

COMPLETUD DE DOS CÁLCULOS LÓGICOS DE LEIBNIZ *

(*Completeness of Two Logical Systems of Leibniz*)

Xavier CAICEDO
Alejandro MARTÍN

Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Apartado Aéreo 4876, Bogotá, Colombia.
E-mail xcaicedo@uniandes.edu.co, martinmaldonado@yahoo.com

RESUMEN: Este trabajo se encuadra dentro de una nueva visión de la lógica de Leibniz, la cual pretende mostrar que sus escritos fueron ricos no solamente en proyectos ambiciosos (Característica Universal, Combinatoria, Mathesis), sino también en desarrollos logico-matemáticos concretos. Se demuestra que su “Característica Numérica” que asigna pares de números a las proposiciones categóricas es una semántica para la cual la silogística aristotélica es correcta y completa, y que el sistema algebraico presentado en *Fundamentos de un Cálculo Lógico* es esencialmente una versión de una lógica algebraica similar a la de Boole.

Descriptores: *lógica, historia, Leibniz, silogística, álgebra de la lógica, corrección, completud.*

ABSTRACT: This work is a contribution to a new view of Leibniz’s logic, pretending to show that his writings were not only rich in projects (Característica, Combinatoria, Mathesis), but also in concrete logico-mathematical developments. We prove that his “Numerical Characteristic”, assigning pairs of numbers to terms of categorical propositions, is a complete and correct semantics for aristotelian syllogistic, and the algebraic system presented in *Fundamentals of a Logical Calculus* is essentially a complete versión of boolean algebraic logic.

Keywords: *logic, history, Leibniz, syllogistic, algebra of logic, soundness, completeness.*

SUMARIO.

1.

Completud del Sistema de los números característicos

1.1. Formalización de la lógica aristotélica

1.2. Sistema deductivo

1.3. Semántica numérica de Leibniz

1.4. Completud

2.

Completud de una Lógica Algebraica de Leibniz

2.1. Sistema algebraico implícito en *Fundamentos de un Cálculo Lógico*

2.2. Desarrollo del sistema

2.3. Semántica proposicional para el sistema ecuacional de Leibniz

* Posprint del artículo: *Completeness of two logical systems of Leibniz*, THEORIA – Segunda Época, Vol 1613 (2001) 539 – 558 (se han corregido algunos errores).

Este trabajo nació de una intención similar a la de las primeras investigaciones de Sánchez-Mazas: reivindicar la figura de Leibniz como lógico matemático frente a lo que se dice de él en (Couturat, 1901) e incluso en (Aiton, 1985), que continúa siendo su biografía más divulgada.

Utilizando las herramientas lógico-filosófico-hermenéuticas de su momento, Sánchez-Mazas se enfrenta a la lectura de los cálculos de Leibniz partiendo de la idea (que Leibniz parece compartir) de que ninguno de los sistemas de asignación numérica cumple cabalmente su propósito, y por lo tanto su tarea es la de completar o corregir aquello que hizo falta (Sánchez-Mazas, 1963).¹

Por el contrario, en la primera parte de este trabajo mostramos, utilizando estrategias contemporáneas, que el segundo de los intentos de Leibniz expuesto en *Sobre los Números Característicos* (C, 245-47), en donde a cada término de un argumento se asigna una pareja de números, constituye una semántica completa para la lógica aristotélica, de manera que una argumentación silogística es validada por la aritmética leibniziana si y solamente si es deducible de acuerdo a los cánones clásicos. Para ello aprovechamos la re-lectura de la lógica aristotélica hecha por Corcoran y Smiley, la cual expresa con bastante fidelidad la sistematización medieval asumida por Leibniz en su manuscrito *Definición Matemática de las Formas de los Silogismos* (C, 410-416).

Por lo que se conoce de los escritos de Leibniz, cerca de 1686 abandona el intento de construir un modelo aritmético de la lógica y se concentra en inventar un álgebra de la lógica. A diferencia de Sánchez-Mazas, quien encuentra la forma de adaptar el sistema aritmético original a estos y otros ensayos, en la segunda parte de este trabajo consideramos el sistema propuesto en el manuscrito *Fundamentos de un Cálculo Lógico* (C, 421-23) como una pura álgebra lógica y demostramos que, con la adición de un solo axioma, su parte positiva resulta ser un cálculo completo que anticipa el álgebra de Boole.²

De esta manera esperamos que se vea cómo muchas de las concepciones modernas acerca de un cálculo lógico, incluyendo la posibilidad de múltiple interpretación y las relaciones ideales entre sintaxis y semántica están en alguna forma ya presentes en los trabajos de Leibniz, y motivan las sucesivas revisiones de sus sistemas.³

1. *Compleitud del Sistema de los Números Característicos*

Usando estos números, puedo demostrar inmediatamente, en una forma maravillosa, todas las reglas lógicas y puedo mostrar cómo uno puede saber si ciertos argumentos están en la forma adecuada. (*Prefacio a la Característica Universal 1678-79* (G, VII, 184-89).)

Leibniz busca la manera de asignar números a los términos de los argumentos silogísticos de manera que sólo con los números se pueda verificar cuáles son válidos y cuáles no. El primer problema que aboca es el encontrar la relación entre los números característicos de A y de B que exprese la verdad de la proposición categórica 'Todo A es B'. Siguiendo a Aristóteles, considera verdadera la proposición universal afirmativa cuando el predicado B se encuentra contenido en el sujeto A. Es decir, dado un análisis del concepto A, se encuentra a B entre sus componentes. Un

ejemplo simple es el siguiente: ‘*animal racional*’ contiene ‘*animal*’. Se trata, pues, de la interpretación *intensional* que concibe los conceptos o propiedades, como compuestos de conceptos más simples. En cambio, para la interpretación *extensional*, hoy imperante, un concepto está determinada por el conjunto de individuos que lo satisfacen y la contención iría al contrario: ‘Todo A es B’ es verdadera si (la extensión de) A se encuentra contenida en (la de) B.

Leibniz piensa que los conceptos compuestos contienen a los simples de la misma manera que los números contienen sus factores primos, de ahí que la relación con la que pretende expresar la contención intensional sea la divisibilidad. En *Elementos de un Cálculo* (Abril 1679) (C, 49-57) propone lo siguiente: ‘Todo A es B’ es verdadera si y sólo si el número característico de B divide al de A. La siguiente tarea que intenta realizar es encontrar la relación que corresponde a la particular afirmativa: ‘Algún A es B’. Observa Leibniz que esta proposición significa que existe un C que es A y a la vez es B. En términos de divisibilidad querría decir que existe un número c que es divisible por a y por b. Pero dado que para cualquier par de números a, b el producto ab cumple dicho requisito se tendría que esta proposición es verdadera para cualquier par de términos. Escribe Leibniz al final del texto arriba citado: “Por lo tanto, lo que hemos dicho es más restringido de lo que debería ser; así que debemos comenzar de nuevo”. A partir de ahí cambia de estrategia y propone asignar a cada término dos números en vez de uno. La versión más elaborada que hemos encontrado de este intento es la que presenta en *Sobre los Números Característicos* (1679) [SNC], y en ella basaremos nuestro trabajo.

