Examen de Área. Probabilidad y Estadística.

Departamento de Matemáticas. Uniandes. Semestre 2019-I.

Nombre:__________________________ Código:______________

De las siguientes seis preguntas, seleccione y responda solo cinco, indicando su elección. Justifique adecuadamente sus respuestas.

1. Sean X_n, $n = 1, 2, \ldots$ y X, variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad.
   (i) Pruebe que $\mathbb{E}|X_n - X|^2 \to 0 \Rightarrow X_n \overset{(\mathrm{p})}{\to} X$.
   (ii) Dar contraejemplo de la implicación contraria.

2. A tiempo 0, una urna contiene una bola blanca y otra negra. En cada tiempo $n = 1, 2, \ldots$, se extrae una bola de la urna al azar, y se regresa a la urna, junto con otra del mismo color. Al final del n-ésimo período, hay $n + 2$ bolas en la urna, de las cuales $B_n + 1$ son negras, siendo B_n la cantidad de bolas negras que han sido añadidas a la urna. Sea
   $$M_n = \frac{B_n + 1}{n + 2}$$
   la proporción de bolas negras a tiempo n.
   (a) Pruebe que M_n es una martingala, con respecto a una filtración natural que Ud. debe especificar.
   (b) Calcule la probabilidad de que las primeras k bolas extraidas sean negras y las siguientes j sean blancas, para k y j naturales positivos.
   (c) Pruebe que $\Pr(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$ para $0 \leq k \leq n$ y deduzca la distribución límite de M_n.

3. Sean S y T tiempos de parada respecto a la filtración $\mathcal{F}_n$.
   (i) Pruebe que $\min(S, T)$ y $\max(S, T)$ son tiempos de parada.
   (ii) Suponiendo que $S \leq T$, ¿Es siempre cierto que $T - S$ es un tiempo de parada?

4. Sean $Z_1, Z_2, \ldots$ variables i.i.d. Normal(0,1). Sean $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ y $Y_n = \exp(S_n - n/2)$. Pruebe que $\{Y_n, \mathcal{B}_n\}$ es una martingala, para $\mathcal{B}_n = \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

5. Se tiene una muestra i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ de la distribución con densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2(x-\theta) & \text{si } \theta \leq x \leq \theta + 1, \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar el EMV de θ.

6. En notación matricial, el modelo lineal se escribe como

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \mathbf{e} \tag{1}$$

donde $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de respuestas, $\mathbb{X}$ (la matriz de diseño) es una matriz $n \times k$ de constantes, con $n > k$, cuyas columnas son lineálmente independientes, $\beta \in \mathbb{R}^k$ es un vector de parámetros que se desea estimar y $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de errores. Se supone que $\mathbb{E}\mathbf{e} = \mathbf{0}$ y $\mathrm{Cov}(\mathbf{e}) = \sigma^2 I_n$, siendo I_n la matriz identidad $n \times n$ y donde "Cov" denota la matriz de covarianzas de un vector. El estimador de mínimos cuadrados de β es

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k} \|\mathbf{Y} - \mathbb{X}\mathbf{b}\|^2$$

Sean $H = \mathbb{X}(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'$ y $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbb{X}\hat{\beta}$. Demuestre que
(i) H es la proyección ortogonal sobre el subespacio V de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de $\mathbb{X}$.
(ii) $\hat{\beta} = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbf{Y}$.
(iii) $\hat{\beta} = \beta + (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbf{e}$.
(iv) $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbb{X}\beta + H\mathbf{e}$.
(v) Deduzca de lo anterior la esperanza y matriz de covarianzas de $\hat{\beta}$ y la esperanza y matriz de covarianzas de $\hat{\mathbf{Y}}$.