¿Son todos los infinitesimales representables por sucesiones convergentes a cero? *

Xavier Caicedo

Esta nota responde a una pregunta específica del Prof. Yu Takeuchi. Creemos que es relevante también a las preguntas sobre la (correcta) relación entre la concepción del continuo por parte de Cauchy y el moderno análisis no estándar, planteadas por el Prof. Victor Albis.

Si V es un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$, denotamos por

$$^*\mathbb{R}_V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_V$$

al correspondiente modelo de reales no estándar. Si $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión, $[\alpha]$ denotará el real no estándar correspondiente.

Es fácil ver que para ciertos ultrafiltros concretos V la respuesta a la pregunta del título en $^*\mathbb{R}_V$ es negativa. Inicialmente pensamos que esta era el caso para todos los ultrafiltros no principales. Sorprendentemente, suponiendo la Hipótesis del Continuo, es posible construir ultrafiltros V tales que en $^*\mathbb{R}_V$ todos los infinitesimales provienen de sucesiones convergentes a 0. Esto significa que todos los reales de $^*\mathbb{R}_V$ pueden considerarse como provenientes de sucesiones convergentes, si aceptamos a $-\infty$ y $+\infty$ como posibles límites. Demostraremos aquí las afirmaciones anteriores.

En la sección 1 caracterizamos los ultrafiltros para los cuales hay infinitesimales que no provienen de una sucesión convergente a 0, y mostramos como construir ejemplos específicos de tales ultrafiltros.

En la sección 2, usando la Hipótesis del Continuo (HC), construimos ultrafiltros no principales que no satisfacen dicha caracterización. De manera que todos los infinitesimales son esta vez “convergentes”.

En la sección 3 finalizamos la nota con algunas observaciones que incluyen refinamientos al último resultado y varias preguntas.

*Esta nota fué publicada originalmente en la revista: MATEMATICA, ENSEÑANZA UNIVERSITARIA, No. 38 (1986) págs. 28-34.

1. Caracterización de los ultrafiltros para los cuales hay infinitesimales que no provienen de una sucesión convergente a 0.

En el siguiente teorema, sea V un ultrafiltro arbitrario sobre $\mathbb{N}$.

TEOREMA 1. $^*\mathbb{R}_V$ *contiene infinitesimales no representables por una sucesión convergente a* 0 *si y solamente si existe una partición* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de* $\mathbb{N}$ *tal que* $\bigcup_{n\geq k} A_n \in V$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, y si* $F \in V$*,* $F \cap A_n$ *es infinito para algún* n*.*

Demostración*.* "$\Rightarrow$" Supongamos que existe $[\alpha] \in^* \mathbb{R}_V$ tal que $[\alpha] \approx [0]$ pero $[\alpha] \neq [\beta]$ para toda $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\beta(n) \to 0$. Como $[\alpha] \neq [0]$ por hipótesis, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha(n) \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Defina:

$A_0 = \{n : |\alpha(n)| \geq 1\}$,
$A_i = \{n : \frac{1}{i+1} \leq |\alpha(n)| < \frac{1}{i}\}$, $i = 1, 2, 3, ...$

Obviamente $A_0, A_1, A_2, \ldots$ es una partición de $\mathbb{N}$. Además, por ser $[\alpha]$ infinitesimal:

$$\bigcup_{i\geq k} A_i = \{n : |\alpha(n)| < \frac{1}{k}\} \in V, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora, si $F \in V$ debemos mostrar que $F \cap A_n$ es infinito para algún n. Suponga, por contradicción, que $F \cap A_n$ es finito para todo n. Como V debe ser no principal (de lo contrario el único infinitesimal sería $[0]$), F debe ser infinito; por lo tanto, $\alpha \restriction F$ es una subsucesión de α que converge a 0, pues

$$\{n \in F : |\alpha(n)| \geq \frac{1}{k+1}\} \subseteq F \cap [\cup_{i\leq k} A_i]$$

es finito para todo k, por hipótesis. Defina

$$\beta(n) = \begin{cases} \alpha(n) & \text{si} \quad n \in F \\ \frac{1}{n+1} & \text{si} \quad n \notin F \end{cases}$$

entonces $\beta(n) \to 0$ y $[\alpha] = [\beta]$ ya que $\{n : \alpha(n) = \beta(n)\} \supseteq F \in V$. Esto es una contradicción; por lo tanto $F \cap A_n$ debe ser infinito para algún n.