1.1. Formalización de la lógica aristotélica

Entre los grandes logros de Aristóteles está el descubrimiento de que es la forma de los argumentos la que garantiza su validez, y no la materia a la que se refieren. En los *Analíticos Primeros* establece claramente la forma de las proposiciones que entran en los argumentos silogísticos, utilizando variables para simbolizar los términos (predicados) involucrados, y determina la forma de los silogismos correctos lo mismo que los métodos deductivos para utilizarlos y transformar unos en otros. Es el ejemplo más antiguo que tenemos de una lógica formal. En la Edad Media se asigna una vocal a cada tipo de proposición categórica. Leibniz presenta en su manuscrito *Determinación Matemática de la Forma de los Silogismos* [DMFS (C, 412)] el lenguaje simbólico resultante:

A, E, I, O están por [*significant*] la forma, y B, C, D están por la materia (...)
 ACD está por Todo C es D, ECD está por Ningún C es D, IBC está por Algún B es C, OBD está por Algún B no es D.

Las vocales se usan para representar las constantes lógicas (que están por la forma) y las consonantes para los términos (que están por la materia). Leibniz explicita también que el sistema está basado en los silogismos perfectos de la primera figura, a los cuales se pueden reducir los demás silogismos válidos por reconocidos métodos de prueba: “A partir de estos pocos modos, voy a probar ahora los otros, usando subalternación, regreso y conversión.” (C, 411). Prueba por *regreso* llama Leibniz a la

prueba por contradicción, *subalternación* y *conversión* son reglas clásicas de transformación de proposiciones categóricas. Esta reducción ya había sido observado por Aristóteles, incluyendo la necesidad de la prueba “hipotética” por contradicción para lograr algunas de las reducciones.

Lukasiewicz fue el primer lógico en presentar una formalización moderna de la silogística aristotélica. Su trabajo es quizás el primero en analizar sistemáticamente una lógica antigua con herramientas modernas, y demuestra además la corrección del sistema de los números característicos con respecto a su formalización.⁴ Sin embargo su interpretación de la lógica de Aristóteles fue fuertemente cuestionada por Corcoran y Smiley, quienes en los años setenta presentaron simultáneamente una formalización más fiel de la teoría expuesta en los *Analíticos Primeros*. Según ellos, la silogística consta únicamente de reglas y no de axiomas como la presenta Lukasiewicz, y solamente contempla dos tipos de deducción compleja por medio de silogismos encadenados. Aunque estos autores no mencionan a Leibniz, su formalización refleja también con fidelidad la descripción arriba mencionada que hace Leibniz de la lógica de Aristóteles. Si bien Leibniz en algún momento considera algunas proposiciones como axiomas, las usa únicamente para demostrar algunas de las reglas primitivas, que son las mismas de (Corcoran, 1972). Y aunque no hace Leibniz explícita una noción precisa de deducción compleja, en cuanto discurso que utiliza en forma encadenada las reglas de inferencia fundamentales, la lógica tradicional consideraba esta noción tan obvia que era innecesario definirla. Ésta es una de las diferencias más significativas con la lógica moderna.

1.2. Sistema deductivo.

Seguiremos en líneas generales la formalización de Corcoran. Utilizamos el simbolismo tradicional para denotar las proposiciones categóricas: Aab, Oab, Iab, Eab, excepto por el uso de minúsculas para los términos, y aceptamos sólo aquellas cuyos términos son diferentes (es decir, Acc o Ebb no hacen parte del lenguaje). En esta sección llamaremos *proposiciones* solamente a estas expresiones.

Siguiendo a Leibniz (y a Corcoran) tomamos como reglas de inferencia primitivas los silogismos perfectos de la primera figura y las reglas de subalternación y conversión. Formalmente, y utilizando \vdash como símbolo de deducción:

1.2.1. Reglas de inferencia

Silogismos: (SP1) Aab, Abc \vdash Aac (SP3) Aab, Ica \vdash Icb
 (SP2) Eab, Aca \vdash Ecb (SP4) Eab, Ica \vdash Ocb

Subalternación: (S) Aab \vdash Iab

Conversiones: (C1) Eab \vdash Eba (C2) Iab \vdash Iba.

Como hemos observado, la noción de deducción implícita en los textos de Aristóteles es la de una sucesión de silogismos encadenados que extraen conclusiones de una multiplicidad de postulados aceptados como ciertos. También se permiten deducciones silogísticas que incluyen el uso de “hipótesis” adicionales que no se

consideran aceptadas como verdaderas, sino puestas provisionalmente para efectos de *prueba por reducción al absurdo*, u otros tipos de pruebas hipotéticas. De hecho, de los métodos “hipotéticos” solamente el de reducción al absurdo se explica y utiliza sistemáticamente en los textos de Aristóteles. Seguramente no es coincidencia que Leibniz considere necesario solamente este principio además de las reglas de inferencia primitivas. La formalización de Corcoran captura bien esta noción de deducción implícita en los *Analíticos Primeros*:

1.2.2. Deducción directa. Una *deducción directa de P a partir de un conjunto de proposiciones* Σ es una lista finita de proposiciones P_1, \dots, P_n donde $P_n = P$ tal que para todo $k \leq n$: o bien $P_k \in \Sigma$, o bien P_k resulta de P_j para algún $j < k$ por (S), (C1) o (C2), o bien P_k resulta de P_j, P_h para algunos $j, h < k$ por (SP1), (SP2), (SP3) o (SP4).

Dada una proposición categórica P definimos su *contradictoria* $\neg P$ de la siguiente manera $\neg(Aab) = Oab$, $\neg(Iab) = Eab$, $\neg(Oab) = Aab$, $\neg(Eab) = Iab$.

1.2.3. Deducción indirecta. Una *Deducción indirecta de P a partir de un conjunto de proposiciones* Σ es una deducción directa P_1, \dots, P_n a partir de $\Sigma \cup \{\neg P\}$ en la cual $P_n = \neg P_j$ para algún $j < n$.

Dado un conjunto de proposiciones Σ , escribimos $\Sigma \vdash P$ para indicar que existe una deducción directa o indirecta de P a partir de Σ .

