INVESTIGACIONES ACERCA DE LOS CONECTIVOS INTUICIONISTAS

por

Xavier Caicedo F.*

Resumen

Caicedo, X.: Investigaciones acerca de los conectivos intuicionistas. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **19** (75): 705-716, 1995. ISSN 0370-3908.

Se estudia en este trabajo una noción general de conectivo proposicional intuicionista desde la perspectiva semántica de los modelos de Kripke, noción que incluye los conectivos corrientes del Cálculo de Heyting al igual que los conectivos definidos por Gabbay. Las extensiones de la lógica proposicional intuicionista que resultan al añadir estos conectivos preservan los paradigmas esenciales del intuicionismo, como es la propiedad de la disyunción. Se estudian en detalle varios conectivos particulares, y se proporciona para algunos de ellos axiomatizaciones completas que extienden conservadoramente el Cálculo de Heyting. Dichas axiomatizaciones se utilizan para obtener nuevas demostraciones de la caracterización de algunas lógicas intermedias, como la lógica de Dummett para modelos de Kripke sobre órdenes lineales.

Palabras clave: Lógica matemática, Intuticionismo, Conectivos proposicionales, Lógicas intermedias.

Abstract

We propose and study a general notion of intutitionistic sentential connective in the semantical context of Kripke models. This includes the ordinary connectives of Heyting Calculus as well as the connectives introduced by Gabbay. The resulting extensions of intuitionistic propositional calculus preserve the paradigms of intuitionism, for example the disjunction property. We study in detail several specific connectives, providing for them complete axiomatizations which extend conservatively Heyting Calculus. Those axiomatizations may be utilzed to give new proofs of known facts about intermediate logics, as Dummett's logic for Kripke models over linear orders.

Key words: Mathematical logic, Intuitionism, Sentential connectives, Intermediate logics.

Introducción

En contraste con el caso de la lógica clásica, cuyos conectivos proposicionales fundamentales: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\Leftrightarrow$, forman un sistema funcionalmente completo, en la lógica intuicionista pueden darse nuevos conectivos no reducibles a los tradicionales. Esto ha sido observado por varios autores: **Bowen** (1971), **McCullough** (1971), **Rauszer** (1974), **Gabbay** (1977,1981), **Troelstra** (1981) y **López-Escobar** (1985), entre otros. Por supuesto, tal afirmación puede resultar trivial si no se aclara antes qué significa "conectivo intuicionista". Las extensiones del cálculo proposicional clásico por medio de operadores modales inducen extensiones del cálculo proposicional de Heyting, pero no por ello ha de considerarse "intuicionistas" a tales operadores. Debe requerirse por lo menos que las extensiones por nuevos conectivos mantengan los paradigmas que han guiado al intuicionismo, como es la propiedad de la disyunción, tan apreciada por los buenos intuicionistas.

Hemos encontrado dos propuestas principales en la literatura sobre la definicion general de conectivo intuicio-

* Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes. A.A. 4976, Bogotá, Colombia

nista: la de **Gabbay** (1981) y la de **López-Escobar** (1985). Ambas son de carácter sintáctico, dentro de la tradición constructiva del intuicionismo. En este trabajo investigamos una definición semántica, en el contexto de modelos de Kripke, que incluye a los conectivos de Gabbay interpretables en dichos modelos. Para un conjunto parcialmente ordenado fijo P los conectivos propuestos corresponden a ciertos morfismos del clasificador de subobjetos del topos de prehaces $Set^{\mathbf{P}}$ (ver **Freyd** 1972, **Goldblatt** 1984). Sin embargo, nuestros conectivos están definidos *globalmente*, es decir, independientemente del orden parcial de base. Un conectivo será una clase de modelos de Kripke sobre bases arbitrarias con ciertas propiedades de clausura, concepto afín al de cuantificador generalizado para la teoría clásica de modelos (**Lindström** 1969).

La sección 1 es introductoria. En la sección 2 se presenta y justifica la definición de conectivo y se observan sus principales propiedades. En las secciones 3 a 6 axiomatizamos un conectivo de "compatibilidad", obteniendo como corolario una conocida axiomatización de la lógica intermedia asociada a los órdenes parciales dirigidos. En las secciones 7 y 8 estudiamos otros conectivos naturales en modelos de Kripke. Finalmente, en la sección 9 discutimos los conectivos intuicionistas de Gabbay.

1. Preliminares

Aunque suponemos que el lector está familiarizado con la semántica de Kripke para la lógica intuicionista (ver por ejemplo **van Dalen**, 1983), la explicamos brevemente para su beneficio. Dado un conjunto L cuyos elementos llamaremos *letras proposicionales*, $\mathcal{F}(L)$ es el conjunto más pequeño que contiene a L y es cerrado bajo las operaciones sintácticas: $\alpha, \beta \mapsto (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \supset \beta)$ y $\alpha \mapsto \neg\alpha$. En general, no escribiremos los paréntesis más externos de una fórmula, vgr. $\neg\phi \supset (\psi \vee \phi)$ en lugar de $(\neg\phi \supset (\psi \vee \phi))$. Cuando L sea claro del contexto, o arbitrario, escribiremos $\mathcal{F}$ en lugar de $\mathcal{F}(L)$.

Un L-*modelo (proposicional) de Kripke* es una terna $K = (\Sigma, \leq, P)$ donde $(\Sigma, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y P es una función $P: L \to P(\Sigma)$, tal que para todo $\pi \in L$ se tiene

$$x \in P(\pi),\ x \leq y \ \Rightarrow\ y \in P(\pi).$$

Diremos que K es un modelo *sobre* el *marco* $(\Sigma, \leq)$.

DEFINICION. Dado un L-modelo de Kripke K, se define para toda $p \in \Sigma$ y $\varphi \in \mathcal{F}(L)$, por inducción en fórmulas, una relación de *forzamiento:*

$$K \Vdash_p \varphi$$

que se lee K *fuerza* φ *en* p:

Si $\varphi \in L$, $K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow p \in P(\varphi)$

$K \Vdash_p \neg\varphi \Leftrightarrow \forall q \geq p$: $K \nVdash_q \varphi$

$K \Vdash_p \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow K \Vdash_p \varphi$ y $K \Vdash_p \psi$

$K \Vdash_p \varphi \vee \psi \Leftrightarrow K \Vdash_p \varphi$ o $K \Vdash_p \psi$

$K \Vdash_p \varphi \supset \psi \Leftrightarrow \forall q \geq p$: $(K \Vdash_q \varphi \Rightarrow K \Vdash_q \psi)$.

Además se define:

$K \Vdash \varphi$ (K *fuerza* φ) $\Leftrightarrow \forall p \in \Sigma$: $K \Vdash_p \varphi$

$\Gamma \Vdash \varphi \Leftrightarrow \forall K (K \Vdash \Gamma \Rightarrow K \Vdash \varphi)$

$\Vdash \varphi$ (φ es *intuicionistamente válida*) $\Leftrightarrow K \Vdash \varphi$ para todo modelo de Kripke K.

Dos L-modelos de Kripke $K = (\Sigma, \leq, P)$ y $K' = (\Sigma', \leq', P')$ son *isomorfos*, $K \approx K'$, si existe un isomorfismo de orden $f: (\Sigma, \leq) \to (\Sigma, \leq')$ tal que: $p \in P(\pi) \Leftrightarrow f(p) \in P'(\pi)$, para to-da $\pi \in L$. Dado $p \in \Sigma$, definimos:

$$[p) = \{q \in \Sigma : q \geq p\}$$

$$K \restriction [p) = ([p), \leq, P'),\quad \text{donde } P'(\pi) = P(\pi) \cap [p);$$

y si $L' \subseteq L$:

$$K \restriction L' = (\Sigma, \leq, P \restriction L').$$

Las siguientes propiedades fundamentales del forzamiento se demuestran fácilmente por inducción en fórmulas.

LEMA 1.1. *Para toda* $\varphi \in \mathcal{F}(L)$ *y* $p \in \Sigma$ *se tiene*:

a) $K \Vdash_p \varphi \Rightarrow \forall q \geq p : K \Vdash_q \varphi$.

b) $K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow K \restriction [p) \Vdash_p \varphi$.

c) *Si* $K \approx K$ *entonces:* $K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow K' \Vdash_p \varphi$.

d) *Si* $L' \subseteq L$, $\varphi \in \mathcal{F}(L')$ *y* K *es* L-*modelo entonces:* $K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow K \restriction L' \Vdash_p \varphi$.

Las propiedades (a), (b) y (c) del Lema 1.1. tienen por consecuencia la famosa *propiedad de la disyunción* (en el Teorema 2.4 se demostrará un hecho más general):

LEMA 1.2. *Si* $\Vdash \varphi \vee \psi$ *entonces* $\Vdash \varphi$ o $\Vdash \psi$, *para toda* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$.

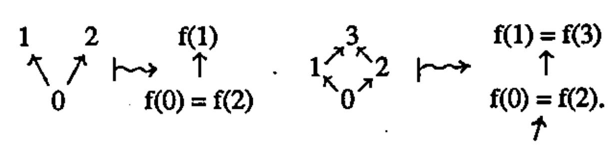
El forzamiento intuicionista es preservado no solamente por isomorfismos sino también por ciertos homomorfismos entre modelos de Kripke. Dados modelos de Kripke $K = (\Sigma, \leq, P)$ y $K' = (\Sigma', \leq', P')$, un *homomorfismo* de K en K' es un homomorfismo de orden $f: (\Sigma, \leq) \to (\Sigma', \leq')$ con la propiedad adicional:

$$p \in P(\pi) \Leftrightarrow f(p) \in P'(\pi), \text{ para toda } \pi \in L.$$

f es un *homomorfismo fuerte* si además $f \restriction [p): [p) \to [f(p))$ e∈ Σ s sobreyectiva para toda $p \in \Sigma$. Es decir,

$$\forall p \in \Sigma\ \forall q \in \Sigma':\ q \geq f(p) \Rightarrow \exists r \geq p\ (f(r) = q).$$

Obsérvese que la sola sobreyectividad de f no es suficiente ni necesaria para que un homomorfismo sea fuerte en cuanto al orden, como lo ilustran los dos ejemplos siguientes:



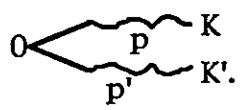
El primero es homomorfismo sobreyectivo de orden, pero no es fuerte, el segundo no es sobreyectivo pero es fuerte.

TEOREMA 1.3 (**Maksimova** 1972, **Kirk** 1980). *Si* $f: K \to K'$ *es un homomorfismo fuerte entonces para toda* $p \in \Sigma$ *y* $\varphi \in \mathcal{F}(L)$ *se tiene* $K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow K' \Vdash_{f(p)} \varphi$.

