Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística. 2014-II

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco (5) de las seis (6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3) horas.
- En seguida encontrará un formulario con las funciones de probabilidad (o densidad de probabilidad, en el caso continuo) la media y varianza de las principales distribuciones.

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\dots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\mathrm{BinNeg}(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$	$\{k,k+1,\dots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
$\mathrm{Poisson}(\lambda)$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\dots\}$	λ	λ
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2
$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\exp(\lambda)$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
$\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$x\in[0,1]$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

1. Sean $X_n, n = 1, 2, \dots$ y X variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad.
(i) Pruebe que, si $X_n \to X$, c.s., cuando $n \to \infty$, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to X, \text{ c.s.}$$

(ii) Muestre con un ejemplo, que el resultado de (i) no es cierto si cambiamos convergencia casi segura por convergencia en probabilidad.
Para (i) puede usar que para números $x_n,\ n = 1, 2, \cdots,$

$$x_n \to x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \to x.$$

2. Para el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, P)$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel y P es alguna medida de probabilidad, sea $\Pi = \{C_1, C_2, \dots\}$ una partición numerable medible de $\mathbb{R}^d$, tal que $P(C_n) > 0$ para cada n. Sea $\mathcal{C} = \sigma(\Pi)$ la σ-álgebra generada por la partición Π.
(i) Describa, en pocas palabras, los conjuntos de $\mathcal{C}$.
(ii) Recuerde que para una variable aleatoria X en este espacio, y cada $C_i \in \Pi$,

$$\mathbb{E}(X \,|\, C_i) = \frac{1}{P(C_i)} \int_{C_i} X(x)\, \mathrm{d}P(x)$$

Demuestre que

$$\mathbb{E}(X \,|\, \mathcal{C})(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X \,|\, C_n) \mathbb{1}_{C_n}(x), \quad \text{casi seguramente.}$$

3. Para la Cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.25 & 0.15 & 0.25 \\ 0.30 & 0.30 & 0.20 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0.60 & 0.40 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0.50 \\ & & & \end{pmatrix}$$

se tiene como distribución inicial el vector $(.3, .7, 0, 0)$. Si $T = \{1, 2\}$ y $\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin T\}$, hallar
(i) $\Pr(X_\tau = 3)$, $\Pr(X_\tau = 4)$.
(ii) $\mathbb{E}\tau$.

4. Sean $X_1, X_2, \dots$ variables i.i.d. N(0,1). Para $0 < \lambda < 1$ y $x \in \mathbb{R}$, fijos, definimos Y_n recursivamente, como sigue:

$$Y_0 = x, \qquad Y_{n+1} = \lambda Y_n + X_{n+1}, \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Demuestre que la sucesión de variables $\{Y_n, n \geq 0\}$ converge en distribución y describa la distribución límite.

5. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución $N(\mu_0, \sigma^2 = \theta)$, donde $0 < \theta < \infty$ y μ_0 es conocida. Muestre que la prueba de razón de verosimilitudes de $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ versus $\mathrm{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ se puede basar en el estadístico $W = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2/\theta_0$. Determine la distribución de W y dé, explícitamente, la regla de rechazo para una prueba de nivel α.

6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución gamma con parámetro conocido $\alpha = 3$ y $\beta > 0$ desconocido (ver la densidad Gamma al final del enunciado del examen).

   (a) Cuál es la distribución de $2\sum_{i=1}^{n} X_i/\beta$?

   (b) Halle un intervalo de $1 - \alpha$ de confianza para β (en términos de los cuantiles de la distribución apropiada).
   Ayuda: La función generadora de momentos para la Gamma(α, β) es
   $M(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$.