Como hemos dicho, fué observado y parcialmente demostrado por Aristóteles que todos los silogismos podían reducirse a los dos universales de la primera figura, es decir a (SP1) y (SP2). Esto corresponde al hecho de que las reglas del sistema que se acaba de introducir no son independiente, pues las reglas de inferencia de la segunda columna son deducibles de las de la primera como puede comprobar fácilmente el lector.

1.3. Semántica numérica de Leibniz.

Ya vimos cuál fue la intuición que guió a Leibniz al hacer la primera propuesta de relación numérica, donde la idea de que un concepto estuviera contenido en otro se veía reflejada en los números por la divisibilidad. Con ello tenía resuelto el problema para las proposiciones de la forma ‘Todo A es B’. Sin embargo, no era posible hacerlo para las de la forma ‘Algún A es B’. Para nosotros, esta última proposición afirma que existe un individuo que es A y a la vez es B. Pero Leibniz no quiere tratar con la existencia de individuos actuales, sino con conceptos o propiedades. Por lo tanto ‘Algún A es B’ querría decir que es posible un concepto que sea A y sea B. Y para que algo sea posible, él considera que es suficiente con que no implique una contradicción. Debe, pues, encontrar la forma de verificar mediante los números cuándo dos términos son *compatibles* (o *composibles*) y cuándo no. He aquí su solución:

En cada proposición categórica existe el número característico

Del sujeto: +s - σ

Del predicado: +p - π

Y dos ecuaciones: $ks = mp$ y $\kappa\sigma = \mu\pi$.

Observando que los números expresados en las correspondientes letras griegas y latinas son primos relativos, es decir que no tienen divisores comunes distintos de la unidad:

$s = mp/k$ $\sigma = \mu\pi/\kappa$ $p = ks/m$ $\pi = \kappa\sigma/\mu$

En una proposición universal afirmativa $k = 1$ y $\kappa = 1$

En una particular negativa ó k es mayor que 1 ó κ es mayor que 1

En una universal negativa ó s y π ó σ y p no son primos relativos

En una particular afirmativa tanto s y π como σ y p son primos relativos. [SNC]

Decide pues asignar a cada término a dos números, uno positivo pa (que corresponde a las propiedades que afirma) y otro negativo na (las que niega). Como todo término es posible, tenemos que pa y na no deben contener ambos una misma propiedad, y como estamos identificando las propiedades primitivas con los números primos, el primer requerimiento que obtenemos es que pa y na deben ser primos relativos. “Algún A es B” quiere decir entonces que A y B no se contradicen, por lo tanto no existe una propiedad que A afirme y B niegue y viceversa, es decir pa y nb por un lado, y na y pb por el otro, son primos relativos.

Considerando asignaciones arbitrarias de números característicos a los términos, podemos expresar las condiciones que exige Leibniz a sus números en la forma siguiente:

1.3.1 Definición. Una *valuación* es una función $V(x)$ que asigna a cada término x del lenguaje un par de números naturales relativamente primos (px, nx). Decimos que V *satisface* una proposición P , en símbolos $V \models P$, si se cumple uno de los casos siguientes según la forma de P :

$$\begin{aligned} V \models Aab \text{ sis } pb \mid pa \text{ y } nb \mid na & \quad V \models Iab \text{ ssi } \text{tanto } pa \text{ y } nb \text{ como } pb \text{ y } na \\ & \quad \text{son primos relativos} \\ V \models Oab \text{ ssi } V \not\models Aab & \quad V \models Eab \text{ ssi } V \not\models Iab. \end{aligned}$$

Dado un conjunto de proposiciones Σ ,
 $V \models \Sigma$ significa que $V \models P$ para todo $P \in \Sigma$,
 $\Sigma \models P$ significa que para toda valuación V tal que $V \models \Sigma$ se tiene $V \models P$.

Es fácil verificar que las reglas primitivas de la lógica aristotélica son válidas bajo las valuaciones leibnizianas, es decir:

1.3.2. Lema. (S) $Aab \models Iab$; (C1) $Eab \models Eba$; (C2) $Iab \models Iba$; (SP1) $Aab, Abc \models Aac$;
 (SP2) $Eab, Aca \models Ecb$; (SP3) $Aab, Ica \models Icb$; (SP4) $Eab, Ica \models Ocb$.

Dem. Es trivial para las reglas de conversión y para (SP1). Presentamos la prueba de (SP2), las demás son muy parecidas. Sea $V(x) = (px, nx)$ una valuación tal que $V \models Eab$ y $V \models Aca$, entonces $V \not\models Iab$ y así o bien pa y nb , o bien pb y na , no son primos

relativos, y además $pa \mid pc$ y $na \mid nc$. Si pa y nb no son primos relativos pc y nb tampoco lo son, pues $pa \mid pc$. Por un argumento simétrico, si pb y na no son primos relativos tampoco lo son pb y nc . Esto significa que $V \models Ecb$. \square

1.3.3. Teorema de corrección. Dado un conjunto de proposiciones Σ y una proposición P : $\Sigma \vdash P$ implica $\Sigma \models P$.

Dem. Si P se obtiene de Σ por una deducción directa $P_1, \dots, P_n = P$, el lema anterior permite probar por inducción en $k \leq n$ que si $V \models \Sigma$ entonces $V \models P_k$. Si P se obtiene de Σ por una deducción indirecta P_1, \dots, P_n con $P_n = \neg P_j$, $j < n$, tenemos por el caso anterior que si $V \models \Sigma \cup \{\neg P\}$ entonces $V \models P_j, \neg P_j$, lo cual es imposible por definición de satisfacción. Así, $V \models \Sigma$ implica $V \not\models \neg P$, o sea $V \models P$. \square

1.4 Completud.

La idea de que la silogística resultaba completa con respecto a la valuación leibniziana nos fue sugerida al leer el último párrafo de [SNC], en el que dice Leibniz:

Y por lo tanto el cálculo de todos los modos y figuras se puede derivar mediante nada más que reglas de números. Si queremos saber si una figura funciona en virtud de su forma [*procedat vi formae*], miramos si la contradictoria de la conclusión es compatible con las premisas, es decir, si se pueden encontrar números que satisfagan las premisas y la contradictoria de la conclusión al mismo tiempo. Si no se puede encontrar ninguno, del argumento se sigue la conclusión en virtud de su forma.

Una forma equivalente de expresarlo es: la conclusión se sigue del argumento en virtud de su forma si *toda* valuación que satisfaga las premisas satisface la conclusión, que es la forma como enunciaremos el teorema de completitud. En los textos que se conocen anteriores a [SNC], para Leibniz bastaba que *una* valuación satisficiera tanto las premisas como la conclusión para que la corrección de un argumento quedara probada, lo cual evidentemente corrige Leibniz en el párrafo citado. En lo que sigue mostramos que el sistema de los números característicos resulta ser completo bajo esta concepción, no solamente para los modos y figuras clásicas como afirma Leibniz sino para los argumentos silogísticos encadenados.