Demostración. Inducción en fórmulas. Si $\varphi \in L$, entonces $K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow p \in P(\varphi) \Leftrightarrow f(p) \in P'(\pi) \Leftrightarrow K' \Vdash_{f(p)}$

φ. La inducción para $\wedge$, $\vee$ es trivial. Ahora, suponga $K \Vdash_p \varphi \supset \psi$ y sea $q' \geq f(p)$ tal que $K' \Vdash_q \varphi$. Entonces existe $q \geq p$ tal que $f(q) = q'$ y por hipótesis de inducción $K \Vdash_q \varphi$; luego $K \Vdash_q \psi$. Otra vez por hipótesis de inducción: $K' \Vdash_q \psi$. Es decir, $K' \Vdash_{f(p)} \varphi \supset \psi$. Suponga ahora $K \nVdash \varphi \supset \psi$, entonces existe $q \geq p$ tal que $K \Vdash_q \varphi$ y $K \nVdash^p_q \psi$, y por hipótesis de inducción una vez más: $K' \Vdash_{f(q)} \varphi$ y $K' \nVdash_{f(q)} \psi$. Como $f(q) \geq f(p)$ tenemos $K' \Vdash_{f(p)} \varphi \supset \psi$. El paso inductivo para $\neg$ es análogo. ¤

EJEMPLO 1.4. La siguiente aplicación del Teorema 1.3 será muy útil. Sea $K = (\Sigma, \leq, P)$ un modelo de Kripke tal que Σ tiene primer elemento 0, y sea $K' = (\Sigma', \leq', P')$ un modelo isomorfo a K, donde $\Sigma \cap \Sigma' = \{0\} = \{0'\}$. Forme la unión $K \overset{+}{_0} K = (\Sigma \cup \Sigma', \leq \cup \leq', P \cup P')$,



Si p' denota la copia de p en Σ', entonces la función f: $\Sigma \cup \Sigma' \to \Sigma$, tal que $f(0) = 0$, $f(p) = f(p') = p$, es un homomorfismo fuerte de $K \overset{+}{_0} K$ en K. Por lo tanto, tenemos que para toda $\varphi \in \mathcal{F}(L)$:

$$K \overset{+}{_0} K \Vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad K \Vdash \varphi.$$

Por supuesto, podemos amalgamar de esta manera cualquier número de copias de K, obteniendo un modelo lógicamente equivalente a K en el nodo 0.

Es bien sabido que el llamado *Cálculo Proposicional de Heyting* es completo para la validez intuicionista en modelos de Kripke. Como hay muchas versiones de dicho cálculo (ver **van Dalen** 1983, **Gabbay** 1981, **Troelstra** 1981) fijamos la siguiente que denotaremos por H:

Axiomas. Toda fórmula de $\mathcal{F}(L)$ de la forma:

A1 $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$
A2 $(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma))$
A3 $(\alpha \supset \beta) \supset (\neg \beta \supset \neg \alpha)$
A4 $\alpha \supset \neg\neg \alpha$
A5 $\alpha \supset (\neg \alpha \supset \beta)$
A6 $(\alpha \wedge \beta) \supset \alpha$
A7 $(\alpha \wedge \beta) \supset \beta$
A8 $\alpha \supset (\beta \supset (\alpha \wedge \beta))$
A9 $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$
A10 $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$
A11 $(\alpha \supset \gamma) \supset ((\beta \supset \gamma) \supset ((\alpha \vee \beta) \supset \gamma))$.

Reglas. Modus Ponens: de α y $\alpha \supset \beta$ se sigue β.

Escribimos $\Gamma \vdash_H \varphi$ para indicar que de Γ de deduce φ en el sistema H. El siguiente teorema se debe esencialmente a **Kripke** (1965). Véase **van Dalen** (1983, 1986).

TEOREMA 1.5. (*Completitud*) $\Gamma \vdash_H \varphi \Leftrightarrow \Gamma \Vdash \varphi$.

La lógica proposicional intuicionista tiene la llamada *propiedad de modelos finitos* (PMF) con respecto a los modelos de Kripke. Esto significa que si para una fórmula φ de dicho cálculo se tiene $\nVdash \varphi$ entonces hay un modelo finito K tal que $K \nVdash \varphi$ (ver el texto de **van Dalen**, 1983). Esta propiedad implica una forma fuerte del Teorema de Completitud:

$$K \Vdash \varphi \text{ para todo K finito} \Rightarrow \vdash_H \varphi.$$

2. Conectivos en modelos de Kripke

Hemos visto en el Lema 1.1 que la semántica intuicionista en modelos de Kripke goza de las tres propiedades siguientes, las cuales adquieren un significado muy interesante si consideramos los marcos de los modelos de Kripke como estructuras temporales:

I. *Persistencia hacia el futuro*

$$K \Vdash_p \varphi \Rightarrow \forall q \geq p\ K \Vdash_q \varphi.$$

II. *Dependencia exclusiva del futuro*

$$K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow K\restriction[p] \Vdash_p \varphi.$$

Es decir, la validez de una sentencia en un nodo p, una vez establecida, se mantiene, y es además inmune a alteraciones en los nodos no posteriores a p.

III. *Invarianza bajo isomorfismo*

$$K \approx K' \Rightarrow (K \Vdash \varphi \Leftrightarrow K' \Vdash \varphi).$$

Las propiedades II y III podrían reunirse en una sola:

$$K\restriction[p] \approx K'\restriction[p'] \Rightarrow (K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow K' \Vdash_{p'} \varphi).$$

La propiedad I puede también expresarse afirmando que, para cada φ, el conjunto de nodos donde φ es forzada:

$$V_K(\varphi) = \{p \in \Sigma : K \Vdash_p \varphi\}$$

es abierto en Σ con respecto a la topología Σ^+ inducida en Σ por la base de conjuntos $\{[p) : p \in \Sigma\}$. Es natural considerar este conjunto como el *valor de verdad* de φ en K. En este contexto, un modelo $K = (\Sigma, \leq, P)$ para L puede verse como una valuación $V_K: L \to \Sigma^+$ donde $V_K(\pi) = P(\pi)$, y la semántica de Kripke en K como una extensión de V_K a todo $\mathcal{F}(L)$. La propiedad II dice que

$$V_{K\restriction[p)}(\varphi) = V_K(\varphi) \cap [p)$$

llamaremos $V_{K,p}(\varphi)$ a este conjunto.

Tomaremos a I, II y III como propiedades características de la semántica intuicionista. Consideremos ahora un posible conectivo "funcional" $C(\varphi,\psi)$. A la luz de las observaciones anteriores $V_K(C(\varphi, \psi))$ debe ser un abierto (propiedad I) que depende funcionalmente de $V_K(\varphi)$ y $V_K(\psi)$. Por la propiedad II, la pertenencia de p a $V_K(C(\varphi,\psi))$ debe depender solamente de $V_{K,p}(\varphi)$ y $V_{K,p}(\psi)$ en cuanto subconjuntos de $([p), \leq)$ y en efecto solamente del tipo de isomorfía de $([p), \leq, V_{K,p}(\varphi), V_{K,p}(\psi)$, por la propiedad III. Esto implica que el significado de C es independiente de K y está determinado por una propiedad o clase $\mathfrak{C}$ de estructuras parcialmente ordenadas $(X, \leq, S_1, S_2)$, con subconjuntos S_1 y S_2 abiertos en X, cerrada bajo isomorfismos y bajo restricciones de la forma $([q), \leq, S_1 \cap [q), S_2 \cap [q))$, $q \in X$, de manera que:

$$K \Vdash_p C(\varphi, \psi) \Leftrightarrow ([p), \leq, V_{K,p}(\varphi), V_{K,p}(\psi)) \in \mathfrak{C}.$$

Puede suponerse que X siempre tiene primer elemento. Consideraciones semejantes pueden hacerse para conectivos monádicos, ternarios, etc.

Los elementos de la clase $\mathfrak{C}$ pueden verse como L-modelos de Kripke para $L = \{\pi_1, \pi_2\}$ con $P(\pi_i) = S_i$, i = 1, 2. Esto nos permite definir rigurosamente:

DEFINICION 2.1. Un *conectivo intuicionista n-ario* es una familia $\mathfrak{C}$ de modelos de Kripke para $L = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$, con las propiedades siguientes:
i) $K \in \mathfrak{C} \Rightarrow \forall p \in \Sigma$: $K\restriction[p) \in \mathfrak{C}$.
ii) $K' \approx K \in \mathfrak{C} \Rightarrow K' \in \mathfrak{C}$.

Dado un conectivo intuicionista $\mathfrak{C}$, podemos extender $\mathfrak{F}$ a un lenguaje $\mathfrak{F}_C$, donde C es un nuevo símbolo asociado a $\mathfrak{C}$, añadiendo a $\mathfrak{F}$ la siguiente regla de construcción sintáctica:

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{F}_C \Rightarrow C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathfrak{F}_C,$$

y extendiendo la semántica inductivamente:

$$K \Vdash_p C(\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \Leftrightarrow ([p),\leq,V_{K,p}(\varphi_1),\ldots,V_{K,p}(\varphi_n)) \in \mathfrak{C}.$$

Igualmente, si tenemos conectivos intuicionistas $\mathfrak{C}_i$, $i \in I$, podemos formar la nueva lógica $\mathfrak{F}_{\{\mathfrak{C}_i \mid i \in I\}}$, que llamaremos una *extensión de $\mathfrak{F}$ por conectivos.*

EJEMPLO 2.2. En la práctica daremos los conectivos en términos de una propiedad definitoria de la clase $\mathfrak{C}$. Para los conectivos usuales la condición que los define es en cada caso:

$\supset$:	$S_1 \subseteq S_2$
$\wedge$:	$S_1 = S_2 = X$
$\vee$:	$S_1 = X$ o $S_2 = X$
$\neg$:	$S = \emptyset$
$\neg\neg$:	S es topológicamente denso en X.

Los siguientes conectivos no son reducibles a ninguna combinación de $\neg, \wedge, \vee, \supset$. Dejamos al lector verificar que las condiciones que los definen son preservadas por isomorfimos y restriciones. Mostrar que nos son reducibles a los conectivos ordinarios es más delicado:

$K \Vdash_p F\varphi \Leftrightarrow V_{K,p}(\varphi)$ es finito.

$K \Vdash_p E\varphi \Leftrightarrow [p) - V_{K,p}(\varphi)$ es a lo sumo enumerable.

$K \Vdash_p L\varphi \Leftrightarrow V_{K,p}(\varphi)$ es lineal con respecto a $\leq$.

$K \Vdash_p N(\varphi, \psi) \Leftrightarrow |V_{K,p}(\varphi) - V_{K,p}(\psi)| \leq 1.$

$K \Vdash_p M(\varphi, \psi) \Leftrightarrow \forall q,r \geq p\, (K \Vdash_q \varphi$ y $K \Vdash_r \psi \Rightarrow q \leq r)$.

LEMA 2.3. *Sea $\mathfrak{F}'$ una extensión de $\mathfrak{F}$ por conectivos. Entonces para toda $\varphi \in \mathfrak{F}'$* valen las propiedades I, II, III.