"$\Leftarrow$" Suponga que existe una partición $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface las condiciones del teorema y defina una sucesión de la manera siguiente:

$\alpha(n) = \frac{1}{k+1}$ si $n \in A_k$, $\; k = 0, 1, 2, \ldots$

entonces $[\alpha]$ es infinitesimal pues

$$\{n : |\alpha(n)| \leq \frac{1}{k+1}\} = \bigcup_{i\geq k} A_i \in V, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Además, si β es una sucesión tal que $\beta(n) \to 0$, el conjunto

$$S_i = \{n : |\beta(n)| \geq \frac{1}{i+1}\}$$

debe ser finito para todo i. Sea $F = \{n : \alpha(n) = \beta(n)\}$, entonces los conjuntos:

$$F \cap A_i = \{n : \alpha(n) = \beta(n) = \frac{1}{i+1}\} \subseteq S_i$$

son todos finitos. Por hipótesis $F \notin V$, y por lo tanto $[\alpha] \neq [\beta]$. $\square$

COROLARIO. *Existen ultrafiltros V para los cuáles ${}^*\mathbb{R}_V$ contiene infinitesimales no representables por sucesiones convergentes a* 0.

Demostración. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de $\mathbb{N}$, con cada A_n infinito. Defina un filtro W como sigue:

$F \in W \Leftrightarrow \exists m \; \forall n \geq m \; (A_n \setminus F$ es finito$)$

Es fácil ver que W es un filtro no trivial ($\emptyset \notin W$). Además $\bigcup_{i \geq k} A_i \in W$, ya que $A_n \setminus \bigcup_{i \geq k} A_i = \emptyset$ para $n \geq k$. Sea V un ultrafiltro que extiende a W. Si $F \in V$, $F \cap A_n$ debe ser infinito para algún n, de lo contrario $\mathbb{N} \setminus F \in W \subseteq V$, por definición de W, y tendríamos $\emptyset \in V$. $\square$

2. Ultrafiltros no principales para los cuales todo infinitesimal proviene de una sucesión convergente a 0.

Llamaremos *especial* a un ultrafiltro no principal V si no satisface la condición del Teorema 1; es decir, para toda partición $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\bigcup_{i \geq k} A_i \in V$ para todo k, existe $F \in V$ tal que $F \cap A_n$ es finito para todo n.[1]

TEOREMA 2. (HC) *Existen ultrafiltros especiales sobre* $\mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\{\pi_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una ordenación del conjunto de todas las particiones de $\mathbb{N}$ (existe por HC), con $\pi_\alpha = \{A_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\pi_0 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Si $B \subseteq P(\mathbb{N})$, $\mathcal{F}(B)$ denotará el filtro sobre $\mathbb{N}$ generado por B.

Primero definimos por inducción transfinita una cadena de subconjuntos de $P(\mathbb{N})$:

$$B_0 \subseteq ... \subseteq B_\alpha \subseteq ... \subseteq B_\beta \subseteq \ldots, \alpha < \beta < \omega_1$$

que cumpla

[1] Un ultrafiltro con esta propiedad es en efecto un P-punto en el espacio $\mathbb{N}^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ de ultrafiltros no principales sobre $\mathbb{N}$ (cf. M.Rudin: *Types of ultrafilters.* Ann. Math. Stud. 60 (1966), 147-151).

1. Filtro de Fréchet $\subseteq B_\alpha$
2. $|B_\alpha| = \aleph_0$
3. B_α tiene la propiedad de intersecciones finitas.
4. Si $\bigcup_{i<k} A_i^\alpha \notin \mathcal{F}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$, $k = 1, 2, \dots$, entonces existe $F \in B_\alpha$ tal que $|F \cap A_k^\alpha| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea B_0 = Filtro de Fréchet (obviamente B_0 cumple 1 a 4). Suponga que B_β ha sido definido por todo $\beta < \alpha$ de manera que (1), (2), (3) y (4) sean válidos. Para definir B_α considere:

Caso 1. $\bigcup_{i<k} A_i^\alpha \in \mathcal{F}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces defina $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$. Obviamente (1), (2), (3) y (4) son satisfechas.

Caso 2. $\bigcup_{i<k} A_i^\alpha \notin \mathcal{F}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como α y cada B_β son enumerables,

$$\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta = \{S_1, S_2, \dots\}.$$

Entonces, para todo $n, k \in \mathbb{N}$

$$S_1 \cap \dots \cap S_n \nsubseteq \bigcup_{i<k} A_i^\alpha$$

(de lo contrario, $\bigcup_{i<k} A_i^\alpha \in \mathcal{F}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$ para algún k). Por lo tanto, para todo $n, k \in \mathbb{N}$ existe $m_n > k$ tal que

$$S_1 \cap \dots \cap S_n \cap A_{m_n}^\alpha \neq \emptyset.$$

Defina una sucesión $S = \{x_1, x_2 \dots\}$ tomando:

$$\begin{array}{ll}
x_1 \in S_1 \cap A_{m_1}^\alpha & m_1 > 1 \\
x_2 \in S_1 \cap S_2 \cap A_{m_2}^\alpha & m_2 > m_1 \\
\qquad\vdots & \\
x_n \in S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \cap A_{m_n}^\alpha & m_n > m_{n-1} \\
\qquad\vdots &
\end{array}$$

