Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Probabilidad y Estadística
diciembre - 2011

Instrucciones:

- Escoja y responda cinco(5) de las seis(6) preguntas siguientes, incluyendo suficientes cálculos y explicaciones sobre su procedimiento.
- Tiempo del examen: Tres (3)horas.
- En las últimas páginas encontrará algunos resultados sobre estadísticos de orden, un formulario con la media y varianza de las principales distribuciones y una tabla de la distribución N(0,1).

1. Decimos que una sucesión de variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ es acotada en probabilidad (o "tensa") cuando, para todo $\epsilon > 0$, existen $M > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que,
$$\Pr(|Y_n| \geq M) \leq \epsilon, \ \forall\, n \geq n_0.$$
Sea a_n una sucesión determinística (no aleatoria) de números positivos, tal que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pruebe que, si la sucesión $\{Z_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en probabilidad, entonces $Z_n \overset{(p)}{\to} 0$, cuando $n \to \infty$.

2. Describa un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y un conjunto de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ definidas en Ω de tal manera que las X_i formen una martingala no uniformemente integrable. (Ayuda: puede conseguir un ejemplo considerando un apostador que inicialmente tiene un dolar y en una sucesión de ensayos Bernoulli(1/2) apuesta siempre todo su capital a "éxito" (doble o nada), hasta que finalmente se queda sin nada).

3. Un fumador lleva inicialmente una caja de 20 fósforos en el bolsillo derecho de su chaqueta y otra caja idéntica en el bolsillo izquierdo. Cada vez que desea fumar, elige una de los dos bolsillos al azar y extrae un fósforo de la caja en ese bolsillo. Llega un momento en el que, al abrir una de las cajas de fósforos, esta se encuentra vacía. ¿Cual es la probabilidad de que en ese momento en la otra caja queden j fósforos, para $j = 0, 1, 2, \ldots, 20$?

4. Suponga que N bolas negras y N bolas blancas son colocadas aleatoriamente en dos urnas (Urna 1 y Urna 2) de tal forma que cada urna contiene N bolas. En cada unidad de tiempo una bola es selecionada aleatoriamente de cada urna y puesta en la otra. Sea X_n el número de bolas negras en la urna 1 después del $n-$ésimo intercambio de bolas. La sucesión $X = \{X_n\}$ es una cadena de Markov. Para esta cadena:

   a) Establezca su espacio de estado S y proporcione su matriz de transición $P = (P_{ij})$ para todo $i, j \in S$.

   b) Clasifique sus estados y para $P_{ij}^{(n)}$ la matriz de transición en n pasos, verifique si existe el límite
$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$$
   y si es estrictamente positivo.

5. Consideremos datos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, i.i.d. con la distribución exponencial con retardo, que tiene densidad
$$f(x) = \mathrm{e}^{-(x-\theta)}, \quad \text{para } x > \theta.$$
Un posible estimador de θ es $\tilde{\theta}_1 = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Otro es $\tilde{\theta}_2 = \overline{X} - 1$. ¿Cual de estos estimadores es insesgado? ¿Cual de ellos es consistente? ¿Cual de los dos es mejor?
Ayuda: Calcule los ECM (error cuadrático medio) de cada estimador.

6. Supongamos que se tiene una muestra de tamaño n de una distribución continua con densidad
$$f(x;\theta) = \theta(1-x)^{\theta-1}, \qquad x \in (0,1). \tag{1}$$

(a) Hallar el EMV de θ.
(b) Hallar la información de Fisher de un dato, $I_1(\theta)$, para la densidad dada por (1).
(c). ¿Que dice en este caso el Teorema del Límite Central para EMV?
(d) Usar el resultado de la parte (c) para dar un intervalo de confianza aproximado del 95 % para θ.
(e) Recordemos que el método Δ nos dice que, si la variable Z_n satisface un TLC de la forma
$$\sqrt{n}(Z_n - \theta) \overset{\text{(d)}}{\to} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$
y g es una función derivable en θ, entonces $g(Z_n)$ también cumple un TLC, dado por
$$\sqrt{n}(g(Z_n) - g(\theta)) \overset{\text{(d)}}{\to} \mathrm{N}(0, ((g'(\theta))^2\sigma^2).$$
Como la densidad en (1) es una Beta(1,θ), su esperanza vale $\mu = 1/(1+\theta)$. Por tanto
$$\sqrt{n}(\overline{X} - \frac{1}{1+\theta}) \overset{\text{(d)}}{\to} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$
donde σ^2 es la varianza de la Beta(1,θ). Si tomamos $g(u) = (1/u) - 1$, se tiene $g(\frac{1}{1+\theta}) = \theta$ y por el método Δ, tenemos que $\sqrt{n}(g(\overline{X}) - \theta)$ converge a una normal. Encuentre la eficiencia asintótica del estimador $\tilde{\theta}_2 = g(\overline{X}) = (1/\overline{X} - 1)$.

