

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Ejercicios guiados de Álgebra Lineal (Vectores)- Febrero de 2012

1. Halle el valor o valores del parámetro k para que el ángulo formado por los vectores $\vec{a} = [k, 1, 2]$ y $\vec{b} = [1, -1, k^2]$ sea de 90° .

Ayuda1.

2. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en el espacio $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$. Encuentre $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

Ayuda2.

3. La figura muestra una caja en el espacio $\mathbb{R}^3$ ubicada en el primer octante. Uno de sus vértices está en el origen $O(0, 0, 0)$, otro en el eje x en el punto $A(3, 0, 0)$, otro en el eje y en el punto $B(0, 2, 0)$ y otro en el eje z en el punto $C(0, 0, 4)$.

- a) Halle las coordenadas de los cuatro vértices restantes.

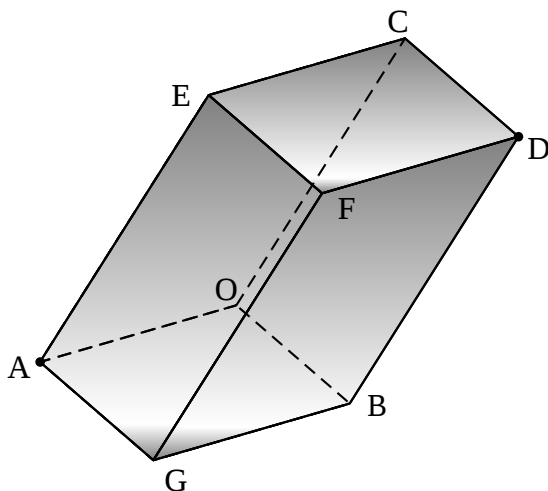
Ayuda3a.

- b) Halle la norma del vector $\vec{AD}$.

Ayuda3b.

- c) Halle el ángulo entre los vectores $\vec{AD}$ y $\vec{BD}$.

Ayuda3c.



4. Considere los vectores $\vec{a} = [0, 0, 3]$ y $\vec{b} = [-1, -2, 3]$ en $\mathbb{R}^3$.

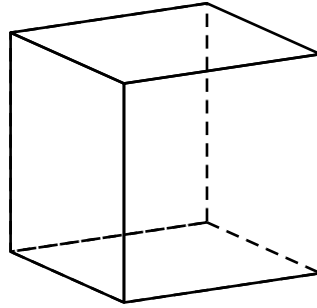
- a) Dibujar en $\mathbb{R}^3$, los vectores en posición estandar.

Ayuda4a.

- b) Si los vectores son trasladados de manera que sus cabezas(puntos terminales) estan en el punto $(1, 3, 5)$, encontrar los puntos correspondientes a sus colas(puntos iniciales).

Ayuda4b.

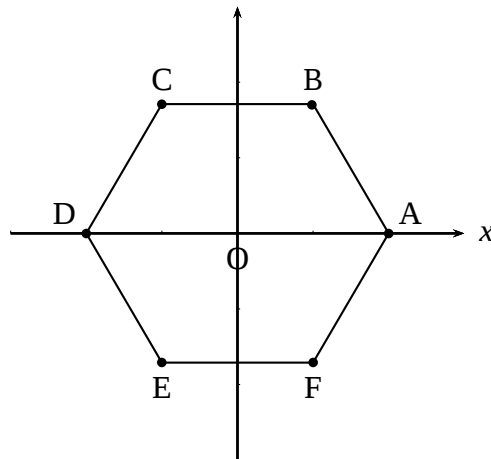
5. Construir un cubo de lado 2 con centro en el origen.



- a) Encontrar las coordenadas de los 8 vértices del cubo.
Ayuda5a.
- b) Calcular el ángulo entre 2 diagonales adyacentes del cubo.
Ayuda5b.
- c) Calcular la longitud de una diagonal del cubo que va desde un vértice hasta el vértice opuesto.

Ayuda5c.

6. En la figura A, B, C, D, E, F , son los vértices de un hexágono regular centrado en el origen. Expresar cada uno de los siguientes vectores en términos de los vectores $\vec{a} = \vec{OA}$ y $\vec{b} = \vec{OB}$.



a) $\vec{AB}$

Ayuda 6a.

b) $\vec{BC}$

Ayuda 6b

c) $\vec{AD}$

Ayuda 6c

d) $\vec{BC} + \vec{DE} + \vec{FA}$.

