PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Semestre 01-2024
Examen de conocimiento

Algunos hechos y definiciones:

- La distribución Gamma(α, β) $((\alpha, \beta) \in (0, \infty)^2)$ tiene densidad

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x). \tag{1}$$

  Se verifica que si $X_{(\alpha,\beta)}$ tiene densidad (), entonces

$$\mathbb{E}[X_{(\alpha,\beta)}] = \alpha\beta, \qquad \mathrm{var}(X_{(\alpha,\beta)}) = \alpha\beta^2.$$

Problemas

1. Sean $X, (X_k)_k$ variables aleatorias definidas en el mismo espacio de probabilidad.
    1.1 Transcribir las definiciones de convergencia ($n \to \infty$) de X_n a X en probabilidad: $X_n \to_{\mathbb{P},n} X$ y de convergencia de X_n a X en distribución: $X_n \Rightarrow_n X$.

    1.2 Muestre que $X_n \to_{\mathbb{P},n} X$ implica $X_n \Rightarrow_n X$ (puede asumir, si resulta conveniente, que $(X_n)_n$ y X tienen como soporte común un intervalo cerrado. Esta reducción es posible por el teorema del mapeo contínuo, que puede demostrarse sin incurrir en circularidad respecto a lo acá enunciado).

2. Sea $(X_k)_k$ una secuencia de variables aleatorias para la cual $\sum_k \mathbb{E}[X_k] < \infty$.
    2.1 Muestre que si

    $$X_k \geq 0 \qquad \mathbb{P}\text{ -}\textit{c.t.p.; excepto para finitos } k \tag{2}$$

    entonces

    $$\sum_k X_k \quad \textit{converge}, \qquad \mathbb{P}\text{-c.t.p.} \tag{3}$$

    y

    $$\mathbb{E}\left[\sum_k X_k\right] = \sum_k \mathbb{E}[X_k] \tag{4}$$

    (**sugerencia:** suponga que la nonegatividad en (2) se verifica para $k \geq N$, y sea $Y_k = X_{k+N}$. Basta mostrar (2) y (2) con Y_k en lugar X_k).

    2.2 Mostrar mediante un ejemplo que (2) puede no ocurrir cuando (2) no ocurre.

3. En la familia de Tristram, que consta en n personas, se intercambian libros en navidad. En 2022 todos leyeron un libro distinto de Steinbeck, y se lo regalaron a un miembro aleatorio de la familia esa navidad (a cada miembro con la misma probabilidad e independientemente de los demás libros)
    3.1 Hallar el valor esperado y la varianza del número de miembros en la familia que no recibieron libros de Steinbeck en la navidad de 2022.

    Suponga que, pasado un año (navidad de 2023), cada miembro de la familia regala cada libro recibido en el 2022, independientemente de los demás libros, a otro miembro aleatorio de la familia (nuevamente con la misma probabilidad).

    3.2 Hallar el valor esperado de número de miembros de la familia que no ha recibido libros de Steinbeck esa navidad.

    3.3 Hallar el valor esperado de número de miembros de la familia que no recibirán libros que no hayan leído.

4. En un barrio de una fría ciudad en las altiplanicies han ocurrido históricamente un promedio de 20 accidentes de tránsito por mes. Vándalos han arruinado repetidamente los semáforos y se quiere saber si está justificado o no seguirlos reparando, por lo que se observa durante 4 meses después de un acto vandálico el número de accidentes por mes, (X_1, X_2, X_3, X_4), para concluir según la evidencia obtenida.

Los estudiosos del fenómeno han determinado que el **modelo de Poisson** describe adecuadamente la variable aleatoria "número de accidentes por mes" en el barrio en cuestión, y se desea evaluar

$$\mathrm{H}_0 : \lambda = 20 \qquad \text{vs} \qquad \mathrm{H}_1 : \lambda > 20 \tag{5}$$

basado en $(X_1, \ldots, X_4)$. Para ello se plantea el estadístico

$$T(X_1, \ldots, X_4) = \sum_{k=1}^{4} X_k.$$

el cual, asumiendo que $(X_1, \ldots X_4)$ son independientes, sigue la distribución de Poisson con parámetro 4λ y, para evaluar (4), se rechaza H_0 al nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$ si

$$T(X_1, \ldots, X_4) > F^{-1}_{4\lambda_0}(1 - \alpha) \tag{6}$$

donde F_λ denota la c.d.f. de una Poisson λ y $\lambda_0 = 20$ (la inversa se entiende en sentido generalizado, pero puede asumirla contínua en sus cálculos formales).

4.1 De acuerdo a lo anterior, y aprovechando la notación introducida, hallar una fórmula del p-valor asociado a este test y al muestreo aleatorio $(X_1, \ldots, X_4)$ de números de accidentes mensuales.

4.2 Explique, introduciendo la notación necesaria, en qué consiste el test análogo con una muestra de tamaño arbitrario $(X_1, \ldots, X_n)$, y encuentre una fórmula para el p-valor respectivo.

4.3 Encuentre una fórmula para la potencia del criterio (4) cuando $\lambda = 21$ (α se asume fijo).

5. Si $(X_1^\theta, \ldots, X_n^\theta)$ denota un muestreo aleatorio de $X = \text{Gamma}(4, \theta)$ y si $(X_1, \ldots, X_n) = (X_1^{\theta^*}, \ldots, X_n^{\theta^*})$ para algún θ^* (desconocido):

   5.1 Muestre que

   $$\hat{\theta}_n := \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

   es el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_n$ de θ^* asociado a $(X_1, \ldots, X_n)$.

   5.2 Encuentre la información de Fisher $I(\theta)$ asociada a $\theta > 0$ y a la familia $(f_{(4,\theta)}(\cdot))_{\theta \in (0,\infty)}$ (puede dar por sentadas las consecuencias de las condiciones de regularidad usuales).

   5.3 Muestre que $\hat{\theta}_n$ es un estimador eficiente de θ^* en el sentido de Cramér-Rao.

   5.4 Describa la distribución asíntótica de $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*)$ (misma observación que en 5.2).

6. Sean $(Y_k)_k$ una cadena de Markov homogénea de estados finitos $S = \{1, \ldots, m\}$ ($\mathbb{P}[\bigcup_k Y_k \in S] = 1$) con matriz de transición $P = (P_{ij}) \in [0, 1]^{m \times m}$:

   $$P_{ij} = \mathbb{P}[Y_{n+1} = j | Y_n = i], \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   y $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ un autovector de P asociado al autovalor $\lambda \neq 0$:

   $$\lambda v_i = \sum_j P_{ij} v_j, \qquad 1 \le i \le m.$$

   Demuestre que $(X_k)_k$ dada por

   $$X_n = \lambda^{-n} v_{Y_n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

   es una martingala respecto a la filtración natural $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ ($n \in \mathbb{N}$).