

Taller 3. Algebra Lineal. Abril 15 de 2010.

Prof: J. López

1. Sea el sistema lineal $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- a) Determine la solución del sistema utilizando la regla de Cramer.
b) Calcule la inversa de A mediante la matriz adjunta. Halle la solución del sistema, utilizando la matriz A^{-1} .

Respuesta: a) $x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

2. Dado que $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $\det(A^{-1}) = 3$, encontrar la matriz A .

Respuesta: $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3. Determine si los puntos $(2,0,1,3)$, $(3,1,0,1)$, $(-1,2,0,4)$ y $(3,1,2,4)$ están en un mismo plano.

Respuesta: No.

4. Encontrar el área del paralelogramo en el plano $\mathbb{R}^2$ acotado por las líneas: $2x + 3y = -1$, $2x + 3y = 3$, $x - 2y = 10$ y $x - 2y = 3$.

Respuesta: El paralelogramo está generado por los vectores $\vec{v}_1 = [\frac{8}{7}, \frac{4}{7}]$ y $\vec{v}_2 = [3, -2]$. Por tanto el área es el valor absoluto del $\begin{vmatrix} \frac{8}{7} & \frac{4}{7} \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$, es decir, área = 4.

5. Sea $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$ y sea $T : C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$, definida por $T(f(x)) = xf'(x) + f(x)$. Calcular los valores y vectores propios de T .

Respuesta: $f(x) = kx^{\lambda-1}$.

6. Sea $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores propios de una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ con valores propios correspondientes λ_1 y λ_2 , respectivamente. Probar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores linealmente independientes.

Respuesta: Haga ver que la ecuación $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 0$, admite únicamente la solución trivial. (Use la transformación T y el hecho de que $T(v_i) = \lambda_i\vec{v}_i$).

7. Encontrar el vector de coordenadas del polinomio $p(x) = x + x^4 \in P_{\leq 4}$, relativo a la base ordenada $\{1, 2x - 1, x^3 + x^4, 2x^3, x^2 + 2\}$.

Respuesta: $\vec{v}_B = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0]$.

8. Considere el espacio $V = \mathbb{R}^4$ y H el subespacio cuya ecuación en la base canónica es $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$. Calcule la proyección ortogonal del vector $\vec{a} = [1, 1, 1, 1]$ sobre el subespacio H .

Respuesta: $H = \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, H^\perp = \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

$\text{Proy}_H[1, 1, 1, 1] = [\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}].$

9. Sea $T : P_{\leq 3} \rightarrow P_{\leq 3}$ definida por $T(p(x)) = xp'(x)$, donde $p'(x) = \frac{dp(x)}{dx}$ y sean las bases ordenadas $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ y $B' = \{1, x-1, x^2-1, x^3-1\}$.

- Encontrar la matriz de Cambio C de la base B a la base B' .
- Halle la matriz de representacoón de T en la base canónica.
- Halle las matrices de representación de $R_B, R_{B'}$ y $R_{B,B'}$.
- Halle la matriz C tal que $R_{B'} = C^{-1}R_B C$.
- Con la matriz $R_{B,B'}$ y el vector de coordenadas, encontrar todas las soluciones $p(x)$ de la ecuación $T(p(x)) = x^3 - 3x^2 + 4x$.

Respuesta: a) $C_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ b) $R_E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

c) $R_B = R_E,$ $R_{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$ $R_{B,B'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $C_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $C_{B',B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

10. Mostrar que si A es $n \times n$ antisimétrica e impar, entonces $\det(A) = 0$.

11. Sea $W = \{[x, y, z] : x = t, y = t, z = t, t \in \mathbb{R}\}$ y $\vec{b} = [1, 2, 3]$.

- Hallar una base ortonormal B' para el espacio $W^\perp$ (complemento ortogonal de W).
- Escriba el vector de coordenadas del vector $\vec{v} = [-2, 0, 2]$ relativas a la base B' .
- Escriba el vector $\vec{b}$ como la suma $\vec{b} = \vec{b}_W + \vec{b}_{W^\perp}$, donde $\vec{b}_W \in W$ y $\vec{b}_{W^\perp} \in W^\perp$.

Respuesta: a) $W^\perp =$ Espacio nulo de A , donde $A = [1, 1, 1]$,
 $B' = \text{Sp}\{[-1, 1, 0], [-1, 0, 1]\}$, $B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}[-1, 1, 0], \frac{1}{\sqrt{6}}[-1, -1, 2] \right\}$.

b) $v_{B'} = [\sqrt{2}, \sqrt{6}]$.

c) $\vec{b} = [2, 2, 2] + [-1, 0, -1]$.

12. Dada la matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ b & c & 0 \\ c & 0 & b \end{bmatrix}$, halle:

a) Los valores de b y c que hacen de la matriz A una matriz ortogonal.

b) Los valores y vectores propios de A , en el supuesto del inciso a).

c) La matriz Q que diagonaliza ortogonalmente a la matriz A .

Respuesta: a) $b = 1, c = 0$, ó $b = 0, c = 1$.

Respuesta: b) Para el caso $b = 1, c = 0$, los valores propios de la matriz son:
 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$. Espacios propios: $E_1 = \text{Sp}\{[1, 1, 0], [0, 0, 1]\}$,
 $E_{-1} = \text{Sp}\{[-1, 1, 0]\}$.

Respuesta: c) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.