Ayuda 6d

7. Sean los vectores $\vec{u} = 9\vec{i} + 12\vec{j}$, $\vec{v} = \alpha\vec{i} + 4\vec{j}$. Determine el escalar α tal que:

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

Ayuda 7a

b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

Ayuda 7b

c) El ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea $\frac{\pi}{6}$.

Ayuda 7c

8. Para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, probar que:

a) Los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales, si y solo si, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Ayuda 8a

b) Si $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$, entonces $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$.

Ayuda 8b

c) Si el vector $\vec{u}$ es ortogonal tanto al vector $\vec{v}$ como al vector $\vec{w}$, entonces, el vector $\vec{u}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal de estos, es decir, $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores de la forma $s\vec{v} + t\vec{w}$ con $s, t \in \mathbb{R}$.

Ayuda 8c

Ejercicio 1.

Ayuda1. Realice el producto punto $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Sol1

Solución Ej 1.

Para que formen ángulo recto es necesario que $a \cdot b = 0$, lo cual conlleva a la ecuación cuadrática $2k^2 + k - 1 = 0$, ó equivalentemente $(2k - 1)(k + 1) = 0$, produciendo dos valores $k = 1/2$ y $k = -1$. Volver

Ejercicio 2.

Ayuda2. Calcule $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.

Sol2

Solución Ej 2.

Como

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 16$$

por lo tanto $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 4$.

Volver

Ejercicio 3.

Ayuda3a. El punto G es la cabeza del vector $\vec{OA} + \vec{OB}$. El punto D es la cabeza del vector $\vec{OC} + \vec{OB}$. El punto E es la cabeza del vector $\vec{OA} + \vec{OC}$. El punto F es el punto G subido verticalmente 4 unidades del plano xy . Sol3a

Solución Ej 3a

El punto G es la cabeza del vector $\vec{OA} + \vec{OB}$. Es decir $G = (3, 0, 0) + (0, 2, 2) = (3, 2, 0)$.

El punto D es la cabeza del vector $\vec{OC} + \vec{OB}$. Es decir $D = (0, 0, 4) + (0, 2, 0) = (0, 2, 4)$.

El punto E es la cabeza del vector $\vec{OA} + \vec{OC}$. Es decir $E = (3, 0, 0) + (0, 0, 4) = (3, 0, 4)$.

El punto F es el punto G subido verticalmente 4 unidades del plano xy . Es decir $F = (3, 2, 4)$. Volver

Ejercicio 3.

Ayuda3b.

Escriba las coordenadas del vector $\vec{AD}$ en posición estandar.

Sol3b

Solución Ej 3b

$$\vec{AD} = [D - A] = [-3, 2, 4].$$

Volver

Ejercicio 3.

Ayuda3c. Use la fórmula para calcular el coseno del ángulo entre dos vectores.

Ver (8) pagina 24. Sol3c)

Solución Ej 3c)

Paso 1. Determinamos los vectores $\vec{AD}$ y $\vec{BD}$. Pero por b) $\vec{AD} = [-3, 2, 4]$ y observamos que el vector $\vec{BD}$ no es otro que el vector $\vec{OC}$, es decir, $\vec{BD} = [0, 0, 4]$.

Paso 2. Para calcular el coseno del ángulo formado por tales vectores usamos la fórmula $\cos \theta = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{BD}}{\|\vec{AD}\| \|\vec{BD}\|}$ (ver pag. 24). Por lo que

$$\cos \theta = \frac{16}{\sqrt{29}\sqrt{16}} = \frac{1}{4\sqrt{29}}. \text{ De modo que el ángulo formado es } \theta = \arccos \frac{1}{4\sqrt{29}}$$

