

Taller 3. Álgebra Lineal (Octubre de 2009).

Prof: J. López

1. Encontrar el vector de coordenadas del polinomio $p(x) = x + x^4 \in P_{\leq 4}$, relativo a la base ordenada $\{1, 2x - 1, x^3 + x^4, 2x^3, x^2 + 2\}$.
2. Conteste (F) falso o (V) verdadero según sea el caso. Si es falso puede justificar mediante un ejemplo. Si es verdadero solo justifique usando la teoría.
 - a) Una transformación lineal entre espacios vectoriales preserva las operaciones de los espacios.
 - b) El espacio vectorial $P_{\leq 10}$ de los polinomios de grado menor o igual a 10 es isomorfo al espacio $\mathbb{R}^n$.
 - c) Sean V y V' espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V'$ es invertible si y solo si $m = n$.
 - d) Sean v y w dos vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V y sea $T : V \longrightarrow V'$ una transformación lineal. Entonces $T(v)$ y $T(w)$ son linealmente independientes en el espacio V' .
 - e) El determinante de una matriz cuadrada es cero si dos de sus vectores renglón o columna son paralelos.
 - f) Si el ángulo entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$ es $\pi/4$, entonces $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|$.
 - g) Si $\det(A) = 2$ y $\det(B) = 3$, entonces $\det(A + B) = 5$ y $\det(AB) = 6$.
 - h) Si A y C son matrices cuadradas, C invertible, entonces $\det(A) = \det(CA^{-1}C)$.
3. Encontrar el valor(es) del parámetro λ para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 4 - \lambda & 3 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{pmatrix}$ sea singular.
4. Dado que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\det(A^{-1}) = 3$. Encuentre A .
5. Mostrar que si A es $n \times n$ antisimétrica e impar, entonces $\det(A) = 0$.
6. Considere el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 6, 3x + z = 6, x + y + z = 6\}$.
 - a) Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - b) Diga si los vectores $[1, 3, 1]$, $[-2, 0, 1]$ y $[3, 1, 1]$ son linealmente dependientes o independientes.
 - c) El vector $[1, 2, 3] \in W$?
 - d) El sistema $A\vec{X} = \vec{b}$, donde $\vec{X} = [x_1, x_2, x_3]$ y $\vec{b} = [1, -2, 1]$, tiene una única solución?

e) Si la matriz A es la matriz de representación estándar de una transformación lineal T , encuentre el vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ cuya imagen por T es el vector $\vec{b} = [1, -2, 1]$.

7. Las siguientes son bases de $\mathbb{R}^3$, $B = \{[1, 1, 1], [1, 1, 0], [1, 0, 0]\}$ y $B' = \{[1, 1, 1], [0, 1, 1], [0, 0, 1]\}$ y $\{[1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1]\}$.

- a) Dado el vector $\vec{a} = [1, 1, 3] \in \mathbb{R}^3$, escribir $\{\vec{a}\}_B$, $\{\vec{a}\}_{B'}$ y $\{\vec{a}\}_{B''}$.
 b) Determinar la matriz de cambio de la base B a la base B' y viceversa.
 c) Determinar la matriz de cambio de la base B a la base B'' y viceversa.

Respuesta: $R_{AA'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $R_{A'A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$R_{AA''} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $R_{A''A} = (R_{AA''})^{-1} = R_{AA''}$.

8. Mostrar usando las propiedades de los determinantes que si

$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\beta \end{pmatrix}$, entonces $|A| = \alpha^2\beta^2$.

Ayuda:

Reste de la columna 1 la columna 2 y de la columna 3 la columna 4 para obtener

$|A| = \alpha\beta \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1+\beta \end{pmatrix} \right|$. Ahora sume a la columna 2 la suma de las colum-

nas 1 y 3 y a la columna 4 sume las columnas 1 y 3. y obtenga $|A| = \alpha\beta \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \end{pmatrix} \right|$

y concluya entonces que $|A| = \alpha^2\beta^2$.

9. Sea A una matriz $n \times n$ tal que $\det(A^{1225}) = 0$. ¿Es A una matriz no singular?

Ayuda:

Por propiedades del determinante $|A^{1225}| = |A|^{1225}$. Concluya entonces que $|A| = 0$ y por lo tanto que A es singular.

10. Determinar la ecuación cartesiana del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que tiene por base $B = \{[1, 1, -2], [-1, 2, -1]\}$.

Ayuda:

Si $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \lambda[1, 1, -2] + \mu[-1, 2, -1]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, lo cual conlleva al sistema lineal de ecuaciones:

$$\lambda - \mu = x_1$$

$$\lambda + 2\mu = x_2 \quad \text{y}$$

$$-2\lambda - \mu = x_3$$

Concluya que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ es la ecuación del subespacio pedida.

