Grupos de rango de Morley finito, historia de una conjetura

Luis Jaime Corredor, Uniandes

En 1965 Michael Morley demostró su sorprendente teorema de categoricidad que afirma que toda estructura $\mathcal{M}$, o su teoría completa $Th(\mathcal{M})$ es κ-categórica para un cardinal no contable κ si y solo si es λ-categórica para cualquier cardinal no contable λ. Una clave importante en la demostración de su teorema fue la introducción de una noción de dimensión, a valores ordinales, sobre $\mathcal{U}(\mathcal{M})$, el universo de los conjuntos definibles en $\mathcal{M}$, hoy llamado el rango de Morley. Luego John Baldwin demostró que si la estructura $\mathcal{M}$ es $\aleph_1$-categórica, entonces el rango de Morley toma valores finitos, decimos que $\mathcal{M}$ *es de rango de Morley finito*.

$\mathbb{C}$, el campo de los complejos (y su teorī̄a completa, la de los campos algebráicamente cerrados de caracteristica 0), es un ejemplo paradigmático de una estructura $\aleph_1$-categórica. Por tanto los conjuntos definibles de la geometría algebráica (que coinciden con los construibles) tienen rango de Morley finito y es posible demostrar que en este caso, el rango de Morley coincide con la dimensión de Zariski. Por ésta razón es posible una linda aproximación modelo-teoretica a la geometría algebráica. Angus Macintyre demostró un converso: todo campo infinito $\mathbb{K}$, de rango de Morley finito, es un campo algebráicamente cerrado.

Y que pasa con las estructuras de grupos? Gregory Cherlin y Boris Zilber conjeturaron, independientemente, al final de los años 70 que todo grupos infinito simple de rango de Morley finito es un grupo lineal algebráico sobre un campo algebráicamente cerrado. Zilber demostró que todo grupo infinito simple es $\aleph_1$-categórico y Cherlin estubo muy cerca de probar que un grupo simple infinito, de rango de Morley 3 es isomorfo a $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$, para $\mathbb{K}$ un campo algebráicamente cerrado. Ambos evidenciaron la semejanza estructural de estas dos familias de grupos!

Aunque *la conjetura de algebricidad de Cherlin-Zilber* sigue abierta, después de mas de 40 años, se han hecho grandes progresos y se han demostrado casos importantes. En mi charla contaré algo al respecto.