Universidad de los Andes **Departamento de Matemíticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística
junio - 2012

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco(5) de las seis(6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3)horas.
- En las últimas páginas encontrará un formulario con la media y varianza de las principales distribuciones y una tabla de la distribución N(0,1).

1. Sean a_n una sucesión determinística y X_n una sucesión de variables aleatorias. Si $a_n \to a \in \mathbb{R}$ y $X_n \overset{(p)}{\to} X$, cuando $n \to \infty$, pruebe que $a_n X_n \overset{(p)}{\to} aX$.

2. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^{\infty}$ una filtración, es decir, una sucesión de σ-álgebras tales que $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ para $i < j$ y $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$, para todo i. Sea X una variable aleatoria en $\mathcal{L}^1(P)$. Pruebe que la sucesión de variables aleatorias dadas por $Y_i = \mathbb{E}(X|\mathcal{A}_i)$ es uniformemente integrable.

3. Un mazo de cartas de Poker consta de 52 cartas. Las cartas son de cuatro pintas distintas, trébol ($\clubsuit$), corazón ($\heartsuit$), diamante ($\diamondsuit$) y picas ($\spadesuit$). Las trece cartas de una pinta van "numeradas" A (as), 2, 3,..., 9, 10, J (jack), Q (reina) y K (rey).
(a) Si se toman 5 cartas al azar sin remplazo. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un "full house": tres cartas de un mismo número (un trío) y dos de otro número (un par)?
(b) ¿Cual es la probabilidad de obtener dos pares, es decir: dos cartas de un número, dos de otro número y la quinta carta de un tercer número?
(c) Ahora se barajan 52 cartas numeradas 1 al 52 y se voltean (se muestran) una a una. Decimos que ocurre una coincidencia cuando la i-ésima carta volteada lleva el número i. Calcule el número esperado de coincidencias.

4. En una ciudad andina, la probabilidad de que un día de lluvia sea seguido de otro día de lluvia es p_1 y la probabilidad de que un día seco sea seguido por otro día seco es p_2. Los días se clasifican solo en lluviosos y secos. ¿Que porcentaje de los días en esta ciudad son lluviosos?

5. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra i.i.d. de una distribución con media μ y varianza σ^2. Pruebe que el estimador usual de σ^2,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

es insesgado y consistente.

6.

7. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias i.i.d. Unif$(0, \theta)$ y sean $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ los correspondientes estadísticos de orden. Para cada $i \leq n$ encuentre una constante c_i de manera que $\tilde{\theta}_i = c_i X_{(i)}$ sea un estimador insesgado de θ. ¿Para cual valor de i se obtiene la menor varianza? (Ayuda: El estadístico de orden $X_{(j)}$ para datos Unif(0,1) tiene distribución Beta$(j, n-j+1)$. Puede encontrar la media y varianza de una variable Beta en la tabla incluída al final del enunciado del examen.)

Estadísticos de orden

Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra i.i.d. de distribución con f.d.a. F y densidad f. Los estadísticos de orden $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ correspondientes son los mismos valores muestrales ordenados de menor a mayor. Es decir, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \cdots \leq X_{(n)}$. Entonces, el j-ésimo estadistico de orden, $X_{(j)}$ tiene densidad

$$g_j(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} F(x)^{j-1}(1-F(x))^{n-j} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En el caso particular en que los X_i son Unif(0,1), g_j es la densidad Beta$(j, n-j+1)$. Si los X_i son una muestra i.i.d. con f.d.a. F y aplicamos la transformación $Y_i = F(X_i)$, entonces los Y_i son una muestra Unif(0,1).

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	E(X)	Var(X)
Bin(n,p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
Geo(p)	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\dots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
BinNeg(k,p)	$\binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$	$\{k, k+1, \dots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson(λ)	$\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\dots\}$	λ	λ
N(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Unif(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exp(λ)	$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma(α, β)	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$

Función de Distribución Acumulativa N(0,1): $F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5	0.50398	0.50797	0.51196	0.51595	0.51993	0.52392	0.5279	0.53188	0.53585
0.1	0.53982	0.54379	0.54775	0.55171	0.55567	0.55961	0.56355	0.56749	0.57142	0.57534
0.2	0.57925	0.58316	0.58706	0.59095	0.59483	0.5987	0.60256	0.60641	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62171	0.62551	0.6293	0.63307	0.63683	0.64057	0.6443	0.64802	0.65173
0.4	0.65542	0.65909	0.66275	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69846	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.7224
0.6	0.72574	0.72906	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75174	0.7549
0.7	0.75803	0.76114	0.76423	0.7673	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.7823	0.78523
0.8	0.78814	0.79102	0.79389	0.79673	0.79954	0.80233	0.8051	0.80784	0.81057	0.81326
0.9	0.81593	0.81858	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83397	0.83645	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84613	0.84849	0.85083	0.85314	0.85542	0.85769	0.85992	0.86214
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87285	0.87492	0.87697	0.87899	0.88099	0.88297
1.2	0.88493	0.88686	0.88876	0.89065	0.89251	0.89435	0.89616	0.89795	0.89972	0.90147
1.3	0.90319	0.9049	0.90658	0.90824	0.90987	0.91149	0.91308	0.91465	0.9162	0.91773
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	0.92647	0.92785	0.92921	0.93056	0.93188
1.5	0.93319	0.93447	0.93574	0.93699	0.93821	0.93942	0.94062	0.94179	0.94294	0.94408
1.6	0.9452	0.9463	0.94738	0.94844	0.94949	0.95052	0.95154	0.95254	0.95352	0.95448
1.7	0.95543	0.95636	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96079	0.96163	0.96246	0.96327
1.8	0.96406	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	0.96784	0.96855	0.96925	0.96994	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97319	0.97381	0.97441	0.975	0.97558	0.97614	0.9767
2.0	0.97724	0.97778	0.9783	0.97882	0.97932	0.97981	0.9803	0.98077	0.98123	0.98169
2.1	0.98213	0.98257	0.98299	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98499	0.98537	0.98573
2.2	0.98609	0.98644	0.98679	0.98712	0.98745	0.98777	0.98808	0.98839	0.98869	0.98898
2.3	0.98927	0.98955	0.98982	0.99009	0.99035	0.99061	0.99086	0.9911	0.99134	0.99157
2.4	0.9918	0.99202	0.99223	0.99245	0.99265	0.99285	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99476	0.99491	0.99505	0.9952
2.6	0.99533	0.99547	0.9956	0.99573	0.99585	0.99597	0.99609	0.9962	0.99631	0.99642
2.7	0.99653	0.99663	0.99673	0.99683	0.99692	0.99702	0.9971	0.99719	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99759	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99794	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99824	0.9983	0.99835	0.99841	0.99846	0.99851	0.99855	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99873	0.99877	0.99881	0.99885	0.99889	0.99892	0.99896	0.99899
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99923	0.99926	0.99928
3.2	0.99931	0.99933	0.99935	0.99938	0.9994	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99949
3.3	0.99951	0.99953	0.99954	0.99956	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99963	0.99965
3.4	0.99966	0.99967	0.99968	0.99969	0.9997	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975