Propuesta de puntos
Examen de Probabilidad y Estadística
2010-06

1. Sea Ω un conjunto no vacío. Sea F_0 la colección de todos los subconjuntos tales que A o A^c son finitos.

   (a) Muestre que F_0 es un álgebra (cerrada bajo uniones e intersecciones finitas, y complementos)
   Defina para $E \in F_0$ la función P por

   $$P(E) = \begin{cases} 0, & \text{si } E \text{ es finito} \\ 1, & \text{si } E^c \text{ es finito} \end{cases}$$

   (b) Si Ω es infinito enumerable, muestre que P es finitamente aditivo pero no $\sigma-$aditivo.

   (c) Si Ω es no enumerable, muestre que P es $\sigma-$aditivo en F_0.

2. Demuestre las diferentes implicaciones de convergencia estocástica que se muestran a continuación:

$$\begin{tikzcd}
\text{C.S.} \arrow[dr, "1"'] & & \text{M.C.} \arrow[dl, "2"] \\
& \text{P} \arrow[d, "3"'] & \\
& \text{L} &
\end{tikzcd}$$

   Donde:
   C.S. es convergencia casi siempre
   M.C. es convergencia en Media Cuadrática ($\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - c|\right) = 0 \Leftrightarrow X_n \overset{\text{M.C.}}{\to} c$)
   P es convergencia en probabilidad
   L es convergencia en Ley o distribución.
   Para el caso 3. Muestre y utilice que si $|X_n - Y_n| \overset{\text{P}}{\to} 0$ y $Y_n \overset{\text{L}}{\to} Y \Rightarrow X_n \overset{\text{L}}{\to} Y$

3. Suponga la distribución de RALEIGH dada por

$$f(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) I_{(0,\infty)}(x), \text{ con } \theta > 0$$

y que se tiene una muestra $X_1, X_2, ..., X_n$ iid de esta distribución.

(a) Compruebe que es densidad

(b) Calcule media y varianza

(c) Calcule el estimador de momentos $\hat{\Theta}$.

(d) Compruebe que $\hat{\Theta}$ es consistente.

(e) Verifique la desigualdad de Crámer-Rao.

4. Considere la función de densidad exponencial, $f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} I_{(0,\infty)}(x)$.

(a) Si x es un valor de una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial, encuentre k de forma que el intervalo de 0 a kx es un intervalo de confianza del $(1-\alpha)$ por ciento para el parámetro θ.

(b) Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con la misma distribución exponencial con parámetro θ, muestre que la variable aleatoria $X_1 + X_2$ es una variables aleatoria $\Gamma(2,\theta)$. (Z es $\Gamma(\alpha,\beta)$ si la función de densidad de Z es $f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} z^{\alpha-1} e^{-\frac{z}{\beta}} I_{(0,\infty)}(z)$)

(c) Se quiere probar la hipótesis $\mathrm{H}_0 : \theta = 1$ contra la alternativa $\mathrm{H}_a : \theta > 1$. Se rechaza H_0 en favor de H_a si $X_1 + X_2 > k$. Halle el valor de k tal que la probabilidad de cometer el error de tipo I (rechazar H_0 dado que H_0 es cierta), sea igual a 0.05.

5. Suponga que X y Y son variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f(x,y)$. Si $f_{Y/X}(y/x)$ es la función de densidad condicional de Y dado X, la ecuación

$$\mu_{y/x} := E(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy$$

se llama ecuación de regresión de Y sobre X. Si la regresión de Y sobre X es lineal, es de la forma $\mu_{Y/x} = \alpha + \beta x$, donde α y β son constantes llamados los coeficientes de regresión. Si la regresión de Y sobre X es lineal, muestre que

$$\mu_{Y/x} = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

donde $E(X) = \mu_1$, $E(Y) = \mu_2$, $\mathrm{var}(X) = \sigma_1^2$, $\mathrm{var}(Y) = \sigma_2^2$, $\mathrm{cov}(X,Y) = \sigma_{12}$ y $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$. (Ayuda: halle dos ecuaciones, en una hay momentos de orden uno y en la otra hay momentos de orden dos)