Demostración. I. Inducción en fórmulas. El paso inductivo para un conectivo C sería el siguiente: si $K \Vdash_p C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ entonces $M = ([p), \leq, V_{K,p}(\varphi_1), \ldots, V_{K,p}(\varphi_n)) \in \mathfrak{C}$; si $q \geq p$, tenemos también $M\restriction[q) = ([q), \leq, V_{K,q}(\varphi_1), \ldots, V_{K,q}(\varphi_n)) \in \mathfrak{C}$, y así $K \Vdash_q C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

II. Paso relevante: sea $K' = K\restriction[p)$ entonces $K\restriction[q) = K'\restriction[q)$ para todo $q \geq p$, y así, por hipótesis de inducción: $K \Vdash_q \varphi_i \Leftrightarrow K' \Vdash_q \varphi_i$, $\forall q \geq p$, $i = 1, \ldots, n$; es decir, $V_{K,p}(\varphi_i) = V_{K',p}(\varphi_i)$. Por lo tanto, $K \Vdash_p C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \Leftrightarrow ([p), \leq, V_{K,p}(\varphi_1),\ldots, V_{K,p}(\varphi_n)) \in \mathfrak{C} \Leftrightarrow K' \Vdash_p C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

III. Como (II) usando que $\mathfrak{C}$ es cerrada para isomorfismos. ■

EJEMPLO 2.4. Un conectivo como el introducido por **López-Escobar** (1985):

$$K \Vdash_p \neg\varphi \Leftrightarrow \exists p' \leq p\, (K \nVdash_{p'} \varphi),$$

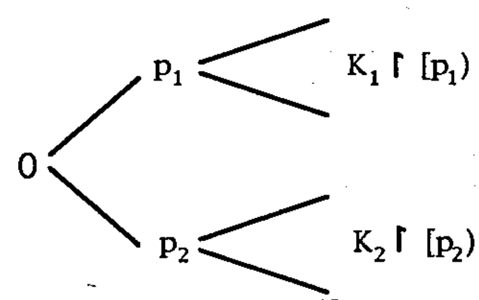
no es un conectivo intuicionista en nuestro sentido, pues aunque $\mathfrak{F}_{\neg}$ cumple I y III no cumple II, ya que su definición en p depende del comportamiento de φ en nodos anteriores a p.

TEOREMA 2.5. *Sea $\mathfrak{F}'$ una extensión de $\mathfrak{F}$ por conectivos, entonces $\mathfrak{F}'$ tiene la propiedad de la disyunción: si $\Vdash \varphi \vee \psi$ entonces $\Vdash \varphi$ o $\Vdash \psi$.*

Demostración. Suponga $\nVdash \varphi$ y $\nVdash \psi$ y sean K_1, K_2 modelos de Kripke tales que $K_1 \nVdash \varphi$ y $K_2 \nVdash \psi$. Por (II), existen p_1 y p_2 tales que $K_1\restriction[p_1) \nVdash_{p_1} \varphi$ y $K_2\restriction[p_2) \nVdash \psi$. Por III, puede suponerse que Σ_1 y Σ_2 son disyuntos. Forme un nuevo modelo de Kripke:

$$K = (\{0\} \cup [p_1) \cup [p_2), \leq', P')$$

donde $0 < p_1$, $0 < p_2$, $[p_1)$, $[p_2)$ mantienen su orden y $P'(\pi) = P_1(\pi) \cup P_2(\pi)$. Por (II) otra vez: $K \nVdash_{p_1} \varphi$ y $K \nVdash_{p_2} \psi$, y por (I): $K \nVdash_0 \varphi$, $K \nVdash_0 \psi$. Por definición, $K \nVdash_0 \varphi \vee \psi$. ■



Un L-modelo de Kripke $K = (\Sigma, \leq, P)$ puede verse como una estructura relacional de primer orden de tipo $\tau = \langle 2, 1, 1, \ldots \rangle$ con un predicado binario $\leq$ y un predicado monádico $P(\pi)$ para cada $\pi \in L$. De esta manera K viene equipado con una noción de satisfacción clásica $\models$ para las fórmulas del cálculo de predicados $L_{\omega\omega}(L^*)$ sobre el lenguaje $L^* = \{R^2, P^1_\pi\}_{\pi \in L}$.

Diremos que un conectivo $\mathfrak{C}$ es *definible en primer orden* si como clase de estructuras es elemental. Este es el caso de los conectivos usuales y de algunos de los del Ejemplo 2.2 como L, M y N. En cambio, F y E en tal ejemplo no son definibles en primer orden. Solamente anotamos el siguiente hecho al respecto.

TEOREMA 2.6. *Si $\mathfrak{F}'$ es una extensión de $\mathfrak{F}$ por conectivos definibles en primer orden, entonces $\{\varphi \in \mathfrak{F}' : \Vdash \varphi\}$ es recursivamente enumerable.*

Demostración. Podemos definir inductivamente una interpretación:

$$*: \mathfrak{F}'(L) \to L_{\omega\omega}(L^*)$$

que asocia a toda $\varphi \in \mathfrak{F}'(L)$ una fórmula $\varphi^*(x)$ de $L_{\omega\omega}(L^*)$ con una variable libre x:

$\pi^* := P_\pi(x)$
$(\varphi \wedge \psi)^* := \varphi^*(x) \wedge \psi^*(x)$
$(\varphi \vee \psi)^* := \varphi^*(x) \vee \psi^*(x)$
$(\varphi \supset \psi)^* := \varphi^*(x) \supset \psi^*(x)$
$(\neg\varphi)^* := \forall y\, (R(x,y) \supset \varphi^*(x))$

y para un conectivo definido por una fórmula $\theta(\leq, S_1, \ldots, S_n)$ de primer orden:

$[C(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]^*(x) := \theta(\leq, \varphi_1^*(x), \ldots, \varphi_n^*(x))^{\{y \mid y \geq x\}}$,

donde la notación $\theta^{\{y \mid y \geq x\}}$ denota la relativización de todos los cuantificadores de θ a $[x)$. Es decir:

$\forall y \ldots$ se cambia a $\forall y\, (y \geq x \supset \ldots)$
$\exists y \ldots$ se cambia a $\exists y\, (y \geq x \wedge \ldots)$. (*)

Es fácil ver que para todo L-modelo de Kripke K y $p \in \Sigma$ se tiene entonces:

$$K \Vdash_p \varphi \Leftrightarrow K \models \varphi^*[p];$$

de esta manera el forzamiento se reduce a la satisfacción clásica y podemos obtener directamente del teorema de completitud de Gödel la recursividad enumerable de las fórmulas intuicionístamente válidas de $\mathcal{F}$, pues:

$$\Vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{L(\varphi)} \models \forall x\, \varphi^*(x)$$

donde $\theta_{L(\varphi)}$ es la sentencia de primer orden:

$$[\text{"R es un orden parcial"} \wedge \bigwedge_{\pi \in L(\varphi)} \forall x \forall y\, (P_\pi(x) \wedge R(x,y) \supset P_\pi(y))\,]$$

y $L(\varphi)$ denota el conjunto de letras proposicionales que ocurren en φ. ¤

Por supuesto, el resultado anterior vale para conectivos definibles en cualquier lógica con relativizaciones cuyas fórmulas válidas sean recursivamente axiomatizables. Por ejemplo el conectivo E del Ejemplo 2.2 que es definible en $L_{\omega\omega}(Q_1)$.

Mc Cullough (1971) ha demostrado que $\mathcal{C}$ es una combinación de los conectivos usuales $\neg, \wedge, \vee, \supset$, si y solamente si tiene una definición de primer orden $\theta(\leq, S_1, \ldots, S_n)$ en la cual "x = y" no aparece como atómica y la atómica "$x \leq y$" sólo aparece como cota inferior de un cuantificador, es decir, en la forma (*) descrita arriba; en otras palabras, θ se construye de $S_1(x), \ldots, S_n(x)$ con los conectivos $\neg, \wedge, \vee, \supset$, y los cuantificadores $\forall y, \exists y, \forall y \geq x, \exists y \geq x$.

3. Axiomatización de un conectivo de compatibilidad

Diremos que dos elementos p, q de un conjunto parcialmente ordenado $(\Sigma, \leq)$ son *compatibles en* $(\Sigma, \leq)$ si existe $r \in \Sigma$ tal que $p, q \leq r$. Si éste no es el caso se dice que p y q son *incompatibles* en $(\Sigma, \leq)$ y escribimos $p \perp q$. Un subconjunto $S \subseteq \Sigma$ se dice *dirigido* si cualquier par de elementos de S son compatibles en $(S, \leq)$.

Consideremos el conectivo intuicionista D cuya definición en modelos de Kripke está dada por

$$K \Vdash_p D\varphi \Leftrightarrow \{q \geq p : K \Vdash_q \varphi\} \text{ es dirigido.}$$

Es fácil ver que éste es un conectivo en el sentido de la Sección 2, pues si S es dirigido y $p \in \Sigma$, entonces $S \upharpoonright [p)$ también lo es. Sea $\mathcal{F}_D$ el conjunto de fórmulas bien formadas que resultan de enriquecer el cálculo proposicional de Heyting con el símbolo de conectivo monádico D, con la semántica arriba indicada.

Nuestra primera observación es que $\mathcal{F}_D$ no tiene la propiedad de modelos finitos y por lo tanto D no puede ser reducible a combinación de los conectivos corrientes. En realidad, la siguiente propiedad más débil que llamaremos de *satisfactibilidad finita* (PSF) falla en $\mathcal{F}_D$: $\exists K \Vdash \varphi \Rightarrow \exists$ K finito tal que $K \Vdash \varphi$ (más aún, este modelo puede reducirse a una valuación clásica).

LEMA 3.1. *Para cualquier extensión por conectivos intuicionistas:* PMF $\Rightarrow$ PSF.

Demostración. Suponga PMF. Si $\exists K \Vdash \varphi$, obviamente $\nVdash \neg\varphi$, y por PMF debe existir K finito con $K \nVdash \neg\varphi$; por lo tanto, existe p tal que $K \upharpoonright [p) \Vdash \varphi$, lo cual nos proporciona un modelo finito de φ. Tomando un nodo maximal obtenemos una valuación clásica. ¤

Problema: ¿PSF $\Rightarrow$ PMF?

LEMA 3.2. $\mathcal{F}_D$ *no tiene* PSF *y, por lo tanto, no tiene* PFM.

Demostración. La sentencia $\neg D(\pi \supset \pi)$ es tal que

$$K \Vdash_p \neg D(\pi \supset \pi) \Leftrightarrow \forall q \geq p\ \exists r, s \geq q\ (r \perp s),$$

luego sus modelos deben contener un árbol binario infinito. ■

COROLARIO 3.3. D *no es definible de los conectivos* $\neg, \wedge, \vee, \supset$.

Demostramos en seguida que $\mathcal{F}_D$ es axiomatizable por medio de un sistema de esquemas estilo Hilbert. La siguiente es la axiomatización propuesta que llamaremos H_D:

Axiomas:

D_0. Axiomas del Cálculo de Heyting (ver Sección 1)
D_1. $D\alpha \supset [(\alpha \supset \neg\beta) \vee (\alpha \supset \neg\neg\beta)]$
D_2. $(\alpha \supset \beta) \supset (D\beta \supset D\alpha)$
D_3. $\neg\alpha \supset D\alpha$
D_4. $D\alpha \supset D\neg\neg\alpha$

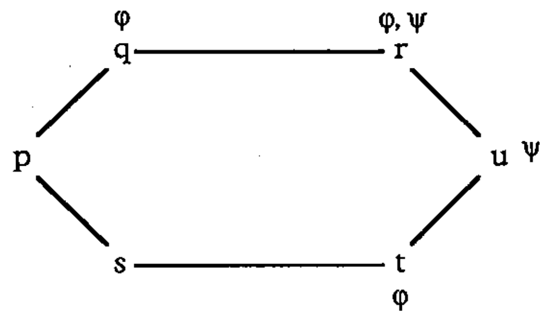
Reglas: Modus Ponens (MP).

