

Álgebra Lineal
Taller 2 — (12/09/2008)

Profesor: j. López.

1. Sea A una matriz 2×2 tal que $A^T A = I$, muestre que la transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x) = Ax$, preserva producto punto, longitudes y ángulos.
2. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
3. Determine cuales de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial de matrices 2×2 son subespacios.

$$a) \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$c) \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a + b = 5 \right\}$$

$$b) \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a + b = 0 \right\}$$

$$d) \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a + b = 0, c \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Determine si el vector v pertenece al espacio generado por los vectores del conjunto H .

$$a) v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$b) v = x - x^3, \quad H = \{x^2, 2x + x^2, x + x^3\}$$

$$c) v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

5. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependiente o independientes.

$$a) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$b) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$c) \{3 - x + 9x^2, 5 - 6x + 3x^2, 1 + x - 5x^2\} \quad V = P_{\leq 2}$$

$$d) \{8 + 3x + 3x^2, x + 2x^2, 2 + 2x + x^2, 8 - 2x + 5x^2\} \quad V = P_{\leq 2}$$

6. Encuentre una base para las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 8x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

7. Encuentre una base para cada uno de los siguientes subespacios y halle su dimensión

$$a) \text{ El subespacio } H = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 - 2a_1 = a_0\} \text{ de } P_{\leq 2}$$

$$b) \text{ El subespacio } H = \{p(x) \in P_3 \mid p(7) = 0\}$$

$$c) \text{ El subespacio } H = \{p(x) \in P_3 \mid p(7) = 0, p(5) = 0\}$$

- d) El subespacio $H = \{p(x) \in P_3 \mid p(7) = 0, p(5) = 0, p(3) = 0\}$
 e) El subespacio $H = \{p(x) \in P_3 \mid p(7) = 0, p(5) = 0, p(3) = 0, p(1) = 0\}$

8. Determine si la transformación dada es o no lineal

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x \end{pmatrix}$

d) $T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad T(A) = AB; B \text{ una matriz fija}$

e) $T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad T(A) = AA^t;$

f) $T : P_2 \rightarrow P_1, \quad T(a + bx + cx^2) = b + cx;$

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$

calcule $T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

10. Encuentre el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$

b) La transformación del ejercicio anterior.

11. Sea V un espacio vectorial. Muestre que si $v \in V$ y r es un escalar que cumple $rv = 0$, entonces $r = 0$ ó $v = 0$.

12. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Muestre que los vectores $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ son linealmente independientes.

13. Encuentre un vector v en $\mathbb{R}^3$ que sea linealmente independiente a los vectores $[2, 1, 2]$ y $[-1, 3, 4]$

14. Sea S_n el espacio vectorial de matrices simétricas $n \times n$, halle la dimensión de este espacio.

15. Considere H y K dos subespacios de V y defina $H + K = \{h + k \mid h \in H, k \in K\}$.

a) Muestre que $H + K$ es un subespacio de V .

b) Si $H \cap K = \{0\}$, muestre que $\dim(H + K) = \dim H + \dim K$

16. Encuentre la representación matricial de la transformación lineal dada, halle el núcleo, la imagen, el rango y la nulidad de la transformación.

a) $T : \mathbb{R} \rightarrow P_3; \quad T(a) = a + ax + ax^3$

b) $T : P_4 \rightarrow P_4; \quad T(p(x)) = xp'(x)$

c) $T : P_3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = [a - b, a + c, b - c]$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad T[x, y] = [x - y, 2x + y, y], \quad B = \{[2, 1], [1, 2]\} \quad B' = \{[1, -1, 0], [0, 2, 0], [0, 2, 5]\}$

e) Ejercicios 20, 22. de la sección 3.4