Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística. 2013-II

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco (5) de las seis (6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3) horas.
- En la última página encontrará un formulario con las funciones de probabilidad (o densidad de probabilidad, en el caso continuo) la media y varianza de las principales distribuciones.

1. Sean X e Y variables i.i.d. con distribución $\mathrm{Geo}(p)$.
(a) Hallar $\Pr(X = Y)$.
(b) Hallar $\Pr(X \geq Y)$.

2. El método Monte Carlo para el cálculo de una integral que pueda escribirse como

$$\eta = \int_J h(x) f(x)\, \mathrm{d}x,$$

siendo $f(x)$ una densidad de probabilidad cuyo soporte incluye al intervalo J, consiste en generar datos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ i.i.d. con densidad $f(x)$ y usar el estimador

$$\hat{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(X_i) \mathbb{1}_J(X_i)$$

(a) Demuestre que $\hat{\eta}$ es insesgado.
(b) Encuentre la varianza de $\hat{\eta} - \eta$.
(c) Pruebe que $Z_n = \sqrt{n}(\hat{\eta} - \eta)$ es una sucesión acotada en probabilidad ($\forall \epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que, $\forall n$, $\Pr(|Z_n| > M) \leq \epsilon$).

3. Muestre que una cadena de Markov finita e irreducible es recurrente positiva. ¿Qué puede decir si la cadena es además aperiódica?

4. Serie armónica aleatoria: Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d con $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Sea $M_0 = 0$ y $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{1}{i}$.

   a) Muestre que $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es una martingala con respecto a la filtración generada por $\{X_n\}_{n \geq 1}$.
   b) Muestre que $\{M_n\}_{n \geq 0}$ converge casi siempre.
   c) Calcule $E[M_\infty]$ y $\mathrm{Var}(M_\infty)$.

5. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra i.i.d. proveniente de la distribución $\mathrm{Unif}(\theta, \theta+1)$. Sean $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ y $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
(i) Dar una condición, en términos de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$, para que $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ sea un Estimador de Máxima Verosimilitud (EMV) para θ.
(ii) Sabiendo que $X_{(1)} - \theta$ y $X_{(n)} - \theta$ tienen densidad de probabilidad $\mathrm{Beta}(1, n)$ y $\mathrm{Beta}(n, 1)$, respectivamente, pruebe que con probabilidad 1, en este caso existen infinitos EMVs para θ. (Basta usar que las variables Beta tienen densidad con soporte [0,1])

6. La variable X tiene densidad $f(x) = 2x/\theta^2$, para $x \in [0, \theta]$. Para estimar θ consideramos dos estimadores: $\tilde{\theta}_1 = X_{(n)}$ y $\tilde{\theta}_2 = 3\overline{X}/2$. Hallar el sesgo y varianza de cada estimador y decidir cual de los dos es preferible.

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\ldots,n\}$	np	$np(1-p)$
$\mathrm{Geo}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\ldots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$\mathrm{BinNeg}(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$	$\{k,k+1,\ldots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
$\mathrm{Poisson}(\lambda)$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\ldots\}$	λ	λ
$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\exp(\lambda)$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
$\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$x \in [0,1]$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$