1.4.1. Definición. Un conjunto de proposiciones Σ es inconsistente si existe alguna proposición P , tal que $\Sigma \vdash P$ y $\Sigma \vdash \neg P$, de lo contrario es consistente.

1.4.2. Teorema. Dado un conjunto consistente finito de proposiciones, existe una valuación que lo satisface.

Dem. Sea \mathbf{T} el conjunto de términos que ocurren en un conjunto consistente finito Σ y sea $\Sigma^* = \{P : \Sigma \vdash P\}$. Entonces \mathbf{T} y Σ^* son finitos; por tanto, podemos tomar una función inyectiva $c: \mathbf{T} \rightarrow \text{Primos}$ y definir $V(a) = (Pa, Na)$ para cada $a \in \mathbf{T}$ de la manera siguiente:

$$Pa = c(a)\prod\{c(b) : Aab \in \Sigma^*\}, \quad Na = \prod\{c(d) : Ead \in \Sigma^*\}.$$

Para ver que V es efectivamente una valuación, supóngase por contradicción que existe $a \in \mathbf{T}$ y un primo e tal que $e \mid Pa$ y $e \mid Na$. Entonces, por inyectividad de c , $e = c(b)$ para algún b tal que $b = a$ o $Aab \in \Sigma^*$, y $Eab \in \Sigma^*$. Pero no puede ser el caso que $b = a$, pues Eaa no es una expresión de nuestro sistema. Por tanto $Aab, Eab \in \Sigma^*$, y Σ resulta inconsistente por (S).

Verificamos ahora por casos que $\Sigma \vdash P$ para toda proposición $P \in \Sigma^*$:

i) $P = Aab$. Sea e un primo tal que $e \mid Pb$, entonces $e = c(d)$ donde o bien $d = b$, o bien $Abd \in \Sigma^*$. Como $Aab \in \Sigma^*$, en el primer caso tendríamos $e = c(b) \mid Pa$ por definición de V . En el segundo caso, si $d \neq a$, tendríamos $Aad \in \Sigma^*$ por (SP1) y así también $e = c(d) \mid Pa$. Si $d = a$, $e = c(a) \mid Pa$ trivialmente. En suma, $Pb \mid Pa$. Ahora, sea f un primo tal que $f \mid Nb$: entonces $f = c(d)$, donde $Ebd \in \Sigma^*$. Si $d \neq a$, tenemos $Ead \in \Sigma^*$ (SP2) y por tanto $f = c(d) \mid Na$. Si $d = a$, tenemos $Eba \in \Sigma^*$ que implica $Eab \in \Sigma^*$ (C1) y por definición $f = c(a) \mid Na$. En suma, $Nb \mid Na$, lo que termina la demostración de $V \vdash Aab$.

ii) $P = Eab$. Entonces $c(b) \mid Na$ por lo que $Eab \in \Sigma^*$ y $c(b) \mid Pb$ trivialmente, luego $V \vdash Eab$.

iii) $P = Iab$. Si $V \not\vdash Iab$, existe un primo e tal que $(e \mid Pa \text{ y } e \mid Nb)$ ó $(e \mid Na \text{ y } e \mid Pb)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, el primer caso. Entonces $e = c(d)$ donde, o bien $d = a$ o bien $Aad \in \Sigma^*$, y por otro lado $Ebd \in \Sigma^*$. Si $d = a$, tenemos por hipótesis $\{Iab, Eba\} \subseteq \Sigma^*$, que da una inconsistencia por (C1). Si $Aad \in \Sigma^*$, tenemos $\{Iab, Aad, Ebd\} \subseteq \Sigma^*$ que da la inconsistencia $\{Iab, Eab\}$ por (C1) y (SP2).

iv) $P = Oab$. Si $V \not\vdash Oab$, entonces $Pb \mid pa$ y $Nb \mid Na$. Por tanto $c(b) \mid Pa$, que implica $Aab \in \Sigma^*$. Tenemos entonces la inconsistencia $\{Aab, Oab\} \subseteq \Sigma^*$. \square

1.4.3. Teorema de completitud. Dado un conjunto finito Σ de proposiciones, $\Sigma \vdash P$ implica $\Sigma \vdash P$.

Dem. Si $\Gamma \not\vdash \phi$ entonces $\Gamma \cup \{\neg P\}$ es consistente, de lo contrario se tendría $\Gamma \vdash P$ por deducción indirecta. Por el Teorema 1.4.2 debe existir una valuación V que satisface a Γ pero no a P ; es decir, $\Gamma \not\vdash P$. \square

1.4.4. Comentario. No deja de llamar la atención que, por los textos que se conocen de Leibniz, parece que después de [SNC] abandonó el proyecto de la característica numérica. En textos posteriores se refiere a [SNC] como si lo hubiese dejado insatisfecho. ¿Sería posible que hubiese hallado la solución del problema que enfrentaba y nos se diera cuenta? Cuando Leibniz encuentra una valuación que valida un silogismo incorrecto dice que parece hallarse una vez más en un callejón sin salida (este mismo ejemplo es utilizado por Couturat para mostrar la imperfección del sistema). Como se observa en (Sánchez-Mazas 1963, p.59), el error se debió a una elección desafortunada de los números característicos para los términos, y sobre todo a creer que la corrección de un silogismo quedaría demostrada con una asignación particular, ya que habría también una valuación que mostraría su no-corrección. Se desprende del texto citado al inicio de esta sección que Leibniz sabía bien que para

verificar la validez de un silogismo no era suficiente ensayar con una valuación (como si lo es para verificar su invalidez). Su frustración se explica probablemente porque aspiraba a una “característica” simétrica en la cual fuese posible determinar con una sola asignación y cálculo tanto la validez como la invalidez de los argumentos. El teorema de completitud que hemos demostrado (y en cuya validez Leibniz creía por lo que hemos visto) exige el ensayo de un número grande de valuaciones. Leibniz no tenía razones para suponer que este número fuese siquiera finito; y aún si hubiese descubierto que era suficiente ensayar una cantidad finita de valuaciones, como se desprende de la prueba del teorema, el encontrar todas las asignación numéricas que validan un número grande de premisas silogísticas es demasiado complicado como para que Leibniz lo considerase una característica útil.⁵ Sin embargo, es importante resaltar la genialidad que yace en el sistema de dos números característicos, ya que con esta estrategia consigue Leibniz un sistema completo en el sentido moderno, consistente además con las ideas aristotélicas. El punto más delicado es que logra definir una exclusión lógica sin necesidad de recurrir a términos negativos ni a una totalidad, ya que en este último caso la totalidad habría consistido en un término que podría contener todas las propiedades, en particular propiedades excluyentes. Aparte de su posible infinitud, tal término sería necesariamente contradictorio, lo que iría en contra de uno de sus principios fundamentales (todo término es posible) e impediría validar para todo término la subalternación.