$\Gamma \vdash \varphi$ significará que de las premisas en el conjunto Γ se deduce φ con los axiomas y regla indicados.

El *teorema de la deducción*: "si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ entonces $\Gamma \vdash \alpha \supset \beta$", vale automáticamente en H_D por ser MP la única regla de inferencia, véase por ejemplo **Caicedo** (1990).

TEOREMA 3.4. *Para toda* $\varphi \in \mathcal{F}_D$ *si* $\Gamma \vdash \varphi$ *entonces* $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demostración. Es suficiente verificar la validez de los nuevos axiomas en los modelos de Kripke; el resto es rutina.
(D_1) Suponga que $K \Vdash_p D\varphi$ y $K \nVdash_p \varphi \supset \neg\psi$, entonces existen $r \geq q \geq p$ con $K \Vdash_q \varphi$ y $K \Vdash_r \psi$. Ahora, si $s \geq p$ es tal que $K \Vdash_s \varphi$, entonces para todo $t \geq s$ también $K \Vdash_t \varphi$; y por hipótesis existe $u \geq t, r$.



Como evidentemente $K \Vdash_u \psi$, tenemos

$$\forall s \geq p\,[K \Vdash_s \varphi \;\Rightarrow\; \forall t \geq s\, \exists u \geq t\, (K \Vdash_u \psi)];$$

o sea, $K \Vdash_p \varphi \supset \neg\neg\psi$.

(D_2) Es inmediato pues si S es dirigido y $S' \subseteq S$ es abierto entonces S' es dirigido.

(D_3) $\emptyset$ es dirigido.

(D_4) Suponga que $K \Vdash_p D\varphi$ y sean $q, r \geq p$ tales que $K \Vdash_{q,r} \neg\neg\varphi$, entonces existen $s \geq q$, $t \geq r$ tales que $K \Vdash_s \varphi$, $K \Vdash_t \varphi$, lo cual implica, por hipótesis, la existencia de $u \geq s, t$, y por tanto, $u \geq q, r$. ¤

Sea L un conjunto de letras proposicionales, entonces $\mathcal{F}_D(L)$ será el conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}_D$ construidas de las letras de L. Si $\alpha \in \mathcal{F}_D(L)$ diremos que α es una fórmula *en el lenguaje* L. Dado un conjunto de fórmulas A, L(A) será el conjunto de letras proposicionales que figuran en las fórmulas de A.

Sea A un conjunto de fórmulas de $\mathcal{F}_D$ y L un conjunto de letras proposicionales. Diremos que A *es regular para* L si:

i) A es consistente
ii) $A \vdash \varphi$ y $\varphi \in \mathcal{F}_D(L) \Rightarrow \varphi \in A$
iii) $A \vdash \alpha \vee \beta$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{F}_D(L) \Rightarrow \alpha \in A$ ó $\beta \in A$.

Finalmente, diremos que A es α*-consistente* si $A \nvdash \alpha$.

LEMA 3.5. *Dado un conjunto* α*-consistente* A *en el lenguaje* L *y* $L' \supseteq L \cup L(\alpha)$, *entonces existe* $A' \supseteq A$ *con* A' *regular para* L' *y* α*-consistente. Además* $|A'| = |A| + \omega$.

Demostración. Como en van Dalen (1983), Lema de la pág. 252. ∎

DEFINICION 3.6. Sea $\mathbb{L} = \{\pi_\beta \mid \beta < \omega_{\alpha+1}\}$ un conjunto de letras proposicionales. Se define un modelo de Kripke $\mathbb{M} = (M, \leq, P)$ como sigue:

$$M = \{A : L(A) \subseteq \mathbb{L},\ |L(A)| \leq \omega_\alpha, \text{ y A es regular para } L(A)\}$$

$$P(A) = \{\pi_\beta \mid \pi_\beta \in A\}$$

$$A \leq A' \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ L(A) = L(A') \text{ y } A \subseteq A' \\ \text{o} \\ (2)\ L(A) \subsetneq L(A'),\ A \subseteq A' \text{ y para toda } \psi: \\ \qquad D\psi \in A \Rightarrow \neg\psi \notin A'. \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que $\leq$ es un orden parcial considerando casos para la transitividad:

$$A \overset{(1)}{\leq} A' \overset{(1)}{\leq} A'' \Rightarrow A \overset{(1)}{\leq} A''$$

$$\underset{C\psi}{A} \overset{(1)}{\leq} \underset{C\psi}{A'} \overset{(2)}{\leq} \underset{\neg\psi}{A''} \Rightarrow A \overset{(2)}{\leq} A''$$

$$\underset{C\psi}{A} \overset{(2)}{\leq} \underset{\neg\psi}{A'} \overset{(1),(2)}{\leq} \underset{\neg\psi}{A''} \Rightarrow A \overset{(2)}{\leq} A''. \quad ¤$$

TEOREMA 3.7. *Para todo* $A \in M$ *y* φ *en el lenguaje* L(A): $\mathbb{M} \Vdash_A \varphi \Leftrightarrow \varphi \in A$.

Demostración. El caso atómico es evidente. Los pasos inductivos para $\wedge, \vee, \supset, \neg$ no presentan dificultad; en ellos hay que usar la restricción de que φ está en el lenguaje L(A). Debe verificarse sobre todo la implicación y negación que son sensibles al cambio de la relación de orden. Probamos el paso inductivo para D.

($\Rightarrow$) Sea $D\varphi$ en el lenguaje L(A) tal que $\mathbb{M} \Vdash_A D\varphi$ pero $A \nvdash D\varphi$; entonces $A \nvdash \neg\varphi$ (Axioma D_3) y, por lo tanto, $A + \varphi$ es consistente. Por otra parte, para cada μ en el lenguaje L(A), debe tenerse:

$$A + \varphi \vdash \neg\mu \quad \text{o} \quad A + \varphi \vdash \neg\neg\mu \qquad (1)$$

pues de lo contrario existirían conjuntos regulares A', A'' con $L(A') = L(A'') = L(A)$ tales que $A', A'' \supseteq A + \varphi$, $A' \vdash \mu$ y $A'' \vdash \neg\mu$ (esto por el Lema 3.5). Por definición, $A \leq A', A''$ y, por hipótesis de inducción, $\mathbb{M} \Vdash_{A'} \varphi$, $\mathbb{M} \Vdash_{A''} \varphi$, lo cual contradiría $\mathbb{M} \Vdash_A D\varphi$, pues, por ser $A' \cup A''$ inconsistente, A' y A'' son incompatibles para $\leq$. Continuando, tomamos $L' \subseteq \mathbb{L}$, L' enumerable, tal que $L(A) \subsetneq L'$ y $\pi \in L' - L(A)$, entonces $A + \varphi + \pi$ y $A + \varphi + \neg\pi$ son consistentes (de lo contrario tendríamos, por ejemplo, $A + \varphi \vdash \neg\pi$ y, por lo tanto, $A + \varphi \vdash \neg(\varphi \supset \varphi)$, lo cual haría $A + \varphi$ inconsistente). Tomemos $A_0, A_1 \in M$ tales que $A + \varphi + \pi \subseteq A_0$ y $A + \varphi + \neg\pi \subseteq A_1$. Como $A_0 \cup A_1$ es inconsistente, A_0 y A_1 no pueden extenderse a $A' \in M$. Por otra parte, $\mathbb{M} \Vdash_A D\varphi$ y $\mathbb{M} \Vdash_{A_0} \varphi$, $\mathbb{M} \Vdash_{A_1} \varphi$, por hipótesis de inducción; esto significa que debemos tener

$$A \nleq A_0 \quad \text{o} \quad A \nleq A_1.$$

Supongamos el primer caso (el otro es análogo). Entonces existe ψ en L(A) tal que $D\psi \in A$ pero $\neg\psi \notin A_0$. Esto implica que $A + \varphi \nvdash \neg\psi$ y por (1), $A + \varphi \vdash \neg\neg\psi$. Es decir:

$A \vdash \varphi \supset \neg\neg\psi$	T. deducción
$A \vdash D(\neg\neg\psi) \supset D\varphi$	Ax. D_2 + MP
$A \vdash D\psi$	Hipótesis
$A \vdash D\psi \supset D(\neg\neg\psi)$	Ax. D_4
$A \vdash D\varphi$	MP.

Hemos demostrado: $\mathbb{M} \Vdash_A D\varphi \Rightarrow A \vdash D\varphi$.

($\Leftarrow$). Sea φ en L(A) tal que:

$$A \vdash D\varphi \text{ y } \mathbb{M} \nVdash_A D\varphi$$

entonces existen $A', A'' \in M$ tales que $A', A'' \geq A$, $\mathbb{M} \Vdash_{A'} \varphi$ y $\mathbb{M} \Vdash_{A''} \varphi$, pero A' y A'' son incompatibles para $\leq$. Esto implica que $L(A') \neq L(A)$ o $L(A'') \neq L(A)$, pues si $L(A') = L(A'') = L(A)$ la incompatibilidad implicaría $A' \cup A''$ inconsistente, lo cual daría la existencia de μ en L(A) tal que:

$$A' \vdash \mu \ \text{ y } \ A'' \vdash \neg\mu; \qquad (2)$$

pero esto es imposible, pues de $A \vdash D\varphi$ tenemos $A \vdash (\varphi \supset \neg\mu) \vee (\varphi \supset \neg\neg\mu)$ (Ax.D_1) y por estar μ en L(A) y regularidad de A:

$$A \vdash \varphi \supset \neg\mu \quad \text{o} \quad A \vdash \varphi \supset \neg\neg\mu.$$

Es decir, $A + \varphi \vdash \neg\mu$ o $A + \varphi \vdash \neg\neg\mu$ y cualquiera de las dos alternativas contradice (2), pues, por hipótesis de inducción, $A' \vdash \varphi$ y $A'' \vdash \varphi$. Continuando tenemos entonces, por ejemplo, $L(A') \neq L(A)$ (el otro caso es análogo). Como $A \leq A'$ y $D\varphi \in A$ debemos tener por definición $\neg\varphi \in A'$, lo cual es absurdo, pues $A' \vdash \varphi$. ∎

COROLARIO 3.8. *Sea* Γ *un conjunto de sentencias de* $\mathcal{F}_D$ *tal que, para todo modelo de Kripke* K, $K \Vdash \Gamma$ *implica* $K \Vdash \varphi$. *Entonces* $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración. Si $\Gamma \nvdash \varphi$, entonces por el lema existe $\Gamma' \in M$ tal que $\Gamma' \supseteq \Gamma$, $\Gamma' \nvdash \varphi$ y φ pertenece a $L(\Gamma')$. Por el teorema anterior $\mathbb{M} \nVdash_{\Gamma'} \varphi$, pero $\mathbb{M} \Vdash_{\Gamma'} \Gamma$; luego $\mathbb{M} \upharpoonright [\Gamma') \Vdash \Gamma$, y $\mathbb{M} \upharpoonright [\Gamma') \nVdash \varphi$, lo cual es una contradicción. ∎

COROLARIO 3.9. $\vdash \varphi \Leftrightarrow \Vdash \varphi$.

