

Examen de Conocimiento. Probabilidad y Estadística.

Departamento de Matemáticas. Universidad de los Andes. Semestre 2025-I.

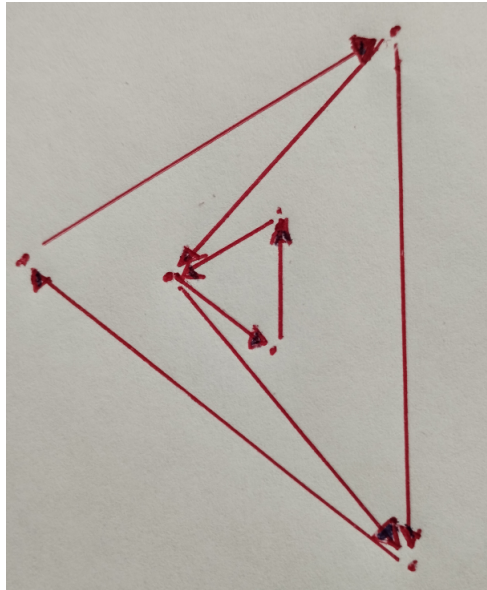
Nombre: _____ Código: _____

De las siguientes seis preguntas, seleccione y responda solo cinco, indicando su elección. Justifique adecuadamente sus respuestas.

1. Una urna contiene r bolas rojas y a bolas azules. Se escoge al azar una bola de la urna y luego se devuelve a la urna junto con d bolas más del mismo color. Este proceso se repite indefinidamente.
 - (a) Calcule la probabilidad de que la segunda bola que se saca sea azul.
 - (b) Calcule la probabilidad de que la primera bola es azul dado que la segunda también es azul
2.
 - (a) Sea $X \in \mathcal{L}^1$. Defina $Y_n = |X|1_{\{|X| \geq n\}}$ y muestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Y_n] = 0$.
 - (b) Sean $X \in \mathcal{L}^1$ y $\epsilon > 0$. Muestre que existe $M > 0$ tal que $\mathbf{E}[|X|1_{\{|X| \geq M\}}] < \epsilon$.
3. Sean $\{X_n\}_{n \geq 0}$ y X variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad.
 - (a) Muestre que $X_n \rightarrow X$ en $\mathcal{L}^2$ implica que $X_n \rightarrow X$ en probabilidad.
 - (b) De un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto.
 - (c) Muestre que si $|X_n|$ y $|X|$ están acotadas por M , entonces convergencia en probabilidad implica convergencia en $\mathcal{L}^2$.
4. Consideremos una muestra $X = (X_1, \dots, X_n)$ independiente e idénticamente distribuida con $X_i \sim U(\theta, \theta + 1)$, $\theta > 0$. Muestre que el estadístico del orden $T(X_1, \dots, X_n) := (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ es suficiente para θ . ¿Es mínimamente suficiente? Sustente su respuesta.
5. Muestre que el modelo estadístico dado por un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_k)$ donde X tiene una distribución multinomial $\mathcal{M}_{k, p_1, \dots, p_k}$ para n dado es una

familia exponencial para los parámetros $(p_1, \dots, p) \in (0, 1)^k$ con $\sum_{i=1}^k p_i$. ¿El estadístico $T(X_1, \dots, X_k) = (X_1, \dots, X_k)$ es suficiente y completo?

6. Consideremos el grafo de 6 puntos siguiente y una caminata aleatoria sobre estos estados.



- Muestre que esta caminata aleatoria simétrica sobre esta gráfica es irreducible.
- Calcule la matriz de transición.
- Calcule todas las medidas invariantes.
- Calcule el período de esta cadena de Markov. ¿Qué se puede inferir sobre la convergencia en distribución?
- ¿Cuál estado tiene el tiempo de primera vuelta esperado más grande para un estado?