Volver

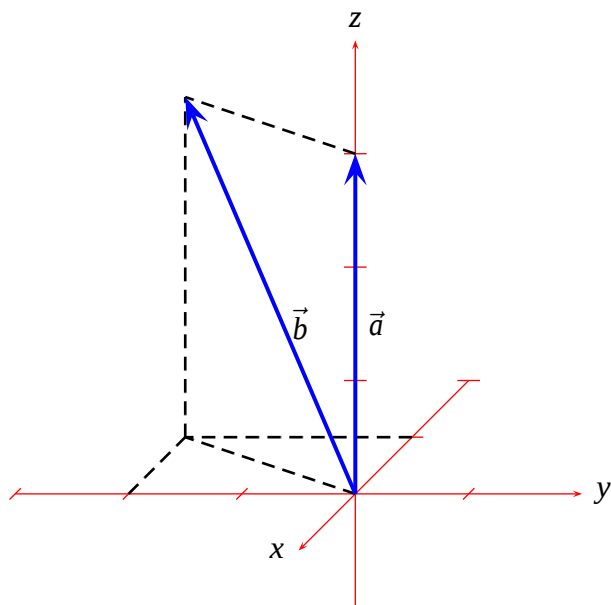
Ejercicio 4.

Ayuda4a. Los vectores deben estar anclados en el origen.

Sol4a

Solución Ej 4a.

Como los vectores deben estar anclados en el origen, sólo debemos ubicar sus puntos terminales.



Volver

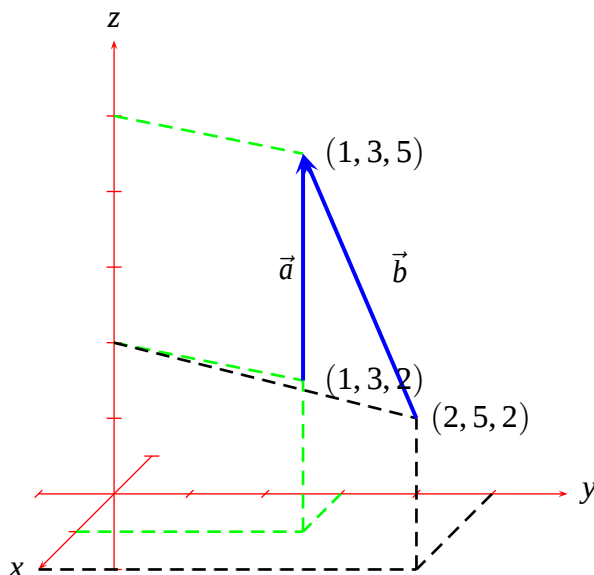
Ejercicio 4.

Ayuda4b. Halle las coordenadas del punto inicial de cada vector de modo tal que las coordenadas de la cabeza del vector menos las coordenadas de la cola del vector produzcan las entradas del vector.

Sol4b

Solución Ej 4b.

Como los vectores deben estar anclados en el origen, sólo debemos ubicar sus puntos terminales.



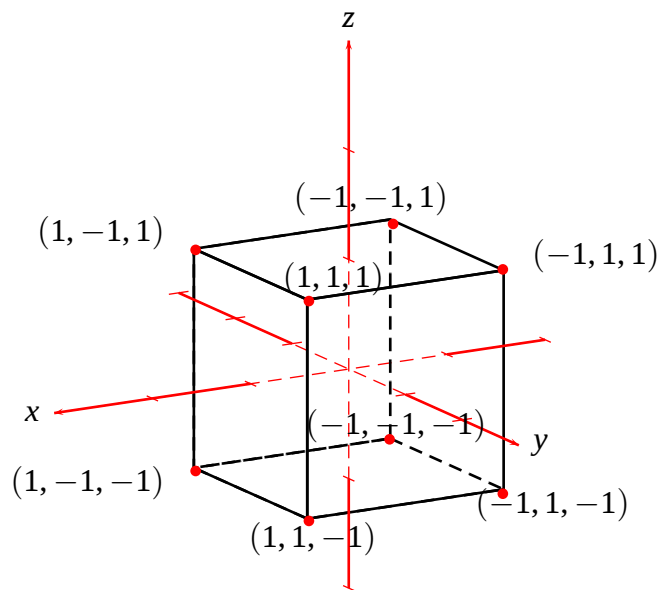
[Volver](#)

Ejercicio 5.

Ayuda5a. Ubique el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ en el centro del cubo.

Sol5a

Solución Ej 5a.