COROLARIO 3.10. H_D *es una extensión conservadora del cálculo de Heyting con la propiedad de la disyunción.*

4. Una aplicación a las lógicas intermedias

Un modelo de Kripke $K = (\Sigma, \leq, P)$ será *dirigido* si $(\Sigma, \leq)$ es dirigido, y será *localmente dirigido* si para todo p $\in \Sigma$, $([p), \leq)$ es dirigido. Defina:

$$\mathfrak{D} \Vdash \varphi \Leftrightarrow K \Vdash \varphi \ \text{ para todo K dirigido}$$

$$\mathfrak{LD} \Vdash \varphi \Leftrightarrow K \Vdash \varphi \ \text{ para todo K localmente dirigido,}$$

Es fácil ver que estos dos conceptos son equivalentes. Evidentemente: $\mathfrak{LD} \Vdash \varphi \Rightarrow \mathfrak{D} \Vdash \varphi$. Por otra parte, si $\mathfrak{D} \Vdash \varphi$ y $K = (\Sigma, \leq, P)$ es localmente dirigido, entonces, para todo $p \in \Sigma$, $K \upharpoonright [p)$ es dirigido y así $K \upharpoonright [p) \Vdash \varphi$, lo cual implica $K \Vdash_p \varphi$. Como p es arbitrario, $K \Vdash \varphi$.

Mostramos ahora que el cálculo intermedio (**KC** en **Gabbay** 1981, **kc** en **van Dalen** 1986):

$$H^+ = \text{cálculo de Heyting + esquema } \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$$

axiomatiza las fórmulas del cálculo de Heyting que son válidas en los modelos dirigidos (localmente dirigidos). En primer lugar, es fácil ver que el esquema $\neg\alpha\vee\neg\neg\alpha$ es válido en los modelos dirigidos; por lo tanto tenemos $\mathfrak{LD} \Vdash H^+$, lo cual implica, por el teorema de validez del cálculo de Heyting, que si $\varphi \in \mathcal{F}$ entonces $\vdash_{H^+} \varphi \Rightarrow \mathfrak{LD} \Vdash \varphi$.

TEOREMA 4.1. *Para todo* $\varphi \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{LD} \Vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash_{H^+} \varphi$.

Demostración. Suponga $\mathfrak{LD} \Vdash \varphi$ entonces $D(\varphi \supset \varphi) \Vdash \varphi$, y, por completitud de $\mathcal{F}_D$, $D(\varphi \supset \varphi) \vdash \varphi$. Sea ahora $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \varphi$ una deducción de φ con premisa $D(\varphi \supset \varphi)$ en $\mathcal{F}_D$. Aplicamos a cada fórmula de la deducción la transformación $\alpha \mapsto \alpha^*$ dada inductivamente por

$$\pi^* = \pi \qquad \text{si } \pi \text{ es letra proposicional}$$
$$(\neg\alpha)^* = \neg\alpha^*$$
$$(\alpha \circ \beta)^* = \alpha^* \circ \beta^* \quad \text{si } \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$$
$$(D\alpha)^* = \alpha^* \supset \alpha^*$$

Evidentemente, $\alpha^* \in \mathcal{F}$ y para los axiomas de $\mathcal{F}_D$ tenemos:

α axioma de H $\Rightarrow \alpha^*$ axioma de H,
$(D_1)^* = (\alpha^* \supset \alpha^*) \supset [(\alpha^* \supset \neg\beta^*) \vee (\alpha^* \supset \neg\neg\beta^*)]$,
$(D_2)^* = (\alpha^* \supset \beta^*) \supset [(\beta^* \supset \beta^*) \supset (\alpha^* \supset \alpha^*)]$,
$(D_3)^* = \neg\alpha^* \supset (\alpha^* \supset \alpha^*)$,
$(D_4)^* = (\alpha^* \supset \alpha^*) \supset (\neg\neg\alpha^* \supset \neg\neg\alpha^*)$.

Pero, $H \vdash (D_2)^*$, $(D_3)^*$ y $(D_4)^*$ y además $H^+ \vdash (D_1)^*$. Por lo tanto, tenemos $D(\alpha \supset \alpha)^* \vdash_{H^+} \alpha_n^*$. Como $D(\alpha \supset \alpha)^* = (\alpha^* \supset \alpha^*) \supset (\alpha^* \supset \alpha^*)$ es trivialmente deducible y $\alpha_n = \varphi$ no contiene a D, entonces $\vdash_{H^+} \varphi$. ∎

Problema. En **Gabbay** (1981) se demuestra que los sistemas anteriores axiomatizan también las fórmulas válidas en los modelos de Kripke con máximo. Esto sugiere estudiar el conectivo M dado por

$$K \Vdash_p M\varphi \Leftrightarrow \{q \geq p : K \Vdash_q \varphi\} \text{ tiene máximo,}$$

que evidentemente tendrá también una versión local $M'\varphi \equiv \varphi \supset M\varphi$, cuyo significado es que $\{q \geq p \mid \Vdash_q \varphi\}$ tiene suficientes maximales. ¿Tiene M las mismas fórmulas válidas que D? Creemos que así es, pues todo modelo dirigido debe poder completarse para que posea un máximo.

5. Un sistema de deducción natural para D

Podemos reemplazar el sistema de tipo Hilbert dado en §3 para $\mathcal{F}_D$ por uno de *deducción natural*, con reglas de eliminación e introducción para el conectivo D:

i) Reglas de deducción natural para el cálculo proposicional de Heyting (véase [Va]).

ii) D- *eliminación:* $\dfrac{D\varphi}{(\varphi \supset \neg\psi) \vee (\varphi \supset \neg\neg\psi)}$.

iii) D- *introducción:* si π es una letra proposicional que no ocurre en las premisas ni en φ entonces

$$\frac{(\varphi \supset \neg\pi) \vee (\varphi \supset \neg\neg\pi)}{D\varphi}.$$

Llamemos $\vdash_N$ la deducibilidad en este sistema. Su equivalencia con $\vdash$ se obtiene de los lemas siguientes.

LEMA 5.1. $\vdash_N D_1, D_2, D_3, D_4$.

Demostración.

a) $\vdash_N D_1$. Por D - eliminación y $\supset$ - introducción.

b) $\vdash_N D_2$. Tome π que no ocurra en φ ni en ψ; entonces tenemos

$$\dfrac{\dfrac{D\psi}{(\psi \supset \neg\pi) \vee (\psi \supset \neg\neg\pi)}\text{D-elim.} \quad \varphi \supset \psi}{\dfrac{(\varphi \supset \neg\pi) \vee (\varphi \supset \neg\neg\pi)}{D\varphi}\text{D-introd.}}$$

El resto sigue por $\supset$-introducción.

c) $\vdash_N D_3$. Tome π que no ocurra en φ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi}{\varphi\supset\neg\pi}}{(\varphi\supset\neg\pi)\vee(\varphi\supset\neg\neg\pi)}}{D\varphi}\ \text{D-introd.}$$

d) $\vdash_N D_4$. Tómese π que no ocurra en φ:

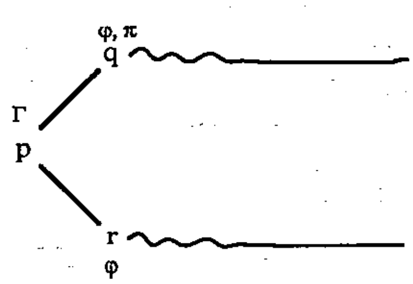
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{D\varphi}{(\varphi\supset\neg\pi)\vee(\varphi\supset\neg\neg\pi)}\ \text{D-elim.}}{(\neg\neg\varphi\supset\neg\neg\neg\pi)\vee(\neg\neg\varphi\supset\neg\neg\neg\neg\pi)}}{(\neg\neg\varphi\supset\neg\pi)\vee(\neg\neg\varphi\supset\neg\neg\pi)}}{D\neg\neg\varphi}\ \text{D-introd.}$$

■

Del lema anterior tenemos que $\Gamma\vdash\varphi\Rightarrow\Gamma\vdash_N\varphi$. Para la otra implicación basta demostrar que D-eliminación y D-introducción son $\vdash$-deducibles. D-eliminación sale de D_1 y MP. Para D-introducción demostramos el siguiente lema y aplicamos la completitud de $\vdash$.

LEMA 5.2. *Sea π una letra proposicional que no ocurre en Γ ni en φ. Si $\Gamma \Vdash (\varphi\supset\neg\pi)\vee(\varphi\supset\neg\neg\pi)$ entonces $\Gamma\Vdash D\varphi$.*

Demostración. Supóngase que $\Gamma \not\Vdash D\varphi$ entonces existen $K=(\Sigma,\leq,P)$ y $p\in\Sigma$ tales que $K\Vdash_p\Gamma$, pero $K\not\Vdash_p D\varphi$, y por lo tanto, tenemos $q, r\geq p$ tales que $K\Vdash_{q,r}\varphi$ y $q\perp r$. Podemos suponer que la letra π no ocurre en ningún nodo de K, pues de lo contrario la eliminamos, sin alteración de las afirmaciones anteriores. Considere ahora el modelo K' que resulta de K añadiendo π en el nodo q y sus sucesores:



entonces $K'\not\Vdash_p\neg\pi$ pues $K'\Vdash_q\pi$, y $K'\not\Vdash_p\neg\neg\pi$ ya que $K'\Vdash_r\neg\pi$; lo cual implica que $K'\not\Vdash_p(\varphi\supset\neg\pi)\vee(\varphi\supset\neg\neg\pi)$, pues $K'\Vdash_{q,r}\varphi$. Pero $K'\Vdash_p\Gamma$, luego $\Gamma\not\Vdash(\varphi\supset\neg\pi)\vee(\varphi\supset\neg\neg\pi)$. ■

Por completitud, se sigue del lema anterior que si $\Gamma\vdash(\varphi\supset\neg\pi)\vee(\varphi\supset\neg\neg\pi)$ y π no ocurre en $\Gamma\cup\{\varphi\}$ entonces $\Gamma\vdash D\varphi$. Dejamos al lector hallar una demostración sintáctica de este hecho. La completitud de las reglas de eliminación e introducción de D nos indican que este conectivo es definible en la lógica proposicional intuicionista de 2° orden (ver **Gabbay 1981**). En efecto, si definimos

$$D\varphi \equiv \forall\pi\,[(\varphi\supset\neg\pi)\vee(\varphi\supset\neg\neg\pi)]$$

las propiedades lógicas de D se deducen usando simplemente las reglas de introducción y eliminación del universal.

Problema. ¿Podemos utilizar la definibilidad de 2° orden de D para demostrar que D está implícitamente definido por sus axiomas? Es decir, si D^o es una copia de D y $D^o{}_1, D^o{}_2, D^o{}_3, D^o{}_4$ son las versiones correspondientes de los axiomas D_1, D_2, D_3, D_4, ¿vale que $D^o{}_i, D_i$ $(1\leq i\leq 4)\vdash_H D\varphi\leftrightarrow D^o\varphi$?