Obviamente, los x_i son todos distintos y

$$S_1 \cap \dots \cap S_n \cap S \supseteq \{x_n\}.$$

Esto significa que el conjunto

$$B_\alpha = (\textstyle\bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha) \cup \{S\}$$

tiene la propiedad (3) de intersecciones finitas. Las propiedades (1) y (2) son claras para B_α, Finalmente, la propiedad (4) se satisface porque S contiene a lo sumo un elemento de cada A_n^α.

Ahora, como $\bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$ contiene el filtro de Fréchet y tiene la propiedad de intersecciones finitas, puede extenderse a un ultrafiltro no principal V. Es fácil ver que V es especial, pues si π es una partición de $\mathbb{N}$, $\pi = \pi_\alpha$ para algún $\alpha < \omega_1$; y si $\bigcup_{i\geq k} A_i^\alpha \in V$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{i<k} A_i^\alpha \notin \mathcal{F}(\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta)$ para todo k, lo cual implica que existe $F \in B_\alpha \subseteq V$ tal que $|F \cap A_n^\alpha| \leq 1$ (es finito) para todo n. $\square$

COROLARIO (CH) *Existe V no principal tal que todo infinitesimal de ${}^*\mathbb{R}_V$ es de la forma $[\beta]$ con $\beta(n) \to 0$.*

3. Observaciones.

De la condicion $|F \cap A_n| \leq 1$ para todo n, obtenida en la prueba del Teorema 2, y analizando la prueba del Teorema 1, resulta que la sucesión β del último corolario puede escogerse sin repeticiones. Además es claro que podrá escogerse positiva para infinitesimales positivos y negativa para los infinitesimales negativos.

Como todo real no estándar es un infinitesimal, un real estándar más un infinitesimal, o el inverso de un infinitesimal, obtenemos entonces que para un ultrafiltro especial V todos los elementos de ${}^*\mathbb{R}_V$ corresponde a sucesiones convergentes a un real estándar, a $+\infty$, o a $-\infty$.

Note que si $[\beta]$ es finito (acotado por un real estándar) entonces $\mathrm{Est}\beta = \lim_{n\to\infty} \beta(n)$.[2]

Finalizamos estas observaciones con algunas preguntas:

Pregunta 1. ¿Es posible eliminar la Hipótesis del Continuo de la prueba del Teorema 2 ?[3]

Pregunta 2. Llamemos *infinitesimales de Cauchy* a aquellos que provienen de sucesiones convergentes a 0. Dado que la Hipótesis del Continuo es consistente con los axiomas corrientes de la Teoría de Conjuntos, es consistente suponer que éstos son todos. ¿Como sería un desarrollo axiomático del Análisis Infinitesimal, à la Cauchy, que sólo considerase éstos infinitesimales. Es decir, ¿cuál es la teoría natural para la cual ya tenemos el modelo?

Pregunta 3. Para un ultrafiltro arbitrario V, sea F_V el subanillo (local) de los elementos finitos de ${}^*\mathbb{R}_V$. Es fácil ver que

$$C_V = \{[\alpha] \in^* \mathbb{R}_V : \alpha \text{ converge en } \mathbb{R}\}$$

[2] $\mathrm{Est}\beta$ denota la parte estándar de β.

[3] Shelah ha demostrado que se require HC o alguna otra hipótesis conjuntista pues la existencia de P-puntos en $\mathbb{N}^*$ (ver nota 1) es independiente de los axiomas corrientes de la teoría de conjuntos (S. Shelah, *Proper Forcing*, Springer Verlag, Berlin, 1982).

es un subanillo de F_V. Además, si V es especial estos dos subanillos coinciden. ¿Cuál es la relación entre C_V y F_V en general? ¿Es C_V un subestructura elemental de F_V ?

Pregunta 4. ¿Es posible escoger β en el último corolario de manera que sea estrictamente decreciente para infinitesimales positivos? En tal caso todo real no estándar se podrá identificar con una sucesión constante o estrictamente monótona de números reales.[4]

[4] Aunque con ésto no responde la pregunta, el Prof. Takeuchi da un ejemplo de un infinitesimal que no puede representarse por sucesiones monótonas (Y. Takeuchi, *Infinitesimales de Cauchy no representables por sucesiones monótonas*, Matemáticas, Enseñanza Universitaria (nueva serie) 5 (2) (1997), 23-27).