Temas examen de área: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Departamento de Matemáticas   Universidad de los Andes, 2014

El examen incluirá seis ejercicios, cuatro de ellos relacionados con los temas de las Secciones 1-3, y dos relacionados con las secciones opcionales 4 y 5. Para obtener la nota máxima en el examen es suficiente dar una solución completa a cinco de los seis ejercicios propuestos.

1. Topología

1.1 Definición de espacio topológico. Bases y subbases para una topología ([JRM], capítulo 2, Secciones 12-13). Ejemplos: topología de un orden, topología producto, topología de subespacio ([JRM], capítulo 2, secciones 14-16.)
1.2 Conjuntos cerrados y puntos límites. Espacios de Hausdorff ([JRM], capítulo 2, secciones 17.)
1.3 Funciones continuas y sus propiedades. Homeomorfismos. ([JRM], capítulo 2, sección 18.)
1.4 La topología producto ([JRM], capítulo 2, sección 19.)
1.5 La topología inducida por una métrica ([JRM], capítulo 2, secciones 20-21.)
1.6 La topología cociente ([JRM], capítulo 2, secciones 22.)
1.7. Espacios topológicos conexos ([JRM], capítulo 3, secciones 23-25.)
1.8. Espacios topológicos compactos. El teorema de Tikhonov ([JRM], capítulo 3, secciones 26-28; capítulo 5, sección 37.)
1.9. Espacios topológicos localmente compactos. Compactificación por un punto. Compacticación de Stone-Cech ([JRM], capítulo 3, sección 29; capítulo 5, sección 38.)
1.10. Axiomas de enumerabilidad ([JRM], capítulo 4, sección 30).
1.11. Axiomas de separación ([JRM], capítulo 4, sección 31).
1.12. Variedades topológicas, clasificación de variedades 1-dimensionales y variedades 2-dimensionales compactas ([WSM], capítulo 1).

2. Topología Algebraica

2.1. Homotopía de funciones continuas. Equivalencia homotópica. ([AT], capítulo 0).
2.2. CW-complejos. ([AT], capítulo 0).
2.3. Grupo fundamental: el funtor i1 de la categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos; grupo fundamental del círculo; teorema de van-Kampen ; grupo fundamental de variedades 2-dimensionales compactas; retracciones y retracciones por deformación; aplicaciones: teorema de punto fijo de Brouwer; teorema de Borsuk-Ulam, teorema fundamental del álgebra ([AT], capítulo 1, secciones 1.1-1.2).
2.4. Espacios recubridores. Propiedades de levantamiento. Transformaciones recubridoras . La clasificación de espacios recubridores ([AT], capítulo 1, secciones 1.1-1.2).
2.5. Homologia simplicial y singular. Complejos simpliciales. Invarianza homotópica de la homología singular ([AT], capítulo 2, sección 2.1).
2.6. Homología relativa. Sucesión exacta larga en homología de un buen par. Teorema de excisión. La equivalencia de la homología singular y simplicial ([AT], capítulo 2, sección 2.1).
2.7. Sucesión de Mayer-Vietoris ([AT], capítulo 2, sección 2.2).
2.8. Grado de una función continua. Homología celular ([AT], capítulo 2, sección 2.2).
2.9. Homología con coeficientes. Axiomas de Eilenberg-Steenrod para homología ([AT], capítulo 2, secciones 2.2-2.3).
2.10. Relación entre i1(X) y H1(X; Z) ([AT], capítulo 2, sección 2A).
2.11. Aplicaciones de la homología: teorema de invarianza de dominio, teorema de Hopf sobre Álgebras de división conmutativas con identidad ([AT], capítulo 2, sección 2B).
2.12. Complejos de cocadenas y su cohomología. Teorema de coeficientes universales. Axiomas de

Eilenberg-Steenrod para cohomología ([AT], capítulo 3, sección 3.1).
2.13. Cohomología simplicial, singular y celular. Invarianza homotópica. Sucesion de Mayer-Vietoris ([AT], capítulo 3, sección 3.1).
2.14. Producto copa. El anillo de cohomología de un espacio topológico ([AT], capítulo 3, sección 3.2).
2.15. La formula de Kunneth ([AT], capítulo 3, sección 3.2).
2.16. Dualidad de Poincarie ([AT], capítulo 3, sección 3.3).