6. Un conectivo de compatibilidad local

Recuérdese que un conjunto parcialmente ordenado $(\Sigma,\leq)$ es *localmente dirigido* si para todo $p, q, r\in\Sigma$ con $p\leq q, r$ se tiene $s\in\Sigma$ con $q, r\leq s$. Considere el conectivo D' definido por $K\Vdash_p D'\varphi \Leftrightarrow \{q\geq p : K\Vdash_q\varphi\}$ es localmente dirigido; este conectivo es reducible a D por medio de la equivalencia:

$$D'\varphi \equiv (\varphi\supset D\varphi)$$

(de manera análoga cualquier conectivo puede ser "localizado" en los nodos). Es posible obtener una axiomatización de D' sin pasar por la equivalencia anterior:

D'_1: $D'\varphi\supset[\varphi\supset(\neg\psi\vee\neg\neg\psi)]$

D'_2, D'_3, D'_4: los análogos de D_2, D_3, D_4.

La validez de estos esquemas es inmediata. Para probar la completitud se utiliza el mismo modelo que para D y se modifica ligeramente la prueba. Obsérvese que los dos conectivos *no* son equivalentes para fórmulas válidas, pues

$$\Vdash D'(\varphi\supset\varphi)\supset D'\varphi \quad \text{y} \quad \not\Vdash D(\varphi\supset\varphi)\supset D\varphi,$$

ya que $D'(\varphi\supset\varphi)$ y $D(\varphi\supset\varphi)$ significan ambas que el modelo debe estar localmente dirigido. Note sin embargo que $D\varphi\Vdash D'\varphi$, $\neg D'\varphi\equiv\neg D\varphi$, y además $\varphi\wedge D'\varphi\equiv\varphi\wedge D\varphi$.

La indefinibilidad de D' (y por tanto otra vez la de D) se obtiene del siguiente resultado.

LEMA 6.1. *Si $\varphi\in\mathcal{F}$ es satisfactible en algún modelo de Kripke, lo es en un modelo sobre $(\Sigma,\leq)$ que no es localmente dirigido.*

Demostración. Dado $K\Vdash\varphi$, podemos suponer, sin pérdida de la generalidad, que $K=(\Sigma,\leq,P)$ donde $(\Sigma,\leq)$ tiene primer elemento 0 y por lo menos dos elementos. Si no, se trabaja con $K\upharpoonright(p)$ para algún $p\in\Sigma$ y se añade un elemento 0 debajo de p, con $0\in P(\pi)$ si y solamente si $p\in P(\pi)$. La función que envía 0 a p y es la identidad en el resto es un homomorfismo fuerte del modelo extendido al original, así que satisface φ por el Lema 1.3. Finalmente, el modelo $K \underset{0}{+} K$ construido en el Ejemplo 1.4 no es localmente dirigido y sin embargo satisface φ. ■

COROLARIO 6.2. D' *no es definible de los conectivos* $\neg,\wedge,\vee,\supset$.

Demostración. La fórmula $D'(\pi\supset\pi)$ es válida en un modelo de Kripke si y solamente si éste es localmente dirigido. ■

7. Conectivos de cardinalidad

Para cada cardinal k podemos introducir un conectivo intuicionista C^k, muy natural:

$$K \Vdash_p C^k\varphi \Leftrightarrow |\{q \geq p : K \Vdash_q \varphi\}| \leq k.$$

Así, $C^0\varphi \equiv \neg\varphi$. Sin embargo, para $k \geq 1$ ningún C^k es definible de los conectivos de Heyting, pues $\mathcal{F}_{C^k}$ no tiene la propiedad de modelos finitos ya que:

$$K \Vdash_p \neg C^k\varphi \Rightarrow \forall q \geq p\ |\{r \geq q : K \Vdash_r \varphi\}| > k \geq 1,$$

lo cual impide la existencia de maximales entre los nodos de los modelos de $\neg C^k\pi$.

En esta sección mostramos como axiomatizar el conectivo C^1 y dejamos abierto el problema de axiomatizar C^k para $k \geq 2$. Nótese que C^k es definible en primer orden y así $\mathcal{F}_{C^k}$ es recursivamente axiomatizable para $k \in \omega$. Además, C^ω es interpretable en $L_{\omega\omega}(Q_1)$, lo que da la axiomatizabilidad de $\mathcal{F}_{C^\omega}$. Sin embargo, no tenemos idea de cómo sería una axiomatización por esquemas para estos conectivos, excepto C^1, ni si $\mathcal{F}_{C^{<\omega}}$ axiomatizable, donde $K \Vdash_p C^{<\omega}\varphi \Leftrightarrow \{q \geq p : K \Vdash_q \varphi\}$ es finito.

La axiomatización propuesta para C^1 es la siguiente (escribiremos C en lugar de C^1).

Axiomas:

C_0. Axiomas del cálculo de Heyting,
C_1. $C\varphi \supset [(\varphi \supset \psi) \vee (\varphi \supset \neg\psi)]$
C_2. $(\varphi \supset \psi) \supset (C\psi \supset C\varphi)$
C_3. $\neg\varphi \supset C\varphi$.

Reglas: Modus Ponens.

La validez de los axiomas es fácil de verificar, pues si $K \Vdash_p C\varphi$, o el conjunto $\{q \geq p : K \Vdash_q \varphi\}$ es vacío, en cuyo caso se tiene $K \Vdash_p \neg\varphi$ y se sigue trivialmente C_1, o bien consiste de un nodo maximal q, y sabemos que en los nodos maximales se cumplen las leyes clásicas, en particular, $K \Vdash_q \psi \vee \neg\psi$, que da $K \Vdash_q (\varphi \supset \psi) \vee (\varphi \supset \neg\psi)$.

Note que el axioma C_1 es más fuerte que el correspondiente D_1. Por otra parte, el esquema C_4 correspondiente a D_4: $C\varphi \supset C\neg\neg\varphi$, no es válido, como lo ilustra el modelo:

$$1 \rightarrow \underset{\pi}{2}$$

donde $\Vdash C\pi$ pero $\nVdash C\neg\neg\pi$, pues $\Vdash \neg\neg\pi$. Estos hechos sirven para demostrar que el axioma D_4 es independiente de D_1, D_2, D_3, pues si se tuviese $D_1, D_2, D_3 \vdash_H D_4$ entonces tendríamos $C_1, C_2, C_3 \vdash C_4$ que violaría la vali- Otros intdez del sistema para C^1.

La completitud del sistema para C^1 se desprende del siguiente resultado.

TEOREMA 7.1. *Para el modelo introducido en la prueba del Teorema 3.7 y* $\varphi \in \mathcal{F}_C$ *se tiene* $\mathbb{M} \Vdash_A \varphi \Leftrightarrow A \vdash \varphi$.

Demostración. Defínase $\mathbb{M}$ como en la prueba del teorema 3.7 con C haciendo el papel de D. Probamos otra vez que para toda $\varphi \in L(A)$ con $A \subseteq \mathcal{F}_C$ se tiene

$$\mathbb{M} \Vdash_A \varphi \Leftrightarrow \varphi \in A.$$

Solamente verificaremos el paso inductivo para C.

($\Rightarrow$) Sea $C\varphi \in L(A)$ tal que

$$\mathbb{M} \Vdash_A C\varphi \text{ pero } A \nvdash C\varphi;$$

entonces $A \nvdash \neg\varphi$ (axioma C_3) y así $A + \varphi$ es consistente. Si $\pi \notin L(A) = L(A + \varphi)$ entonces $A + \varphi + \pi$ y $A + \varphi + \neg\pi$ son consistentes. Tómese $A_0, A_1 \in M$, con $A + \varphi + \pi \subseteq A_0$, $A + \varphi + \neg\pi \subseteq A_1$; entonces, por hipótesis de inducción, $M \Vdash_{A_0} \varphi$, $M \Vdash_{A_1} \varphi$. Como $A_0 \neq A_1$, debemos tener que $A \not\geq A_0$ o $A \not\geq A_1$. Supongamos $A \not\geq A_0$; entonces existe $C\psi \in A$ con $\neg\psi \notin A_0$, lo cual implica $A + \varphi \nvdash \neg\psi$. Por otra parte, *debemos tener* $A + \varphi \vdash \psi$, de lo contrario, tendríamos $A', A'' \in M$ con $A' \supseteq A + \varphi + \psi$ y $A'' \supseteq A + \varphi$, $A'' \nvdash \psi$ y $L(A') = L(A'') = L(A)$. Obviamente, $A', A'' \geq A$, $A' \neq A''$ y $\mathbb{M} \Vdash_{A'} \varphi$, $\mathbb{M} \Vdash_{A''} \varphi$, por hipótesis de inducción, contradiciendo que $M \Vdash_A C\varphi$. Finalmente:

$A \vdash \varphi \supset \psi$	
$A \vdash C\psi \supset C\varphi$	$A_2 + MP$
$A \vdash C\psi$	pues $C\varphi \in A$
$A \vdash C\varphi$	MP.

($\Leftarrow$) Suponga $A \vdash C\varphi$, $\mathbb{M} \nVdash_A C\varphi$; entonces existen $A', A'' \in M$ con $A', A'' \geq A$, $\mathbb{M} \Vdash_{A'} \varphi$, $\mathbb{M} \Vdash_{A''} \varphi$ y $A' \neq A''$. Por hipótesis de inducción,

$$A' \vdash \varphi, \quad A'' \vdash \varphi.$$

Sea $\psi \in A' - A''$ (o viceversa), entonces tenemos $A \vdash (\varphi \supset \psi) \vee (\varphi \supset \neg\psi)$. Si $L(A') = L(A)$ esto implicaría: $A + \varphi \vdash \psi$ o $A + \varphi \vdash \neg\psi$ por regularidad de A; pero como $A' \supseteq A + \varphi$ y $\psi \in A'$ no puede darse el segundo caso y tenemos $A + \varphi \vdash \psi$, que da $A'' \vdash \psi$, una contradicción, pues $\psi \in A' - A''$ y A'' es regular. Luego $L(A') \neq L(A)$. Como $A' \geq A$ y $C\varphi \in A$ esto implicaría $\neg\varphi \in A'$, otro absurdo. ∎

¿Es posible utilizar el modelo anterior para probar que la unión de los dos sistemas axiomáticos para $\mathcal{F}_D$ y $\mathcal{F}_C$ es completa para $\mathcal{F}_{D,C}$?

Observaciones.

1. El axioma C_3 puede reemplazarse por $C(\bot)$, pues $C_2 + C(\bot) \vdash_H C_3$ y $C_3 \vdash C(\bot)$.

2. C^k tiene su versión local C^{*k}, por ejemplo,

$$K \Vdash_p C^{*1}\phi \Leftrightarrow \{q \geq p : K \Vdash_q \varphi\} \text{ es discreto}$$
$$\Leftrightarrow \forall q \geq p\ (K \Vdash_q \varphi \Rightarrow q \text{ es maximal}).$$

Otros interesantes conectivos de cardinalidad son:

$$K \Vdash_p \overline{C}^k \varphi \Leftrightarrow |[p) - V_K(\varphi)| \leq k,$$

en particular, $\overline{C}^0 \varphi \equiv \varphi$. Nótese que $\overline{C}^k \varphi \Vdash C^k \neg\varphi$, pero no vale la equivalencia. También podemos definir una forma fuerte de densidad:

$$G_k\varphi \equiv \neg\neg\varphi \wedge \overline{C}^k \varphi.$$

Otras variantes son:

$$\Vdash_p H_k\varphi \Leftrightarrow \{q \geq p \mid \Vdash_q \varphi\} \text{ tiene altura} \leq k,$$

$$\Vdash_p W_k\varphi \Leftrightarrow \{q \geq p \mid \Vdash_q \varphi\} \text{ tiene anchura} \leq k,$$

donde la *altura* de $(\Sigma, \leq)$ es el supremo de los cardinales de las cadenas de $(\Sigma, \leq)$ y la *anchura* es el supremo de los cardinales de las co-cadenas (conjuntos de incompatibles). También:

$$\Vdash_p E_k \varphi \Leftrightarrow [p) - \{q \geq p : \Vdash_q \varphi\} \text{ tiene altura} \leq k,$$

que indica el tiempo máximo de "espera" para que se cumpla φ (si se cumple); $\neg\neg\varphi \wedge E_k\varphi$ dá otra forma fuerte de densidad.

