

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Taller 2 de Algebra Lineal - Febrero de 2010. Prof: J. López

1. ¿Existen valores r y s para los cuales el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sea uno ó dos? En caso afirmativo, encontrar dichos valores.

2. Demostrar:

- a) Si A es una matriz 3×5 , entonces los vectores columna de A son linealmente dependientes.
- b) Si A es una matriz 5×3 , entonces los vectores renglon de A son linealmente dependientes.

3. Sea $W = \text{gen}\{\sin x, \cos x\}$.

- a) Demostrar que para cualquier valor de θ , las funciones $g_1 = \sin(x + \theta)$, $g_2 = \cos(x + \theta)$, son vectores de W .
- b) Demostrar que el conjunto $B = \{g_1, g_2\}$ es una base de W .

4. Sea A una matriz $n \times n$ y sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$, n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ expresado como matrices $n \times 1$. ¿Que debe cumplir A a fin de que $A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, A\vec{v}_3, \dots, A\vec{v}_n$ sean linealmente independientes?

5. Determine cuales de los siguientes subconjuntos dotados con las operaciones usuales, son subespacios del espacio vectorial dado. En caso de ser subespacio determine una base.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$

b) $U = \left\{ p(x) \in P_{\leq 3} : \int_0^1 p(x) dx = 0 \right\}, \quad V = P_{\leq 3}.$

6. Encuentre la *ecuación* de la recta que pase por el punto $(2, 3, 4)$ y que sea paralela a los dos planos $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$

7. a) Halle el punto Q en el plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ más cercano al punto $(1, 1, -5)$.

b) Halle la distancia del punto $(1, 1, -5)$ al plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$.

8. a) Encuentre la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que refleja un vector $\vec{v}$ sobre el plano $x - y - z = 0$.

b) Halle la imagen del vector $[1, -1, 0]$.

c) Halle la matriz de representación de T .

- d) Halle el kernel de T .
- e) Halle la imagen de T .
9. Defina $T : M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ por $T(A) = A - A^T$. Demuestre que el núcleo de T es el conjunto de las matrices simétricas y que su imagen es el conjunto de las matrices antisimétricas.
10. a) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$, con la adición definida por $[x, y] \oplus [a, b] = [x + a + 1, y + b]$ y la multiplicación por escalar definida por $r \odot [x, y] = [rx + r - 1, ry]$. Es $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial? Justifique su respuesta.
- b) Sea $H = \{(x, y) : xy = 0\}$. Es H un espacio vectorial con suma y producto por escalar usuales? Justifique su respuesta.
- c) Determine si el conjunto de matrices 3×3 de la forma
$$\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix},$$
 donde cada x puede ser un escalar cualquiera, es un espacio vectorial con suma y producto por escalar usual.
11. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Mostrar que si $v_1, v_2, \dots, v_k$ son k - vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^n$, entonces $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_k)$ son k - vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^m$. ¿Qué puede decirse si los k - vectores son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$?
12. a) Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo sea el conjunto $\{[x, y, z] : x + y - z = 0\}$.
- b) Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el conjunto $\{[x, y, z] : x + y - z = 0\}$.
- c) Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que refleje cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $\pi = \{[x, y, z] : x + y - z = 0\}$.