2. *Completud de una Lógica Algebraica de Leibniz*

En el manuscrito *Reglas a Partir de las Cuales se Puede Tomar una Decisión* 1679 (C, 77-84), uno de sus textos acerca de la característica numérica, Leibniz escribe: “Podemos también utilizar letras en lugar de números, como en álgebra.” En un principio muchas de las pruebas que debería hacer con letras (generales) las hace con números (particulares). Pero enuncia algebraicamente las reglas generales, por ejemplo: “Todo A es B si y sólo si $a = mb$ ”.

En los años posteriores a su desarrollo de la característica numérica (1679-1690) Leibniz continuó su estudio de la lógica, tratando de establecer las “proposiciones verdaderas en sí mismas” (axiomas) y las “inferencias verdaderas en sí mismas” (reglas de inferencia). Estas ideas aparecen por primera vez en *Espécimen de un Cálculo Universal* (G, VII, 218-243), y mas claramente en *Desarrollos Posteriores al Espécimen de un Cálculo Universal* (G, VII, 221-227) . En estos ensayos las proposiciones son de la forma ‘a es b’ y los sistemas que propone están a medio camino entre la lógica aristotélica y un álgebra de términos. Es en las *Investigaciones Generales sobre el Análisis de los Conceptos y las Verdades* 1686 [IG] (C, 356-399) donde une la sintáxis implícita en la característica numérica con la axiomática que había comenzado a trabajar. La clave para “algebrizar” la proposición categórica ‘Todo a es b’, que antes expresaba de la forma ‘a es b’, la encuentra en la ecuación que inicialmente utilizó para codificar esa proposición en forma numérica: “ $a = yb$ para algún y”. Con esta “traducción” de las proposiciones categóricas aristotélicas a expresiones algebraicas comienza a independizarse de la silogística de Aristóteles para intentar desarrollar un cálculo de igualdades y desigualdades, con una visión que nos parece tan moderna como la de Boole. En [IG] se presentan mucha alternativas

deducciones y ensayos en esta dirección, sin decidirse específicamente por ninguna. Una de las expresiones más avanzadas de ese sistema se encuentra en *Fundamentos de un Cálculo Lógico 1690* [FCL], texto en el que nos basaremos para lo que sigue. En este texto, Leibniz abandona la mayoría de consideraciones aristotélicas para concentrarse en las puramente algebraicas, y se decide claramente por un sistema de identidades y desigualdades en el cual la regla principal es la substitución de iguales para el caso de identidades, y una mezcla de substitución y reducción al absurdo en el caso de las desigualdades.

2.1. Sistema algebraico implícito en “Fundamentos de un Cálculo Lógico”

Formalizamos aquí el calculo de identidad implícito en [FCL], sin tocar el de desigualdades que no está claramente desarrollado y exigiría consideraciones no algebraicas.

El alfabeto consiste en un conjunto **TS** de *términos simples*, más los símbolo \neg , $=$, $($, $)$. El conjunto de *términos* **T** es el mínimo conjunto que contiene a **TS** y cumple: $A, B \in \mathbf{T}$ entonces $\neg A \in \mathbf{T}$, y $(AB) \in \mathbf{T}$. Una *proposición* es ahora una igualdad de la forma: $A = B$, donde $A, B \in \mathbf{T}$.

2.1.1. *Axiomas*. Todas las proposiciones de la forma siguiente:

1. $AA = A$
2. $\neg\neg A = A$
3. $AB = BA$
4. $A(BC) = (AB)C$
5. $\neg B = \neg B\neg(AB)$
6. $A\neg B = A\neg(AB)$.

2.1.2. *Deducción*. Dado un conjuntos de proposiciones Σ , una Σ -*deducción* es una sucesión de términos D_1, \dots, D_n tal que para todo $i < n$, D_{i+1} se obtiene de reemplazar en D_i una ocurrencia de P por Q , o viceversa, para alguna proposición $(P = Q) \in \Sigma \cup \text{Axiomas}$.

$\Sigma \vdash A = B$ si existe una Σ -deducción tal que D_1 es A y D_n es B . Si Σ es vacío escribimos solamente $\vdash A = B$.

Es fácil verificar que si $\Sigma \vdash A_i = B_i$ para $i = 1, \dots, k$, y $\{A_1 = B_1, \dots, A_k = B_k\} \vdash C = D$ entonces $\Sigma \vdash C = D$. También se tiene: $A = B, B = C \vdash A = C$, $A = B \vdash B = A$, y $\vdash A = A$.

Evidentemente, si D_i, D_{i+1} forman parte de una Σ -deducción entonces $\Sigma \vdash D_i = D_{i+1}$. En consecuencia, escribiremos las deducciones como cadenas de igualdades $D_1 = D_2$ (J_1) = ... = D_k (J_k), con una posible justificación (J_i) de cada substitución. No muy diferente de como lo hace Leibniz en [FCL].

2.1.3. *Comentario*. Aclaremos la relación de nuestra formalización con el sistema que presenta Leibniz en [FCL]. Donde Leibniz utiliza los signos ‘no-’ y ‘∞’, hemos

utilizado ‘ \neg ’ y ‘ $=$ ’. Los axiomas 1, 2, 3 son los únicos que Leibniz tiene por proposiciones indemostrables, aunque asume implícitamente el axioma 4. Es interesante notar como este principio (la asociatividad) constituye el hueco señalado por Frege a la demostración leibniziana de $2 + 2 = 4$ en los *Nuevos Ensayos*. Sin embargo, este axioma es innecesario si se permite la yuxtaposición consecutiva de más de dos terminos como operación lógica primitiva, lo cual parece ser el punto de vista de Leibniz.

El axioma 5, que aparece ya en [IG], es una proposición que utiliza como postulado en algunas de sus deducciones y cree debería ser demostrable de los axiomas que ha asumido, aunque observa no haber podido hacerlo. Hoy es fácil demostrar, utilizando valuaciones adecuadas, que en realidad es independiente de los demás axiomas. El axioma 6 es el único no mencionado por Leibniz, a pesar de su similitud estructural con el axioma 5. Creemos, sin embargo, que encaja perfectamente en el espíritu del sistema que Leibniz buscaba desarrollar, y lo hemos añadido porque es suficiente (y necesario, pues es independiente) para alcanzar la completitud que Leibniz implícitamente buscaba.