8. Conectivos de linealidad

Considere el conectivo L definido por

$$K \Vdash_p L\,\varphi \Leftrightarrow \{q \geq p : K \Vdash_q \varphi\} \text{ está linealmente ordenado.}$$

Creemos que la siguiente es una axiomatización completa por esquemas para L, pero no hemos podido demostrarlo:

L_1. $L\alpha \supset [(\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \vee (\alpha \supset (\gamma \supset \beta))]$
L_2. $(\alpha \supset \beta) \supset (L\beta \supset L\alpha)$
L_3. $\neg\alpha \supset L\alpha$
L_4. $\neg L \neg\neg\alpha \supset \neg L\alpha$.

Nos contentaremos con axiomatizar el conectivo relacionado:

$$L^*\varphi = L\neg\neg\varphi,$$

por el sistema de axiomas:

L^*_1. $L^*\alpha \supset [(\neg\neg\alpha \supset (\beta \supset \gamma)) \vee (\neg\neg\alpha \supset (\gamma \supset \beta))]$
L^*_2. $(\alpha \supset \beta) \supset (L^*\beta \supset L^*\alpha)$
L^*_3. $\neg\alpha \supset L^*\alpha$
L^*_4. $L^*\alpha \supset L^*\neg\neg\alpha$.

El método de demostración es similar al que empleamos para D en la Sección 3. Se demuestra la existencia de extensiones regulares α-consistentes para el nuevo sistema deductivo y se define el modelo $\mathbb{M}$ de la misma manera que antes.

TEOREMA 8.1. *Si* $\varphi \in L(A)$, *en* $\mathcal{F}_{L^*}$, *entonces* $\mathbb{M} \Vdash_A \varphi \Leftrightarrow A \vdash \varphi$.

Demostración. Indicamos solamente el paso inductivo para L^*.

($\Rightarrow$) suponga que $\mathbb{M} \Vdash_A L^*\varphi$ pero $A \nvdash L^*\varphi$, entonces $A \nvdash \neg\varphi$ por L^*_3 y así $A + \varphi$ es consistente. Además, para toda $A' \in M$, con $A' \supseteq A + \varphi$, se tiene $A' \vdash \varphi$ y, por hipótesis de inducción: $M \Vdash_{A'} \varphi$. Por lo tanto:

i) $\{A' \in M \mid A \leq A', \varphi \in A'\}$ está totalmente ordenado (hipótesis).

ii) Para toda $\psi \in L(A)$ se tiene

$$A + \varphi \vdash \neg\psi \text{ ó } A + \varphi \vdash \neg\neg\psi,$$

pues de lo contrario podemos hallar $A', A'' \supseteq A + \varphi$ con $L(A) = L(A') = L(A'')$, $A', A'' \in M$, $\psi \in A'$ y $\neg\psi \in A''$, utilizando el lema de regularidad. En realidad, se tiene algo más fuerte que no utilizamos aquí: para toda ψ, $\mu \in L(A)$ se tiene

$$A + \varphi \vdash (\psi \supset \mu) \text{ o } A + \varphi \vdash (\mu \supset \psi).$$

Lo mismo se prueba para toda $A' \in M$, $A' \geq A$, con $\psi, \mu \in L(A')$:

$$A' + \varphi \vdash (\psi \supset \mu) \text{ o } A' + \varphi \vdash (\mu \supset \psi).$$

Considere ahora $\pi_1, \pi_2 \notin L(A)$, $\pi_1 \neq \pi_2$; entonces

$$A + \varphi + \pi_1 \nvdash \pi_2 \text{ y } A + \varphi + \pi_2 \nvdash \pi_1$$

y podemos hallar $A_i \in M$, $A_i \supseteq A + \varphi + \pi_i$, $i = 1, 2$, con $A_1 \nvdash \pi_2$, $A_2 \nvdash \pi_1$.

Evidentemente, no podemos tener $A \leq A_1$ y $A \leq A_2$ por (i). Digamos que $A \nleq A_1$; esto significa que existe $L^*\psi \in A$ tal que $\neg\psi \notin A_1$. Entonces $A + \varphi \nvdash \neg\psi$ y, por (ii), tenemos $A + \varphi \vdash \neg\neg\psi$, y así:

$A \vdash \varphi \supset \neg\neg\psi$,	(T. de la deducción)
$A \vdash L^*\neg\neg\psi \supset L^*\varphi$,	L^*_2
$A \vdash L^*\psi \supset L^*\neg\neg\psi$,	L^*_4
$A \vdash L^*\varphi$,	pues $L^*\psi \in A$.

($\Leftarrow$) Suponga $A \vdash L^*\varphi$ y $M \nVdash_A L^*\varphi$, entonces existen $A', A'' \in M$ con $A \leq A', A''$ tales que $\mathbb{M} \Vdash \neg\neg\varphi$, pero $A' \nleq A''$, $A'' \nleq A'$. Halle $\psi \in A' - A''$, $\mu \in A'' - A'$, entonces $A' \nvdash \psi \supset \mu$, $A'' \nvdash \mu \supset \psi$. Ahora, si $\psi, \mu \in L(A)$ entonces por L^*_1 y regularidad de A:

$$A \vdash \neg\neg\varphi \supset (\psi \supset \mu) \text{ o } A \vdash \neg\neg\varphi \supset (\mu \supset \psi).$$

Como $A', A'' \vdash \neg\neg\varphi$ por hipótesis de inducción, el primer caso implicaría $A' \vdash \psi \supset \mu$, y el segundo implicaría $A'' \vdash \mu \supset \psi$, una contradicción. Concluimos que $\psi \notin L(A)$ o $\mu \notin L(A)$, es decir, $L(A') \neq L(A)$ o $L(A'') \neq L(A)$. Supongamos $L(A') \neq L(A)$, entonces como $A' \geq A$ y $L^*\varphi \in A$ debemos tener $\neg\varphi \in A'$, un absurdo, pues, por hipótesis, $\neg\neg\varphi \in A'$, que es consistente. ∎

De una manera análoga a como hicimos para el sistema KC en la Sección 4, podemos deducir de la completitud de nuestro sistema para L^* la completitud del sistema de **Dummett** (1959):

$$H + (\mu \supset \psi) \vee (\psi \supset \mu)$$

para las fórmulas de $\mathcal{F}$ válidas en los modelos de Kripke lineales, o equivalentemente, las válidas en los modelos *localmente lineales*: donde $\forall\, p \in \Sigma$: $([p), \leq)$ es lineal.

Otros posibles conectivos intuicionistas de linealidad son:

$$\Vdash_p L'\varphi \Leftrightarrow (V_p(\varphi), \leq) \text{ es localmente lineal,}$$

$$\Vdash_p L^{\omega}\varphi \Leftrightarrow (V_p(\varphi), \leq) \text{ es lineal de tipo } \omega,$$

$$\Vdash_p L^{k}\varphi \Leftrightarrow (V_p(\varphi), \leq) \text{ es una cadena de cardinal} \leq k,$$

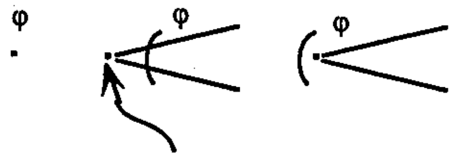
$$\Vdash_p L^{\alpha}\varphi \Leftrightarrow (V_p(\varphi), \leq) \text{ es una cadena de cofinalidad } \omega_\alpha.$$

9. Conectivos de Gabbay

Ninguno de los nuevos conectivos que hemos presentado hasta ahora en este trabajo tiene la propiedad de modelos finitos. El siguiente ejemplo, debido a **Gabbay** (1981) goza de dicha propiedad:

$$K \Vdash_p G\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} |[p)| = 1 \text{ y } K \Vdash_p \varphi, \text{ o} \\ |[p)| \geq 2 \text{ y } \forall\, q > p: K \Vdash_q \varphi, \end{cases}$$

es decir, ocurre una de las situaciones representadas en la figura siguiente:



sólo p fuera de φ.

Es fácil ver que G es reducible al conectivo: $K \Vdash_p \overline{C}^{1}\varphi \Leftrightarrow |[p) - V_k(\varphi)| \leq 1$, introducido en la Sección 7, pues:

$$G\varphi \equiv \neg\neg\varphi \wedge \overline{C}^{1}\varphi$$
$$\equiv \varphi \vee (\neg\neg\varphi \wedge \overline{C}^{1}\varphi).$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}_G$ es un fragmento de $\mathcal{F}_{\overline{C}^1}$. Observe que $\neg G\varphi \equiv \neg\varphi$, así que *no* podemos argumentar como en la Sección 3 para concluir que G no tiene la propiedad de modelos finitos.

TEOREMA 9.1. (Gabbay 1981, Teorema 21, p.137). G *es un nuevo conectivo con la propiedad de los modelos finitos, axiomatizado por el siguiente sistema:*

G_1. $G\alpha \supset [\beta \vee (\beta \supset \alpha)]$
G_2. $(\alpha \supset \beta) \supset (G\alpha \supset G\beta)$
G_3. $\alpha \supset G\alpha$
G_4. $G\alpha \supset \neg\neg\alpha$.
G_5. $((G\alpha \supset \alpha) \wedge \neg\neg\alpha) \supset \alpha$.

Gabbay (1981, p. 168) afirma que G es definible en el cálculo proposicional de 2° orden por:

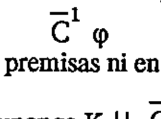
$$G\pi \equiv \forall\alpha(\alpha \vee (\alpha \supset \pi)) \qquad (*)$$

lo cual es obviamente falso, pues en la estructura de un solo nodo en el cual no se fuerza π no vale $G\pi$, pero vale (por ser clásica la lógica) $\forall\alpha\ (\alpha \vee (\alpha \supset \pi))$. En realidad, (*) es la definición correcta de 2° orden para $\overline{C}^{1}$, lo cual significa que las dos reglas siguientes son válidas:

$\overline{C}^{1}$-eliminación: $\dfrac{\overline{C}^{1}\ \varphi}{\psi \vee (\psi \supset \varphi)}$

$\overline{C}^{1}$- introducción: $\dfrac{\pi \vee (\pi \supset \varphi)}{\overline{C}^{1}\ \varphi}$, si π no ocurre en las premisas ni en φ.