3. Geometría de variedades diferenciables
3.1. Variedades diferenciables. Funciones diferenciables entre variedades diferenciables. Difeomorismos. Ejemplos de variedades diferenciables: Rn, Sn, RPn, CPn, HPn, superficies compactas, variedades grassmanianas, grupos matriciales. ([FW], capítulo 1, secciones 1.1-1.6).
3.2. Particiones de la unidad ([FW], capítulo 1, secciones 1.7-1.11).
3.3. Espacio tangente de una variedad diferenciable. Definición de vectores tangentes: clases de equivalencia de curvas, operadores diferenciales. La derivada de una función diferenciable. Equivalencia de estas definiciones ([FW], capítulo 1, secciones 1.12-1.26).
3.4. Inmersiones, encajamientos. Subvariedades. Teorema de la función implícita e inversa. ([FW], capítulo 1, secciones 1.27-1.40).
3.5. Campos vectoriales. El flujo de un campo vectorial. El corchete de Lie de dos campos vectoriales ([FW], capítulo 1, secciones 1.41-1.55).
3.6. Distribuciones y el teorema de Frobenius ([FW], capítulo 1, secciones 1.56-1.64).
3.7. Álgebras tensorial y exterior ([FW], capítulo 2, secciones 2.1-2.13).
3.8. Haz tangente. Haz cotangente. Campos tensoriales y formas diferenciales ([FW], capítulo 2, secciones 2.14-2.23).
3.9. Derivada de Lie ([FW], capítulo 2, secciones 2.24-2.25).
3.10. Ideales diferenciales.([FW], capítulo 2, secciones 2.26-2.34).
3.11. Grupos de Lie. Álgebra de Lie de un grupo de Lie ([FW], capítulo 3, secciones 3.1-3.16).
3.12. Acción de un grupo de Lie en una variedad. Variedades diferenciables homogéneas ([FW], capítulo 3, secciones 3.58-3.68).
3.13. Cohomología de De Rham. Cohomología de De Rham cohomología con soporte compacto ([BT], capítulo 1, sección 1).
3.14. Sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología de De Rham (también con soporte compacto) ([BT], capítulo 1, sección 2).
3.15. Integración de formas diferenciales en variedades diferenciables. El teorema de Stokes ([BT], capítulo 1, sección 3).
3.16. Lema de Poincarie. Invarianza homotópica de la cohomología de De Rham ([BT], capítulo 1, sección 4).
3.17. Principio generalizado de Mayer-Vietoris para la cohomología de De Rham. Cohomología de Cech ([BT], capítulo 2, secciones 8-10).
3.18. Fibrados principales. Fibrados asociados ([KN], capítulo 1, sección 5).
3.19. Haces vectoriales. Operaciones con haces vectoriales ([KN], capítulo 1, 5; [BT], capítulo 1, sección 6).
3.20. Conexiones en un ibrado principal. Grupo de holonomia ([KN], capítulo 2, secciones 1-3).
3.21. Forma de curvatura. Las ecuaciones de estructura ([KN], capítulo 2, sección 5).
3.22. Teoremas de reduccion ([KN], capítulo 2, secciones 6-8).
3.23. Conexiones lineales en haces vectoriales ([KN], capítulo 3, sección 1).
3.24. Clases caracteristicas de Euler, Chern y Pontryagin. Clase e isomorfismo de Thom ([BT], capítulo 1, sección 6; [KN], capítulo 12).

4. (Opcional) **Análisis en variedades. Teoría de Hodge**.
4.1. El operador de Laplace-Beltrami. ([FW], capítulo 6, secciones 6.1-6.3).

4.2. Espacios de Sobolev. ([FW], capítulo 6, secciones 6.15-6.23).
4.3. Operadores diferenciales lineales. ([FW], capítulo 6, secciones 6.24-6.27).
4.4. Operadores elípticos. ([FW], capítulo 6, secciones 6.28-6.30).
4.5. Teoremas de regularidad. ([FW], capítulo 6, secciones 6.4-6.6, 6.31-6.32).
4.6. Elipticidad del operador de Laplace-Beltrami. ([FW], capítulo 6, secciones 6.34-6.36).
4.7. Teorema de descomposicion de Hodge. ([FW], capítulo 6, secciones 6.4-6.14).

5. (Opcional) **Superficies de Riemann**
5.1. Funciones holomorfas y analíticas. La fórmula integral de Cauchy.([CO], Ch. II.2, IV.5).
5.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann.([CO], Ch. II.2).
5.3. Principio del Máximo, el teorema de la función abierta.([CO], Ch. VI.1, IV.7).
5.4. Funciones meromorfas.([CO], Ch. V.1, V.2).
5.5. Las superficies de Riemann compactas y simplemente conexas (La esfera de Riemann, el plano complejo, y el semiplano superior). Grupos de automorfismos de superficies de Riemann simplemente conexas. ([FA], Ch. IV.4).
5.6. Grado de una función holomorfa. Relación con espacios recubridores.([FO], Ch. I.4, I.5)
5.7. Topología de superficies de Riemann: género, característica de Euler, fórmula de Riemann-Hurwitz, grupos de cohomología singular, grupo fundamental.([FA], Ch. I.2).

Referencias

[BT] R. Bott, L.W. Tu, Diferential forms in algebraic topology, Springer, 1982.
[CO] J. B. Conway. Functions of One Complex Variable. Second edition. Springer, 1978.
[FA] H.M. Farkas, I. Kra, Riemann Surfaces, Springer, GTM 71.
[FO] O. Forster, Lectures on Riemann Surfaces, Springer, GTM 81.
[AT] A. Hatcher, Algebraic topology, Cambridge University Press, 2002.
[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of dierential geometry, Vol. I, Wiley, 1963.
[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of dierential geometry, Vol. I, Wiley, 1969.
[WSM] W.S. Massey, A basic course of algebraic topology, Springer, 1991.
[JRM] J.R. Munkres, Topology, Second Edition, Prentice Hall, 2000.
[FW] F. Warner, Foundations of diferential manifolds and Lie groups, Springer, 1971.