Examen de Área 2018-1

1. Sean $X_i \sim$Exp(α_i), $\alpha_i > 0$ independientes.
   (a) Calcule la densidad de $Z = X_1 + X_2$, su función característica y su varianza.
   (b) Calcule la densidad conjunta de (X_1, Z).
   (c) Calcule la densidad condicional de X_1 dado Z.
   (d) Calcule $\mathbb{E}[X_1|Z]$.

2. (a) Muestre que $X_n \xrightarrow{c.s} X$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ se tiene que
   $$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon \text{ i.o}) = 0.$$
   (b) Suponga que $X_n \xrightarrow{P} X$, muestre que existe una subsucesión que converge a X c.s.
   (c) De un ejemplo de una sucesión de variables aleatorias que converja en probabilidad pero no c.s.

3. (a) Sea X una variable aletoria con valores en $\mathbb{R}$ en $\mathcal{L}^1$ y sea $t \geq 0$. Muestre que para todo $\lambda \geq 0$ se tiene que $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \geq t) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left[e^{\lambda(X-\mathbb{E}[X])}\right]$.
   (b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ iid con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ y $Z = \sum_{i=1}^n X_n$. Muestre que para t y λ como antes se tiene que $\mathbb{P}(Z \geq t) \leq e^{-\lambda t}\left(\mathbb{E}[e^{\lambda X_i}]\right)^n$.
   (c) Suponga que $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. Use el hecho de que $\cosh(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ para todo x, para mostrar que $\mathbb{P}(Z \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}$.
   (d) ¿Cuál valor de t tomaría para garantizar que $\mathbb{P}(Z \geq t) \leq \delta$, con $\delta \in (0, 1)$?

4. Sean $X = (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una familia i.i.d. variables aleatorias con $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ y τ una variable aleatoria con valores en $\mathbb{N}$ con $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ e independiente de la familia X.
   (a) Mostrar que
   $$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\tau} X_i] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[\tau].$$

(b) Si adicionalmente τ y los X_i disponen de segundos momentos, entonces

$$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{\tau} X_i) = \mathbb{V}(\tau)(\mathbb{E}(X_1))^2 + \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1).$$

Indicación: Usar la formula para una variable aleatoria Y con segundos momentos y evento A.

$$\mathbb{V}(Y \mid A) := \mathbb{E}(Y^2|A) - \mathbb{E}(Y|A)^2.$$

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X con función de densidad de Pareto dada por

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, \quad x > 1$$

con $\theta > 2$. Sea $\Omega = [2, \infty)$ y asuma que esta densidad satisface todas las condiciones de regularidad necesarias. Use que $\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{\theta-1}$ y $\mathbb{V}(X) = \frac{\theta}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$.

(a) Halle es estimador de máxima verosimilitud de θ, $\hat{\theta}$.

(b) ¿Cuál es la distribución asintótica de $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$? Encuentre un intervalo de confianza aproximado al $(1-\alpha)100\%$ para θ.

(c) Usando el teorema de límite central y el método Δ con $g(x) = \frac{x}{x-1}$, encuentre la distribución asintótica de $\sqrt{n}(g(\overline{X}) - \theta)$. Calcule la eficiencia asintótica de $g(\overline{X})$ como estimador de θ, definida como el cociente de la varianza de la distribución límite encontrada en b) sobre la varianza de la distribución límite anterior. ¿Qué puede decir de esta eficiencia asintótica cuando θ es grande?

Recuerde que:

1. $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$ para los estimadores de máxima verosimilitud, donde I es la información de Fisher dada por

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} f(X;\theta)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} f(X;\theta)\right)^2\right].$$

2. Método Δ: $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2\right) \implies \sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \sigma^2(g'(\theta)^2)\right)$.

3. Distribución Exp(α): $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$.

4. Distribución Normal(μ, σ^2): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, media μ y varianza σ^2.