La única regla de inferencia que Leibniz se permite en las deducción de identidades a partir de sus axiomas en [FCL] es la substitución de iguales, en concordancia con su concepción innumerables veces expresada en este y otros textos: “ $A=B$ quiere decir que una puede ser substituida por la otra, B por A o A por B, i.e. que son equivalentes.” [FCL (C,421)]. La noción de deducción anteriormente propuesta no es sino una formalización de esta regla.

2.2. Desarrollo del sistema.

Para Leibniz era muy importante poder expresar dentro de su sistema ‘A contiene B’. Hemos visto como sus trabajos anteriores lo llevaron a expresarlo de la forma: $A = YB$ para algún Y. Sin embargo, si A contiene B, al añadirsele no se le debe estar añadiendo nada. Esto se expresa de la siguiente manera: $A = AB$. Veamos como prueba Leibniz que ambas expresiones son equivalentes:

2.2.1. Teorema (Leibniz). $A = YB \vdash A = AB$.

Dem. $A = YB$ (hipótesis) = $Y(BB)$ (axioma 1) = $(YB)B$ (axioma 4) = AB (hipótesis).
□

Otro resultado esencial para Leibniz era la contraposición aristotélica (Todo A es B implica que Todo no-B es no-A). Vimos que ‘Todo A es B’ corresponde a $A = AB$, ‘Todo no-B es no A’ corresponde por lo tanto a $\neg B = \neg B \neg A$. Es el axioma A5 el que le permite demostrarlo, razón que pudo llevarlo a considerarlo como un postulado indispensable:

2.2.2. Teorema (Leibniz). $A = AB \vdash \neg B = \neg B \neg A$.

Dem. $\neg B = \neg B \neg (AB)$ (axioma 5) = $\neg B \neg A$ (subst. de hipótesis). □

2.2.3. *Teorema (Leibniz).* $\vdash C = C \neg(A \neg C)$.

Dem. $C = \neg \neg C$ (axioma 2) $= \neg \neg C \neg(A \neg C)$ (axioma 5) $= C \neg(A \neg C)$ (axioma 2). \square

2.2.4. *Teorema.* **a.** $\vdash (A \neg A)C = (A \neg A)$, **b.** $\vdash \neg(A \neg A)C = C$, **c.** $\vdash A \neg A = B \neg B$,
d. $\vdash A(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A)) = AB = B(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A))$.

Dem. **a.** $(A \neg A)C = \neg A(A \neg \neg C)$ (axiomas 2, 3, 4) $= \neg A(A \neg(A \neg C))$ (axioma 6) $= A(\neg A \neg(A \neg C))$ (axiomas 3, 4) $= A \neg A$ (axioma 5).

b. $\neg(A \neg A)C = \neg((A \neg A) \neg C)C$ (2.2.4a) $= C$ (2.2.3).

c. $A \neg A = (A \neg A)(B \neg B)$ (2.2.4a) $= (B \neg B)(A \neg A) = B \neg B$ (2.2.4a).

d. $A(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A)) = (A \neg(A \neg B)) \neg(B \neg A) = (A \neg \neg B) \neg(B \neg A)$ (axiomas 4,6) $= A(B \neg(B \neg A))$ (axiomas 2,4) $= A(BA)$ (axiomas 6,2) $= AB = BA = B(\neg(B \neg A) \neg(A \neg B)) = B(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A))$ (simetría, axioma 3). \square

2.2.5. *Teorema.* $\neg(A \neg B) \neg(B \neg A) = \neg(P \neg P) \dashv \vdash A = B$.

Dem. La prueba hacia la izquierda es trivial por el axioma 1 y 2.2.4.c. Probamos la otra dirección: $A = A \neg(P \neg P)$ (2.2.4.b) $= A(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A))$ (hip.) $= B(\neg(A \neg B) \neg(B \neg A))$ (2.2.4.d) $= B \neg(P \neg P)$ (hip.) $= B$ (2.2.4.b). \square

2.2.6. *Teorema.* $B = BA, \neg B = \neg BA \vdash A = \neg(P \neg P)$.

Dem. $A = \neg \neg A$ (axioma 2) $= \neg(\neg A \neg(A B))$ (axioma 5) $= \neg(\neg A \neg B)$ (hip.) $= \neg(\neg A \neg(B A))$ (hip) $= \neg((A \neg A) \neg B)$ (axiomas 3, 4) $= \neg(A \neg A)$ (2.2.4a) $= \neg(P \neg P)$ (2.2.4c). \square

En adelante, dados términos F, A, B , y suponiendo que A ocurre en F , $F[A/B]$ denotará el resultado de reemplazar alguna ocurrencia de A en F por B .

2.2.7 *Lema de introducción.* $\vdash AF = AF[M/AM]$.

Dem. Por inducción en la construcción del término F . Si F es simple, entonces F es M y por lo tanto $\vdash AF = AM = (AA)M = A(AM) = AF[M/AM]$. Supongamos ahora que se tiene la deducción para D y E . Si $F = \neg D$ tenemos: $\vdash AF = A \neg D = A \neg(AD)$ (axioma 5) $= A \neg(AD[M/AM])$ (hip. ind.) $= A \neg(D[M/AM])$ (axioma 5) $= AF[M/AM]$. Si $F = DE$, supongamos que la ocurrencia de M que se reemplaza está en E . Entonces $\vdash AF = A(DE) = (AE)D$ (axiomas 3, 4) $= (AE[M/AM])D$ (ind. hip.) $= A(DE[M/AM])$ (axiomas 3, 4) $= AF[M/AM]$. \square

2.2.8. *Corolario (Lema de extracción).* $\vdash AF = AF[AM/M]$.

2.2.9. *Teorema de la deducción.* Si $E_1, \dots, E_n, A = \neg(P \neg P) \vdash \neg(P \neg P) = B$, entonces $E_1, \dots, E_n \vdash A = AB$.

Dem. Sea $B_1(\equiv \neg(P \rightarrow P))$, $B_2, \dots, B_m(\equiv B)$ una deducción de $\neg(P \rightarrow P) = B$ a partir de las hipótesis indicadas. Probamos por inducción en $j \leq m$ que $E_1, \dots, E_n \vdash A = AB_j$. Si $j=1$, B_j es $\neg(P \rightarrow P)$ y así $\vdash A = AB_j$, por 2.2.4b; por lo tanto, $E_1, \dots, E_n \vdash A = AB_j$. Supongamos que $E_1, \dots, E_n \vdash A = AB_j$ ($j < m$) y consideremos B_{j+1} .

Caso 1: B_{j+1} se obtiene de B_j usando substitución con algún E_1, \dots, E_n , entonces trivialmente

$E_1, \dots, E_n \vdash A = AB_j$ (ind. hip.) $= AB_{j+1}$, utilizando la misma substitución que transforma B_j en B_{j+1} en la deducción original.

