Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística. 2015-I

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco (5) de las seis (6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3) horas.
- En la última página encontrará un formulario con las funciones de probabilidad (o densidad de probabilidad, en el caso continuo) la media y varianza de las principales distribuciones.

1. Sean X_n, $n \geq 1$, y X variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad. Decimos que X_n converge a X en media cuadrática y escribimos $X_n \overset{(\mathrm{mc})}{\to} X$, cuando $\mathbb{E}(X_n - X)^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pruebe lo siguiente:
   (i) $X_n \overset{(\mathrm{mc})}{\to} X \Longrightarrow X_n \overset{(\mathrm{p})}{\to} X$, es decir, convergencia en media cuadrática implica convergencia en probabilidad.
   (ii) De un ejemplo que muestre que el recíproco no es cierto.
   (iii) Muestre que si existe $M > 0$ tal que $|X_n| \leq M, |X| \leq M$, entonces $X_n \overset{(\mathrm{p})}{\to} X \Longrightarrow X_n \overset{(\mathrm{mc})}{\to} X$.

2. Sea $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias sobre el mísmo espacio de probabilidad con
$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^3}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^3}.$$
   (i) Muestre que $X_n \to 0$ en probabilidad.
   (ii) Determine en qué espacios $L^p(\mathbb{P})$, $p \geq 1$, se cumple $X_n \to 0$.
   (iii) Muestre que $X_n \to 0$, casi seguramente.

3. Demuestre que si X es una variable aleatoria con valores en $[0, \infty)$, con distribución $\mathbb{P}_X$ absolutamente contínua respecto a la medida de Lebesgue, y con una densidad estrictamente positiva en $[0, \infty)$ que satisface: para cualesquiera $t, s > 0$
$$0 < \mathbf{P}(X > t + s | X > t) = \mathbf{P}(X > s) < 1$$
existe un $\lambda > 0$ tal que $X \sim \exp(\lambda)$.

   Nota: Definiendo $\phi(t) = \mathbb{P}(X > t)$, Usted puede usar la relación del enunciado para probar
$$\phi(t + s) = \phi(t)\phi(s).$$
   y luego encontrar ϕ a partir de esta última identidad.

4. Sea B un movimiento Browniano con valores en $\mathbb{R}$. Muestre lo siguiente:
(i) El proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$ definido como $Y_t := B_t^2 - \mathbb{E}(B_t^2)$ es una martingala con respecto a la filtración natural de B.
(ii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces el proceso $(Z_t)_{t\geq 0}$, definido como $Z_t := \frac{e^{\lambda B_t}}{\mathbb{E}(e^{\lambda B_t})}$ es una martingala con respecto a la filtración natural de B.

5. Considere el modelo de regresión lineal múltiple, escrito matricialmente como

$$\mathbf{Y} = \mathbb{X}\beta + \epsilon$$

donde $\mathbf{Y}$ es el vector respuesta $n \times 1$, $\mathbb{X}$ es la matriz de diseño, $n \times k$, β es el vector de parámetros, $k \times 1$ y ϵ es el vector de errores con distribución N $(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$, siendo I_n la matriz identidad $n \times n$.

Sea $\hat{\beta}$ el estimador de mínimos cuadrados de β. Pruebe que si las columnas de $\mathbb{X}$ son ortogonales, entonces las coordenadas de $\hat{\beta}$ son independientes. *Nota: Puede probar que las coordenadas de $\hat{\beta}$ son no correlacionadas e invocar una propiedad de la Normal multivariada.*

6. Sea X con distribución $f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otra parte.} \end{cases}$

   (a) Encuentre la información de Fisher $I(\theta)$.

   (b) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de esta distribución, muestre que el estimador de máxima verosimilitud de θ, es

   $$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

   (c) Cuál es la distribución asintótica de $\sqrt{n}\left(\hat{\theta} - \theta\right)$? Basado en esto, muestre que un intervalo aproximado de $1-\alpha$ de confianza para θ es $\hat{\theta} \pm z_{\alpha/2}\frac{\hat{\theta}}{\sqrt{n}}$.

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	E(X)	Var(X)
Bin(n,p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\ldots,n\}$	np	$np(1-p)$
Geo(p)	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\ldots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
BinNeg(k,p)	$\binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$	$\{k,k+1,\ldots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson(λ)	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\ldots\}$	λ	λ
N(μ,σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Unif(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exp(λ)	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma(α,β)	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Beta(α,β)	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$x \in [0,1]$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$