Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

Examen de área en Probabilidad y Estadística, Semestre 201820 **2**

Nombre, Apellidos, Código

---

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y sea $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots\}$ una partición enumerable de conjuntos medible de Ω tal que $\mathbb{P}(C_n) > 0$ para cada n. Sea $\mathcal{C}$ la σ-álgebra generada por la partición Π.
   (a) Describa en pocas palabras los conjuntos de $\mathcal{C}$.
   (b) Sea X variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Muestre que
   $$\mathbb{E}[X|\mathcal{C}] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|C_i]\mathbf{1}_{C_i}.$$

2. Suponga que N bolas negras y N bolas blancas son colocadas aleatoriamente en dos urnas (Urna 1 y Urna 2) de tal forma que cada urna contiene N bolas. En cada unidad de tiempo una bola es seleccionada aleatoriamente de cada urna y puesta en la otra. Sea X_n el número de bolas negras en la Urna 1 después del n-ésimo intercambio de bolas. El proceso $\{X_n\}_{x \geq 0}$ es una cadena de Markov. Para esta cadena:
   (a) Establezca el espacio de estados S y calcule la matriz de transición P.
   (b) Clasifique los estados de la cadena. ¿Qué puede decir de
   $$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)}?$$

3. Sean $\{X_n\}_{x \geq 0}$ y X variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad.
   (a) Muestre que $X_n \to X$ en L^2 implica que $X_n \to X$ en probabilidad.
   (b) De un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto.
   (c) Muestre que si $|X_n|$ y $|X|$ están acotadas por M, entonces convergencia en probabilidad implica convergencia en L^2.

4. Sea $\mathbb{P}_\theta = \mathrm{Poi}(\theta)$. Consideramos el problema
   $$H_0 : \theta = 4 \text{ vs } H_1 : \theta = 8.$$
   (a) Construir el test de Neyman Pearson para el nivel $\alpha = \frac{1}{10}$.
   (b) Calcular la β asociada. Justifique su cálculo.
   (c) Para $n = 1$ y $x = 2, 3, 4$. ¿Cuales decisiones se toman? Justifique su respuesta.

5. Sea $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta>2}$ un modelo estadístico con densidad

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}} & x \geqslant x_0 \\ 0 & d.l.c. \end{cases}.$$

para una $x_0 > 0$. Sea $\theta_0 = 3$. Consideramos el problema

$$H_0 : \theta = 3 \text{ vs } H_1 : \theta > 3.$$

(a) Calcular el MLE $\hat{\theta}_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calcular la densidad de $T(x) = \hat{\theta}_1$ bajo H_0

(c) El p-valor es $P^T_{\theta_0}(T \leq t_{obs})$ o $P^T_{\theta_0}(T \geq t_{obs})$? Justifique su decisión y calcule su valor en dependencia de t_{obs}.

(d) Para $x_0 = 1$ y $t_{obs} = 2$: ¿Hay evidencia contra H_0? Justifique su respuesta.