Caso 2: B_{j+1} se obtiene de B_j substituyendo con $A = \neg(P \rightarrow P)$. Hay dos subcasos. Si B_{j+1} resulta de reemplazar una ocurrencia de A en B_j por $\neg(P \rightarrow P)$ tenemos: $\vdash AB_j = AB_j[A/\neg(P \rightarrow P)]$ (2.2.4b) $= AB_j[A/\neg(P \rightarrow P)]$ (lema de extracción) $= AB_{j+1}$. Si, por el contrario, B_{j+1} resulta de substituir $\neg(P \rightarrow P)$ por A , tenemos: $\vdash AB_j = AB_j[\neg(P \rightarrow P)/A]$ (lema de introducción) $= AB_j[\neg(P \rightarrow P)/A]$ (2.2.4b) $= AB_{j+1}$. En ambos casos tenemos $\vdash AB_j = AB_{j+1}$. Por tanto, $E_1, \dots, E_n \vdash A = AB_j$ (hip. ind.) $= AB_{j+1}$. \square

2.3. Semántica proposicional para el Sistema Ecuacional de Leibniz

Los “terminos” en la logica algebraica de Leibniz representan en primera instancia conceptos o propiedades generales (animal, racional, etc.), de acuerdo con la tradición aristotélica y con las propias concepciones de Leibniz. Sin embargo, Leibniz admite explícitamente la posibilidad de tomarlos como proposiciones cuando afirma: “Así como todo término puede ser entendido como proposición toda proposición puede ser entendida como término” [IG]. Ello justificaría la semántica de dos valores de verdad que introducimos en seguida para examinar la completitud del sistema. Sin embargo, nos interesa esta semántica más bien como instrumento para demostrar la equivalencia del sistema leibniziano con los cálculos proposicionales modernos (ya que negación y conjunción, representada por yuxtaposición en Leibniz, forman un conjunto completo de conectivas), en especial con el algebra booleana, la cual puede también concebirse indistintamente como una álgebra de proposiciones o una algebra de predicados.

2.3.1. Definición. Una *valuación* en E es una función $\alpha : T \rightarrow \{0,1\}$ que cumple las siguientes condiciones: $\alpha[AB] = \alpha[A]\alpha[B]$ y $\alpha[\neg A] = 1 - \alpha[A]$, correspondientes a la tablas booleanas clásicas de la conjunción y la negación. Decimos que α *satisface* a una proposición $A = B$ si $\alpha(A) = \alpha(B)$. Dadas proposiciones E_1, \dots, E_n , $A = B$, escribimos $E_1, \dots, E_n \vDash A = B$ si toda valuación que satisface a E_1, \dots, E_n satisface a $A = B$.

2.3.2. Lema. $\alpha[A] = \alpha[B]$ si y solamente si $\alpha[\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] = 1$.

Dem. $\alpha[\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] = 1$ si y solamente si $\alpha[A \rightarrow B] = \alpha[B \rightarrow A] = 0$, lo cual es posible si y solamente si $\alpha[A] = \alpha[B]$.

La *corrección* del sistema, es decir, que de $E_1, \dots, E_n \vdash A = B$ se sigue $E_1, \dots, E_n \vDash A = B$, es inmediata, pues $\alpha(P) = \alpha(Q)$ implica $\alpha(D) = \alpha(D[P/Q])$. El resto sale por

inducción en la longitud de las deducciones. Procedemos ahora a demostrar su *completud*.

Dado $A \in T$ y una valuación α , defínase la proposición A^α como “ $A = \neg(P \rightarrow P)$ ” si $\alpha[A] = 1$, y como “ $A = P \rightarrow P$ ” si $\alpha[A] = 0$.

2.3.3. *Lema. Sean P_1, P_2, \dots, P_n los términos simples que ocurren en A y sea α una valuación, entonces $P_1^\alpha, P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash A^\alpha$.*

Dem. Siempre se tiene: $A^\alpha \vdash (\neg A)^\alpha$ y $A^\alpha, B^\alpha \vdash (AB)^\alpha$, como se indica en la tabla:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	A^α	B^α	$(\neg A)^\alpha$	$(AB)^\alpha$
1	1	$A = \neg(P \rightarrow P)$	$B = \neg(P \rightarrow P)$	$\neg A = P \rightarrow P$ (axioma 2)	$AB = \neg(P \rightarrow P)$ (axioma 1)
1	0	$A = \neg(P \rightarrow P)$	$B = P \rightarrow P$	$\neg A = P \rightarrow P$	$AB = P \rightarrow P$ (2.2.4a)
0	1	$A = P \rightarrow P$	$B = \neg(P \rightarrow P)$	$\neg A = \neg(P \rightarrow P)$ (subst.)	$AB = P \rightarrow P$ (2.2.4a)
0	0	$A = P \rightarrow P$	$B = P \rightarrow P$	$\neg A = \neg(P \rightarrow P)$	$AB = P \rightarrow P$ (axioma 1)

El resultado se sigue entonces fácilmente por inducción en la complejidad del término A . \square

2.3.4. *Teorema de Completitud. El sistema algebraico es completo, es decir, si $E_1, \dots, E_n \vDash A=B$ entonces $E_1, \dots, E_n \vdash A=B$. En particular, $\vDash A=B$ implica $\vdash A=B$.*

Dem. Verificamos en primer lugar que si $\alpha[A] = 1$ para toda valuación α , entonces $\vdash A = \neg(P \rightarrow P)$. Bajo la hipótesis, A^α es $A = \neg(P \rightarrow P)$ para cualquier valuación α , y por el lema 2.4.3 tenemos que si P_1, P_2, \dots, P_n son los términos simples de A : $P_1^\alpha, P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash A = \neg(P \rightarrow P)$. Ahora bien, una valuación α de P_2, \dots, P_n puede extenderse a P_1, P_2, \dots, P_n de dos maneras: o bien $\alpha(P_1) = 1$, en cuyo caso tenemos: $P_1 = \neg(P \rightarrow P)$, $P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash A = \neg(P \rightarrow P)$, o bien $\alpha(P_1) = 0$ que da: $P_1 = P \rightarrow P$, $P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash A = \neg(P \rightarrow P)$. Del segundo caso obtenemos $\neg P_1 = \neg(P \rightarrow P)$, $P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash A = \neg(P \rightarrow P)$ (axioma 2), y por el teorema de la deducción tenemos: $P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash P_1 = P_1 A$ y $P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash \neg P_1 = \neg P_1 A$. Por el teorema 2.2.6: $P_2^\alpha, \dots, P_n^\alpha \vdash A = \neg(P \rightarrow P)$. Como esto vale para cualquier valuación de P_2, \dots, P_n , podemos seguir eliminando de la misma manera P_2, \dots, P_n hasta obtener: $\vdash A = \neg(P \rightarrow P)$.