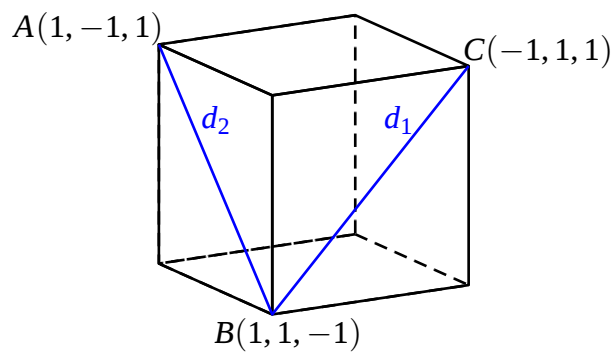
Volver

Ejercicio 5.

Ayuda5b. Suponga por ejemplo que las diagonales inician en el punto $(1, 1, -1)$.

Sol 5b

Solución Ej 5b.



Usamos la fórmula $\cos \theta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|}$ (ver pag. 24).

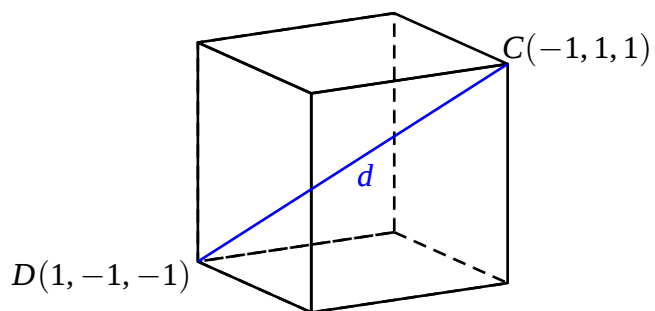
$$\cos \theta = \frac{[0, -2, 2] \cdot [-2, 0, 2]}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}, \text{ es decir, } \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ Volver}$$

Ejercicio 5.

Ayuda5c. Tome por ejemplo la diagonal $\vec{DC}$.

Sol5c

Solución Ej 5c.



En este caso la diagonal d es el vector $\vec{DC} = [-2, 2, 2]$, por consiguiente, la longitud de la diagonal d es $\|\vec{DC}\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Ver pag 20.

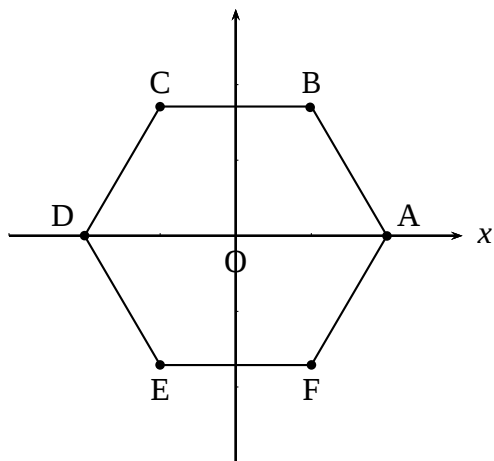
Volver

Ejercicio 6.

Ayuda6a. Coloque los vectores en posición estandar (punto inicial en el origen).

Sol6a

Solución Ej 6a.



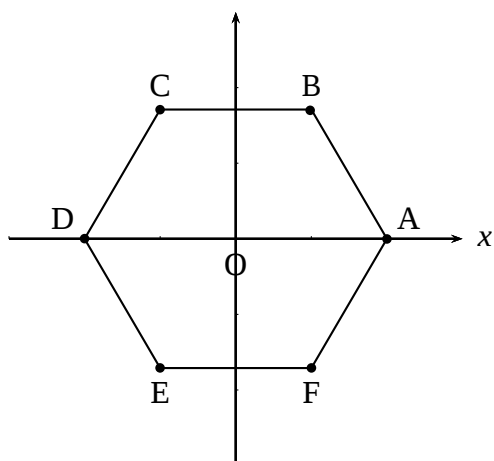
Observe que el vector $\vec{AB}$ es el vector $\vec{OB} - \vec{OA}$ (ver pag. 7, fig. 1.8). Esto es $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Volver

Ejercicio 6.

Ayuda6b. El vector $\vec{BC}$ es paralelo al vector $\vec{OA}$. Sol6b

Solución Ej 6b.



El vector $\vec{BC}$ es el vector $-\vec{OA}$, es decir, $\vec{BC} = -\vec{a}$.

