

Taller 3. Álgebra Lineal. Abril 15 de 2010.

Prof: J. López

1. Sea el sistema lineal $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- a) Determine la solución del sistema utilizando la regla de Cramer.
b) Calcule la inversa de A mediante la matriz adjunta. Halle la solución del sistema, utilizando la matriz A^{-1} .

Respuesta: a) $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

2. Dado que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $\det(A^{-1}) = 3$, encontrar la matriz A .
3. Determine si los puntos $(2,0,1,3)$, $(3,1,0,1)$, $(-1,2,0,4)$ y $(3,1,2,4)$ están en un mismo plano.

Respuesta: No.

4. Encontrar el área del paralelogramo en el plano $\mathbb{R}^2$ acotado por las líneas: $2x + 3y = -1$, $2x + 3y = 3$, $x - 2y = 10$ y $x - 2y = 3$.
5. Sea $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f' \text{ es continua}\}$ y sea $T : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, definida por $T(f(x)) = xf'(x) + f(x)$. Calcular los valores y vectores propios de T .

Respuesta: $f(x) = kx^{\lambda-1}$.

6. Sea $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores propios de una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ con valores propios correspondientes λ_1 y λ_2 , respectivamente. Probar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores linealmente independientes.
7. Encontrar el vector de coordenadas del polinomio $p(x) = x + x^4 \in P_{\leq 4}$, relativo a la base ordenada $\{1, 2x - 1, x^3 + x^4, 2x^3, x^2 + 2\}$.
8. Considere el espacio $V = \mathbb{R}^4$ y H el subespacio cuya ecuación en la base canónica es $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$. Calcule la proyección ortogonal del vector $\vec{a} = [1, 1, 1]$ sobre el subespacio H .

9. Sea $T : P_{\leq 3} \rightarrow P_{\leq 3}$ definida por $T(p(x)) = xp'(x)$, donde $p'(x) = \frac{dp(x)}{dx}$ y sean las bases ordenadas $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ y $B' = \{1, x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1\}$.

- a) Encontrar la matriz de Cambio C de la base B a la base B' .
b) Halle la matriz de representación de T en la base canónica.

- c) Halle las matrices de representación de R_B , $R_{B'}$ y $R_{B,B'}$.
- d) Halle la matriz C tal que $R_{B'} = C^{-1}R_B C$.
- e) Con la matriz $R_{B,B'}$ y el vector de coordenadas, encontrar todas las soluciones $p(x)$ de la ecuación $T(p(x)) = x^3 - 3x^2 + 4x$.
10. Mostrar que si A es $n \times n$ antisimétrica e impar, entonces $\det(A) = 0$.
11. Sea $W = \{[x, y, z] : x = t, y = t, z = t, t \in \mathbb{R}\}$ y $\vec{b} = [1, 2, 3]$.
- a) Hallar una base ortonormal B' para el espacio $W^\perp$ (complemento ortogonal de W).
- b) Escriba el vector de coordenadas del vector $\vec{v} = [-2, 0, 2]$ relativas a la base B' .
- c) Escriba el vector $\vec{b}$ como la suma $\vec{b} = \vec{b}_W + \vec{b}_{W^\perp}$, donde $\vec{b}_W \in W$ y $\vec{b}_{W^\perp} \in W^\perp$.
12. Dada la matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ b & c & 0 \\ c & 0 & b \end{bmatrix}$, halle:
- a) Los valores de b y c que hacen de la matriz A una matriz ortogonal.
- b) Los valores y vectores propios de A , en el supuesto del inciso a).
- c) La matriz Q que diagonaliza ortogonalmente a la matriz A .