11. Considere el espacio $P_{\leq 2}$ de todos los polinomios de grado a lo más 2. Sean $B = \{1, t, t^2\}$ y $B' = \{2 + t + 3t^2, 1 + 2t + t^2, t^2\}$, dos bases de $P_{\leq 2}$. Encontrar la matriz de cambio de la base B a la base B' y viceversa.
12. Sea T una transformación lineal de P en P (el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales) definida mediante $T(p(t)) = tp'(t)$. Calcular los valores y los vectores propios de T .

Ayuda:

Suponga que el polinomio $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ es un vector propio de T , esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $tp'(t) = \lambda p(t)$. Concluya entonces que: $\lambda a_0 = 0$, $\lambda a_1 = a_1$, $\lambda a_2 = 2a_2, \dots, \lambda a_n = na_n$. Observe que si $\lambda \notin \{0, 1, 2, \dots, n\}$, entonces $p(t) = 0$. Si

$\lambda = m$, $m \in \mathbb{N}$, que el vector propio correspondiente a este valor propio es $p(t) = a_m t^m$. Así los valores propios son $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y que los correspondientes vectores propios son de la forma $p(t) = a_k t^k$.

13. Demostrar que si α es un valor propio de A_{nn} , entonces también lo es de su transpuesta A^T . ¿Coinciden los vectores propios asociados?

Ayuda:

a) Utilizar el hecho de que $|A - \alpha \mathbb{I}| = |(A - \alpha \mathbb{I})^T|$.

b) Tome por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $\lambda = 2$ y $\vec{v} = [2, 1]$.

14. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcular el polinomio característico de A así como sus valores propios.
- b) ¿Para qué valores del parámetro a la matriz A es diagonalizable?
- c) Para dichos valores, encontrar una matriz diagonal D y una matriz no singular C tales que $A = CDC^{-1}$.

- d) Si n es un entero positivo arbitrario ¿es A^n diagonalizable? Si es cierto hallar las matrices C y D que la diagonalizan.

Ayuda:

a) Muestre que el polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - a)$.

Los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = a$. Si $a \in \{1, 2\}$, los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ siendo uno de ellos simple y el otro doble.

b) Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la matriz A es diagonalizable (por qué?). Ahora si $a = 1$ la multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = 1$ es 2 y su multiplicidad geométrica es 1 (por qué?). En tal caso A no es diagonalizable. Si $a = 2$, la multiplicidad algebraica de $\lambda_2 = 2$ es 2 y su multiplicidad geométrica es 1 (por qué). En tal caso A tampoco es diagonalizable.

Conclusión A solo es diagonalizable si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

c) Haga ver que los espacios propios correspondientes a los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = a$ con $a \neq 1, 2$ son respectivamente:

$E_1 = \text{sp}\{[a^2, 1, -a]\}$, $E_2 = \text{sp}\{[1 - a, -1, 1]\}$, $E_a = \text{sp}\{[-1, -1, 1]\}$. y que las matrices pedidas son:

$$C = \begin{pmatrix} a^2 & 1 - a & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

c) Como A es diagonalizable existen matrices C y D tales que $A = CDC^{-1}$. Por consiguiente $A^n = CD^nC^{-1}$. Concluya entonces que A^n es diagonalizable y que las

matrices que la diagonalizan son: $C = \begin{pmatrix} a^2 & 1 - a & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$.

15. Considere $V = \mathbb{R}^4$. Sea H el subespacio cuya ecuación en la base canónica es $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$. Calcular la proyección ortogonal sobre H del vector $[1, 1, 1, 1]$.

Ayuda:

El subespacio ortogonal a H , $H^\perp$ está generado por el vector $[1, -2, 2, 1]$. Utilizando un vector unitario en esta dirección $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}[1, -2, 2, 1]$ deducimos que la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = [1, 1, 1, 1]$ en el espacio $H^\perp$ está dada por

$\text{Proy}_{H^\perp} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = 1/5[1, -2, 2, 1]$. Por tanto, $b_H = \vec{v} - b_{H^\perp} = [1, 1, 1, 1] - 1/5[1, -2, 2, 1] = 1/5[4, 7, 3, 4]$.

16. En $\mathbb{R}^4$ se considere el subespacio vectorial H cuyas coordenadas respecto a la base canónica son $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ y $x_1 - x_2 - x_4 = 0$.

a) Hallar una base ortonormal de H .

- b) Calcular el subespacio ortogonal a H ($H^\perp$), así como una base ortonormal de dicho subespacio.
- c) Determinar la matriz de proyección ortogonal Π_A respecto a la base de $\mathbb{R}^4$ resultado de considerar las bases de H y de $H^\perp$ obtenidas en los incisos a) y b).
- d) Determinar la matriz de proyección Π_A respecto a la base canónica.

Ayuda:

a) Observe que $\text{Sp}\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, -1)\}$, luego una base ortonormal de H se consigue aplicando el método de Gram-Schmidt.

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$a'_2 = [0, 1, 0, -1] + \frac{1}{3}[1, 0, -1, 1] = \frac{1}{3}[1, 3, -1, -2].$$

$$a_2 = \frac{1}{15}[1, 3, -1, -2].$$