 - topológico, 7, 15
 - discreto, 8
 - vectorial
 - cociente, 75
 - normado, 47
- espectro, 224
 - continuo, 225
 - puntual, 225
 - residual, 225
- familia
 - equicontinua, 32
 - topológicamente libre, 70
 - total, 69
- Fischer, 192
- forma
 - antilineal, 172
 - bilineal, 172
 - semilineal, 172
 - sesquilineal, 172
- frontera, 8
- fuertemente
 - convergencia, 166
- fuertemente holomorfa, 148
- función
 - uniformemente continua, 53
- funcional de Minkowski, 125
- Gram, 184
- Gram-Schmidt, 184
- Hahn, 83
- Hahn - Banach, 83
- hermitiano, 207, 208

- ínfimo, 209
 - igual, 209
 - mayor, 209
 - supremo, 209
- Hilbert, 171
- hiperplano, 81, 195
- holomorfa
 - débilmente, 147
- homeomorfismo, 10, 11, 54
- homeomorfos
 - espacios, 10
 - uniformemente, 18
- homomorfismo topológico, 73
- homotecia, 54
- identidades polares, 179
- inmersión isométrica, 19
- interior, 7
- invariante, 223
- isometría, 19
- isomorfismo, 73
- isomorfismo isométrico, 73
- Lebesgue, 100, 192
- Legendre
 - polinomio de, 197
- Lindenstrauss, 144
- más fina, 11
- métrica, 4
 - completa, 17
 - discreta, 6
 - euclidiana, 5
 - inducida, 5, 19
 - usual, 5
- métricas equivalentes, 11
- magro, 25
- Minkowski, 62
- norma, 47
 - cociente, 75
 - euclidiana, 47, 49
- normal, 215
- operador
 - adjunto, 160
 - autoadjunto, 207, 208
 - cerrado, 140
 - diagonal, 252
 - hermitiano, 207, 208
 - normal, 215
 - positivo, 209
 - simétrico, 207, 208
 - unitario, 216
- operador lineal acotado, 72
- operador lineal continuo, 72
- ortogonal, 95, 179
 - proyección, 193
- ortonormal, 180
- oscilación, 28
- Pitágoras, 180
- polinomio de Legendre, 197
- positivamente
 - homogénea, 104
- positivo, 209
- precompacto, 37
- Principio de condensación
 - de las singularidades, 144
- Principio de la acotación uniforme, 134
- Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt, 184
- producto interno, 171
 - no degenerado, 171
- proyección, 142
 - ortogonal, 193
- punto

- adherente, 8
- aislado, 8
- de acumulación, 7
- radio
 - espectral, 228
- raro, 25
- recubrimiento, 34
 - abierto, 34
- reflexivo, 98, 114
- resolvente, 224
- Riemann, 192
- Riemann-Lebesgue, 192
- Riesz, 78, 192, 195
- Riesz-Fischer, 192
- Schmidt, 184
- secuencialmente
 - compacto, 41
- seminorma, 104
- separable, 38
- separado
 - Hausdorff, 13
- serie de Fourier, 150
- simétrico, 207, 208
- sistema
 - ortonormal, 180
- sistema fundamental
 - vecindades, 14
- Stone, 191
- Stone-Weierstrass, 191
- subaditiva, 104
- subconjunto
 - cerrado, 7
 - completo, 17
 - de primera categoría, 25
 - de segunda categoría, 25
 - magro, 25
 - raro, 25
 - relativamente compacto, 40
- subespacio
 - afín, 127
 - cerrado, 69
 - completo, 69
 - invariante, 223
 - propio, 225
- subrecubrimiento, 34
- subsucesión, 15
- sucesión
 - Cauchy, 16
- suma
 - directa
 - topológica, 142
- suma de una familia, 175
- suma de una familia , 175
- suma directa topológica, 193
- sumable, 175
- sumado directo, 143
- teorema
 - de Ascoli, 45
 - de Baire, 27
 - de Banach-Steinhaus, 134
 - de Hahn - Banach, 83
 - de Hellinger-Toeplitz, 145
 - de la Aplicación Abierta, 135
 - de Lindenstrauss-Tzafriri, 144
 - de Montel, 31
 - de Pitágoras, 180
 - de Riemann-Lebesgue, 192
 - de Riesz, 78
 - de Riesz-Fischer, 192
 - de Tjonov, 120
 - de Weierstrass, 70
 - del isomorfismo de Banach, 137
 - espectral, 244

- teorema de Stone-Weierstrass, 191
- topológicamente libre, familia, 70
- topología, 7
 - débil, 107
 - débil*, 111
 - fuerte, 107
 - inducida, 7
 - inicial, 105
 - métrica, 9
 - norma, 51
- total, familia, 69
- totalmente acotado, 37
- transformación lineal continua, 72
- Tzafriri, 144
- unión disyunta, 8
- uniformemente
 - continua, 18, 52, 53
 - homeomorfos, 18
- unitario, 216
- vecindad, 8
- Weierstrass, 191
- Zorn, 85