Estadísticos de orden

Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra i.i.d. de distribución con f.d.a. F y densidad f. Los estadísticos de orden $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ correspondientes son los mismos valores muestrales ordenados de menor a mayor. Es decir, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \cdots \leq X_{(n)}$. Entonces, el j-ésimo estadistico de orden, $X_{(j)}$ tiene densidad

$$g_j(x) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} F(x)^{j-1}(1-F(x))^{n-j} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

En el caso particular en que los X_i son Unif(0,1), g_j es la densidad Beta$(j, n-j+1)$. Si los X_i son una muestra i.i.d. con f.d.a. F y aplicamos la transformación $Y_i = F(X_i)$, entonces los Y_i son una muestra Unif(0,1).

Principales Distribuciones

Distribución	$p(x)$ o $f(x)$	Rango(X)	E(X)	Var(X)
Bin(n,p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$\{0,1,2,\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
Geo(p)	$(1-p)^{x-1}p$	$\{0,1,2,\dots\}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
BinNeg(k,p)	$\binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$	$\{k, k+1, \dots\}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson(λ)	$\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$\{0,1,2,\dots\}$	λ	λ
N(μ, σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Unif(a,b)	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exp(λ)	$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$	$x > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma(α, β)	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x/\beta}$	$x > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$

Función de Distribución Acumulativa N(0,1): $F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/2} \mathrm{d}u$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5	0.50398	0.50797	0.51196	0.51595	0.51993	0.52392	0.5279	0.53188	0.53585
0.1	0.53982	0.54379	0.54775	0.55171	0.55567	0.55961	0.56355	0.56749	0.57142	0.57534
0.2	0.57925	0.58316	0.58706	0.59095	0.59483	0.5987	0.60256	0.60641	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62171	0.62551	0.6293	0.63307	0.63683	0.64057	0.6443	0.64802	0.65173
0.4	0.65542	0.65909	0.66275	0.6664	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69846	0.70194	0.7054	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.7224
0.6	0.72574	0.72906	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75174	0.7549
0.7	0.75803	0.76114	0.76423	0.7673	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.7823	0.78523
0.8	0.78814	0.79102	0.79389	0.79673	0.79954	0.80233	0.8051	0.80784	0.81057	0.81326
0.9	0.81593	0.81858	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83397	0.83645	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84613	0.84849	0.85083	0.85314	0.85542	0.85769	0.85992	0.86214
1.1	0.86433	0.8665	0.86864	0.87076	0.87285	0.87492	0.87697	0.87899	0.88099	0.88297
1.2	0.88493	0.88686	0.88876	0.89065	0.89251	0.89435	0.89616	0.89795	0.89972	0.90147
1.3	0.90319	0.9049	0.90658	0.90824	0.90987	0.91149	0.91308	0.91465	0.9162	0.91773
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	0.92647	0.92785	0.92921	0.93056	0.93188
1.5	0.93319	0.93447	0.93574	0.93699	0.93821	0.93942	0.94062	0.94179	0.94294	0.94408
1.6	0.9452	0.9463	0.94738	0.94844	0.94949	0.95052	0.95154	0.95254	0.95352	0.95448
1.7	0.95543	0.95636	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96079	0.96163	0.96246	0.96327
1.8	0.96406	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	0.96784	0.96855	0.96925	0.96994	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97319	0.97381	0.97441	0.975	0.97558	0.97614	0.9767
2.0	0.97724	0.97778	0.9783	0.97882	0.97932	0.97981	0.9803	0.98077	0.98123	0.98169
2.1	0.98213	0.98257	0.98299	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98499	0.98537	0.98573
2.2	0.98609	0.98644	0.98679	0.98712	0.98745	0.98777	0.98808	0.98839	0.98869	0.98898
2.3	0.98927	0.98955	0.98982	0.99009	0.99035	0.99061	0.99086	0.9911	0.99134	0.99157
2.4	0.9918	0.99202	0.99223	0.99245	0.99265	0.99285	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99476	0.99491	0.99505	0.9952
2.6	0.99533	0.99547	0.9956	0.99573	0.99585	0.99597	0.99609	0.9962	0.99631	0.99642
2.7	0.99653	0.99663	0.99673	0.99683	0.99692	0.99702	0.9971	0.99719	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99759	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99794	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99824	0.9983	0.99835	0.99841	0.99846	0.99851	0.99855	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99873	0.99877	0.99881	0.99885	0.99889	0.99892	0.99896	0.99899
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99923	0.99926	0.99928
3.2	0.99931	0.99933	0.99935	0.99938	0.9994	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99949
3.3	0.99951	0.99953	0.99954	0.99956	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99963	0.99965
3.4	0.99966	0.99967	0.99968	0.99969	0.9997	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975