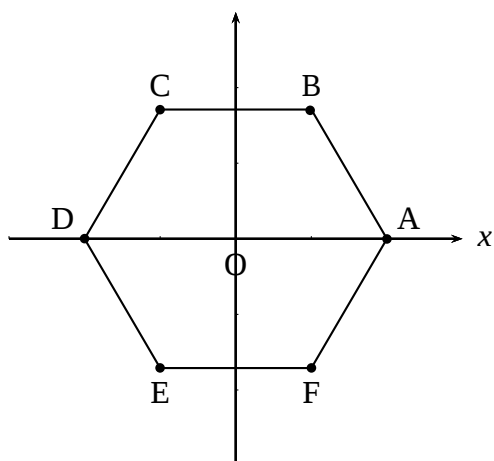
[Volver](#)

Ejercicio 6.

Ayuda6c. El vector $\vec{AD}$ es paralelo al vector $\vec{OA}$.

Sol6c

Solución Ej 6c.



$$\vec{AD} = -2\vec{a}.$$

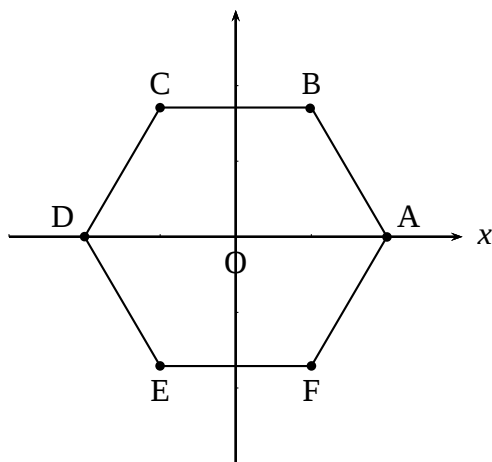
Volver

Ejercicio 6.

Ayuda6d. Escriba los vectores $\vec{BC}$, $\vec{DE}$ y $\vec{FA}$ en términos de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y luego sume.

Sol 6d

Solución Ej 6d.



Observe que $\vec{BC} = -\vec{a}$, $\vec{DE} = \vec{a} - \vec{b}$ y que $\vec{FA} = \vec{b}$. Entonces
 $\vec{BC} + \vec{DE} + \vec{FA} = -\vec{a} + (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{0}$.

Volver

Ejercicio 7.

Ayuda7a. Encuentre un escalar k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$ (Ver pag. 10)

Sol7a

Solución Ej 7a.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán paralelos si existe un escalar k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$, es decir, existe un escalar k tal que, $[9, 12] = k[\alpha, 4]$. Esta igualdad se cumple si $9 = k\alpha$ y $12 = 4\alpha$ (Ver pag. 4), de donde $\alpha = 3$.

Volver

Ejercicio 7.

Ayuda7b. Recuerde que: dos vectores son ortogonales sii su producto punto es nulo (Ver pag. 27).

Sol7b

Solución Ej 7b.

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán ortogonales si $[9, 12] \cdot [\alpha, 4] = 0$, esto es, $9\alpha + 48 = 0$, o sea, $\alpha = -\frac{16}{3}$.

[Volver](#)

Ejercicio 7.

Ayuda7c. Utilizar la fórmula para determinar el ángulo entre vectores. (Ver pag. 24) Sol 7c

Solución Ej 7c.

Se debe despejar α de la ecuación $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\alpha + 16}{5\sqrt{\alpha^2 + 16}}$.

Volver

Ejercicio 8.

Ayuda 8a.

Recuerde que dos vectores son ortogonales si su producto punto es cero. (Ver pag. 27) Sol 8a

Solución Ej 8a

Los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ serán ortogonales si $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$. Aplicando la propiedad distributiva se tiene que: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$, lo cual es cero si y solo si, $\|\vec{u}\| = 0$ y $\|\vec{v}\| = 0$.

Volver

Ejercicio 8.

Ayuda 8b.

Evalúe $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$. (Ver pag. 26) Sol 8b

Solución Ej 8b

Como $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 2 + (\sqrt{3})^2 = 9$, entonces $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$.

Volver

Ejercicio 8.

Ayuda 8c.

Calcule el producto punto $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$. (Ver pag. 26) Sol 8c

Solución Ej 8c

Por la propiedad distributiva (pag. 25) se tiene: $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = s\vec{u} \cdot \vec{v} + t\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 + 0$,
pues $\vec{u}$ es ortogonal tanto a $\vec{v}$ como al vector $\vec{w}$.

Volver