Para ver la primera, suponga $K \Vdash_p \overline{C}^{1}\varphi$ entonces $\forall\, q > p$: $K \Vdash_p \varphi$. Caso 1: $K \Vdash_p \psi$, entonces $\Vdash_p \psi \vee (\psi \supset \varphi)$. Caso 2: $K \not\Vdash_p \psi$, entonces $\forall q \geq p$: $\Vdash_q \psi \Rightarrow q > p \Rightarrow \Vdash_q \varphi$. Es decir, $\Vdash_p \psi \supset \varphi$ y así $\Vdash_p \psi \vee (\psi \supset \varphi)$. Para ver la segunda, suponga que no vale $\overline{C}^{1}\varphi$. Entonces existe $q > p$ tal que $\not\Vdash_q \varphi$



Tome una letra proposicional nueva π y póngala en [q) entonces $\not\Vdash_p \pi$, $\not\Vdash_p \pi \supset \varphi$ y así $\not\Vdash_p \pi \vee (\pi \supset \varphi)$.

Problema 1. Mostrar que estas reglas, junto con las naturales para $\mathcal{F}$ axiomatizan a $\mathcal{F}_{\overline{C}^1}$.

Problema 2. ¿Es la siguiente una axiomatización completa por esquemas para $\overline{C}^{1}$?

1. $\overline{C}^{1}\alpha \supset (\beta \vee (\beta \supset \alpha))$
2. $(\alpha \supset \beta) \supset (\overline{C}^{1}\alpha \supset \overline{C}^{1}\beta)$
3. $\alpha \supset \overline{C}^{1}\alpha$,

es decir, los tres primeros axiomas de G. Dejamos al lector comprobar su validez para $\overline{C}^{1}$. Por supuesto $\overline{C}^{1}\alpha \supset \neg\neg\alpha$ no es válido; precisamente, puede fallar cuando $|[p)| = 1$.

Dado un conectivo C, sea $H_C = \{\varphi \in \mathcal{F}_C : \Vdash \varphi\}$. Considerando a H_C como un sistema axiomático con Modus Ponens como su única regla, la definición general de conectivo de Gabbay puede expresarse como sigue:

DEFINICION 9.2. C es un *conectivo de Gabbay* si cumple:

1. H_C es una extensión conservadora de H.
2. H_C tiene la propiedad de la disyunción.
3. Para toda $\varphi \in \mathcal{F}$, $(C(\pi_1, \ldots, \pi_n) \leftrightarrow \varphi) \notin H_C$.
4. $H_C + \{\alpha \vee \neg\alpha : \alpha \in \mathcal{F}_C\} \vdash C(\pi_1, \ldots, \pi_n) \leftrightarrow \varphi$, para alguna $\varphi \in \mathcal{F}$.
5. $H_C + H_{C'} \vdash C(\pi_1, \ldots, \pi_n) \leftrightarrow C'(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, donde $H_{C'}$ consiste de todas las fórmulas de H_C con C substituida por un símbolo distinto C'.

Gabbay (1981, lema 8, p. 132) muestra que las cinco condiciones se cumplen para G. Por otra parte, hemos visto que las condiciones 1, 2, 3 valen para todos los conectivos como los hemos definido. Sin embargo, las propiedades 4 y 5 no se cumplen en general. Por ejemplo, el conectivo D de la Sección 3 no cumple 4 (no sabemos si cumple 5).

LEMA 9.3. H_D *no cumple la condición 4 de Gabbay.*

Demostración. Si H_D cumpliese 4, entonces habría una fórmula $\psi \in \mathcal{F}(\{\pi\})$ tal que:

$$H_D + \{\alpha \vee \neg\alpha\} \Vdash D\pi \leftrightarrow \psi.$$

Como $D\pi$ es válida en modelos de solo un nodo, y $H_D + \{\alpha \vee \neg\alpha\}$ también, entonces ψ sería válida en modelos de un nodo. Pero $\psi \in \mathcal{F}$ y $H_D + \{\alpha \vee \neg\alpha\}$ es completo para tautologías clásicas; luego se tendría: $H_D + \{\alpha \vee \neg\alpha\} \vdash \psi$, y así $H_D + \{\alpha \vee \neg\alpha\} \Vdash D\pi$. Veamos que éste no es el caso. Considere la semántica que consiste en interpretar las fórmulas en el árbol binario infinito, de manera que las letras proposicionales se interpreten siempre por $P(\pi) = \emptyset$ o $P(\pi) = \Sigma$ (todo el conjunto). Por inducción se puede probar que esta propiedad se hereda, es decir, $V(\varphi) = \emptyset$ o $V(\varphi) = \Sigma$ para toda $\varphi \in \mathcal{F}_D$. El único paso inductivo no trivial es el de D. Pero si $V(\varphi) = \emptyset$ entonces para todo $p \in \Sigma$: $\Vdash_p \neg\varphi$, y así $\Vdash_p D\varphi$. Si $V(\varphi) = \Sigma$ entonces *para todo* p existen q, r $\geq$ p tales que $q \perp r$, $\Vdash_q \varphi$ y $\Vdash_r \varphi$. Por lo tanto p $\not\Vdash_p D\varphi$ para todo p, y así $V(D\varphi) = \emptyset$ (esto muestra que para tal semántica $D\varphi \equiv \neg\varphi$). En fin, $\{\alpha \vee \neg\alpha\}$ y por supuesto H_D son válidos para esta semántica, pero $D\pi$ no lo es. ∎

Si π_0 es una letra proposicional fija, se tiene:

$$H_D + \{\alpha \vee \neg\alpha\} \mid\vdash D\varphi \leftrightarrow (\varphi \supset D(\pi_0 \vee \neg\pi_0)).$$

pero $H + (D\varphi \leftrightarrow (\varphi \supset D(\psi \vee \neg\psi))$ permite deducir los axiomas de H_D, como el lector puede comprobar. Por tanto, tenemos una lógica modal clásica:

$$H_D + \{\alpha \vee \neg\alpha\} \equiv \text{Cálculo Clásico} + \{ D\varphi \leftrightarrow (\varphi \supset D(\psi \vee \neg\psi)) \}.$$

Se desprende de la prueba del teorema anterior que la semántica natural para esta lógica modal "clásica" consistirá de los modelos de Kripke $K = (\Sigma, \leq, P)$ que cumplen:

i) $(\Sigma, \leq)$ es el árbol binario o $(\Sigma, \leq)$ es dirigido,
ii) $\forall\pi : P(\pi) = \emptyset$ o $P(\pi) = \Sigma$.

con la interpretación original para D.

En realidad no creemos que la condición 4 de la definción de Gabbay sea natural. Cualquier conectivo se puede transformar fácilmente en uno que la cumple; por ejemplo, si definimos:

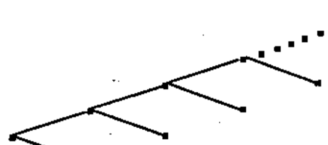
$$D^*\varphi = \varphi \vee (\neg\neg\varphi \wedge D\varphi),$$

entonces $\varphi \mid\vdash D^*\varphi \mid\vdash \neg\neg\varphi$ y, por lo tanto, $\{\alpha \vee \neg\alpha\}$ fuerza $D^*\varphi \equiv \varphi$. Pero no vemos por qué D^* tiene más derecho que D a ser considerado un conectivo intuicionista.

La condición 5 parece más razonable, pero hay conectivos semánticamente diferentes con las mismas fórmulas válidas, por ejemplo la negación satisface los axiomas del conectivo C^1 de la Sección 7 (pero por supuesto la negación también satisface leyes que C^1 no satisface). Curiosamente, Gabbay acepta entre sus conectivos (Gabbay 1977, pág 169) uno que no satisface 5. Se trata de un conectivo de densidad fuerte introducido por Kaminski (1988):

$$K \mid\vdash_p B\varphi \Leftrightarrow \{q \geq p : \mid\vdash_q \varphi\} \text{ intersecta toda cadena maximal que pasa por p.}$$

Evidentemente, $\mid\vdash B\varphi \supset \neg\neg\varphi$, pero el recíproco no vale, como lo ilustra el árbol infinito.



pues si R es la rama superior, $\Sigma - R$ es denso pero no intersecta a R.

TEOREMA 9.4. **(Kaminski** 1988, teoremas 1, 3, 4) B *está axiomatizado por:*

B_1. $\varphi \supset B\varphi$
B_2. $B\varphi \supset \neg\neg\varphi$
B_3. $BB\varphi \supset B\varphi$
B_4. $B(\varphi \supset \psi) \supset (B\varphi \supset B\psi)$.

COROLARIO 9.5. B *no cumple la condición 5 de Gabbay.*

Demostración. B_1 a B_4 son válidos para $B = \neg\neg$.

Reconocimiento. Algunos de los resultados aquí consignados (en las secciones 3 y 8) mejoran y completan resultados obtenidos originalmente por **Fernando Zalamea** (1986) y **José Iovino** (1988) en trabajos adelantados bajo nuestra orientación en la Universidad de los Andes.

Bibliografía

Bowen, K. A. 1971. *An extension of the intuitionistic propositional calculus.* Indagatione Mathematicae, V. **33**: 287-294.

Caicedo, X. 1990. *Elementos de Lógica y Calculabilidad,* Segunda Edición, Una Empresa Docente.

Van Dalen, D. 1983, *Logic and Structure,* Second Edition. Springer-Verlag.

__________ 1986. *Intuitionistic Logic.* Cap. III 4 in *Handbook of Philosophical Logic,* Gabbay and Guenthner (eds.). Reidel Publ. Co.

Dummett, M. A. 1959. *A propositional calculus with a denumerable matrix.* Jour. of Symbolic Logic **24**: 96-107

Fitting, M. Ch. 1969. *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing.* North Holand.

Freyd, P. 1972. *Aspects of topoi.* Bulletin of the Australian Math. Soc. **7**: 1-76.

Gabbay, D. M. 1977. *On some new intuitionistic propositional connectives, I.* Studia Logica **36**: 127-139.

__________ 1981, *Semantical Investigations in Heyting Intuitionistic Logic.* Reidel Publ. Co.

Goldblatt, R. 1984. *Topoi, the Categorical Analysis of Logic.* North Holland.

Iovino, J. 1988. *Conectivos Intuicionistas y Lógica Proposicional Intuicionista de Segundo Orden.* Preprint, Uniandes.

Kaminski, M. 1988. *Nonstandard connectives of intuitionistic propositional logic.* Notre Dame Jour. of Formal Logic **29** (3): 309-331.

Kirk, R. E. 1980. *A characterization of the classes of finite frames that are adequate for the intuitionistic logic.* Z. Math. Logik Grundl. Math. **26** (6): 197-501.

Kripke, S. 1965. *Semantical analysis of intuitionistic logic.* In *Formal systems and recursive functions* (eds. J. Crossley and M. Dummet). North Holland, Amsterdam: 92-130.

Lindström, P. 1969. *First order predicate logic with generalized quantifiers.* Theoria **32**: 186-195

López-Escobar, E.G.K. 1985, *On intuitionistic sentential connectives, I.*. Rev.Col. de Mat. **19**: 117-130.

Maksimova, L. 1972. *Pretabular superintuitionistic logic.* Algebra i Logika **11**: 558-570.

McCullough, D. P. 1971. *Logical connectives of intuicionistic propositional logic.* Jour. of Symbolic Logic **36**: 5-20.

Rauzer, C. 1974. *A formalization of propositional calculus of* H-B *logic.* Studia Logica **33**: 22-33.

Troelstra, A. S. 1981. *On a second order propositional operation in intuitionistic logic.* Studia logica **40**: 113-140.

Zalamea, F. 1986. *Conectivos intuicionistas.* Preprint, Uniandes.