En lo que sigue, utilizaremos la abreviación $A \leftrightarrow B$ para denotar el término $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A)$. Note que si $\vDash A=B$ entonces $\alpha[A \leftrightarrow B] = 1$ para toda α por el Lema 2.3.2. Entonces, por lo que hemos probado en el párrafo anterior, $\vdash A \leftrightarrow B = \neg(P \rightarrow P)$, y por el Teorema 2.2.5, $\vdash A=B$.

Ahora, probamos por inducción en $n \geq 0$ que si $E_1, \dots, E_n \vDash A=B$, entonces $E_1, \dots, E_n \vdash A=B$. El caso $n = 0$, ausencia de hipótesis, es lo que acaba de probarse. Para $n \geq 1$, sea E_1 la proposición $C = D$, entonces por el Lema 2.3.2 y considerando los casos $\alpha[C] = \alpha[D]$ y $\alpha[C] \neq \alpha[D]$ se concluye que $E_2, \dots, E_n \vDash (C \leftrightarrow D) = (C \leftrightarrow D)(A \leftrightarrow B)$. Por hipótesis de inducción, $E_2, \dots, E_n \vdash (C \leftrightarrow D) = (C \leftrightarrow D)(A \leftrightarrow B)$ y por el Teorema 2.2.5, $E_1 \vdash (C \leftrightarrow D) = \neg(P \rightarrow P)$. Por tanto, $E_1, E_2, \dots, E_n \vdash \neg(P \rightarrow P) = \neg(P \rightarrow P)(A \leftrightarrow B) \vdash \neg(P \rightarrow P) = (A \leftrightarrow B) \vdash A = B$ (teoremas 2.2.4b y 2.2.5). \square

BIBLIOGRAFÍA

- Aiton, E.J.: 1985. *Leibniz, una Biografía*, C. Corredor (trad.), Madrid, Alianza 1992.
- Caicedo, X.: 1990, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*, Bogotá, Universidad de los Andes.
- Corcoran, J.: 1972, 'Completeness of Ancient Logic', *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 37/4.
- Couturat, L.: 1901, *La Logique de Leibniz*, Paris, Alcan, Reprinted Hildesheim, Olms, 1961.
- Leibniz, G.W.: 1966, *Logical Papers*, Parkinson (ed.), Oxford, Clarendon Press.
- Leibniz, G.W.: 1989, *G.W. Leibniz Philosophical Essays*, Ariew & Garber (eds.), Hackett Publ. Co.
- Leibniz, G.W.: 1903, *Opuscules et Fragmentes ineditis de Leibniz*, Couturat (ed.), Paris, Felix Alcan Ed. (C):
- [DMFS] *Definición Matemática de las Formas de los Silogismos* [De formis syllogismorum Mathematicae definiendis (C, 410-416)]
 - [SNC] *Sobre los Números Característicos* [sin título (C, 245-47)]
 - [FCL] *Fundamentos de un Cálculo Lógico* [Fundamenta Calculi Logici (C, 421-23)]
 - [IG] *Investigaciones Generales sobre el Análisis de los Conceptos y las Verdades* [Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatum (C, 356-399)].
- Leibniz, G.W.: *Philosophische Schriften*, Gerhardt (ed), vols I-VII. (G)
- Lukasiewicz, J.: 1957, *La Silogística de Aristóteles*, Madrid, Tecnos, 1977.
- Rescher, N.: 1954, 'Leibniz's Interpretation of his Logical Calculi', *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 19/1
- Sánchez-Mazas, M.: 1963, *Fundamentos Matemáticos de la Lógica Formal*, Caracas, Universidad Central de Venezuela.
- Sánchez-Mazas, M.: 1981, 'Un modelo aritmético de la silogística', *Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia* n.9, Madrid.
- Sánchez-Mazas, M.: 1994a, 'Actualización de la característica numérica universal de Leibniz', *Cuadernos universitarios de "Theoria"*, San Sebastián, Centro de Análisis, Lógica e Informática Jurídica.
- Sánchez-Mazas, M.: 1994b, 'La aritmética intensional', en J. Echeverría, J. de Lorenzo y L. Peña (eds.): *Calculemos... Matemáticas y Libertad, Homenaje a Miguel Sánchez-Mazas*, ed., Madrid, Trotta.
- Smiley, T.J.: 1973, 'What is a Syllogism', *Journal of Philosophical Logic* 2: 136-154.
- Zalamea, F.: 1998, 'El cálculo infinitesimal y los cálculos lógicos, en Leibniz, como especificaciones de la característica universal.' Seminario de historia de la matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, *Lecturas Matemáticas*, por aparecer.

Notas

¹ Uno de los proyectos fundamentales de la obra de Sánchez-Mazas consiste en desarrollar, a partir de las ideas leibnicianas, un modelo aritmético de la lógica, que si bien en un principio parece “deducirse” de los planteamientos del filósofo alemán, poco a poco va tomando cuerpo hasta convertirse en un objeto nuevo (como afirma Javier de Lorenzo en el prólogo a Sánchez-Mazas 1994).

² Con una sencilla modificación de la prueba que presentamos se puede demostrar la completitud del cálculo presentado en [FLC] con respecto al modelo de Sánchez-Mazas.

³ Evidencia de su búsqueda de diversas semánticas para la lógica aristotélica son sus interpretaciones utilizando círculos (de manera muy similar a los diagramas de Euler) o segmentos de recta. En el *Cálculo de Adición Real* (G, VII, 236-247) presenta un sistema de pura álgebra (*speciosa generalis*) susceptible de diversas interpretaciones, lógicas o geométricas, donde plantea que los términos pueden interpretarse no sólo intensionalmente, sino incluso extensionalmente.

⁴ Sin embargo afirma que parece “mera coincidencia” que el sistema leibniciano valide sus axiomas ya que “Leibniz no sabía que la lógica aristotélica podía ser axiomatizada (...) sólo contrastó algunas leyes de conversión y algunos modos silogísticos a fin de estar seguro de que su interpretación no era errónea” [Lukasiewicz, p.107]. La interpretación de Corcoran nos permite recuperar la formalización leibniciano de la silogística y mostrar como la corrección de su sistema estaba muy lejos de ser “mera coincidencia”.

⁵ Esto puede ser lo mismo que lleva a Sánchez-Mazas a decir del sistema de los números característicos “(...) siendo los cálculos de este tipo, excesivamente complicados y redundantes, a la vez que carentes de claridad y justificación lógica.” [Sánchez-Mazas, 1981]. Esta opinión, compartida por varios estudiosos de los cálculos lógicos de Leibniz, es la que pretendemos refutar en el presente trabajo.