**Universidad de los Andes** **Departamento de Matemáticas**

**Examen de Área de Probabilidad y Estadística- 2008**

**Instrucciones:**

- Escoge cuatro (4) de seis(6) preguntas en parte I de Probabilidad
- Escoge una pregunta en parte II de Estadística.
- Tiempo : Tres (3)horas

PARTE I - PROBABILIDAD

1. *a*) Sean $\Omega = \{1,2,3\}$, $\Im_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\}$ y $\{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3\}\}$. Demuestra qué $\Im_1$ y $\Im_2$ son $\sigma-$algebras, pero $\Im_1 \cup \Im_2$ no es $\sigma-$algebra.

   *b*) Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$. Halle cuatro(4) $\sigma-$algebras diferentes $\{\Im_n\}$ para $n = 1,2,3,4$ tal que $\Im_1 \subset \Im_2 \subset \Im_3 \subset \Im_4$.

2. *a*) Sea $X$ una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda$. Hallar una función de densidad de la variable aleatoria

$$Y := \ln X.$$

   *b*) Un jugador extrae simultánea y aleatoriamente dos bolas de una urna que contiene 8 bolas blancas, 5 bolas negras y 3 bolas azules. Suponga que el jugador gana 5000 pesos por cada bola negra seleccionada y pierde 3000 pesos por cada bola blanca seleccionada. Sea $X$ la variable aleatoria que denota la fortuna del jugador. Hallar la función de densidad de la variable aleatoria $X$.

3. *a*) Sean $X, X_n, n = 1,2,...$ variables aleatorias reales definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, demuestre que

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ implica que } X_n \xrightarrow{d} X \text{ cuando } n \to \infty.$$

   *b*) Sea $X_1, X_2, ...X_n$ variables aleatorias independientes de $\mathbf{U}(0,1)$. Demuestre que:

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2} \xrightarrow{p} \frac{3}{2} \text{cuando} n \to \infty.$$

4. *a*) Supongamos $\{N_n, n \geq 0\}$una sucesión de variable aleatoria normal. Demostrar que $N_n \xrightarrow{d} N_0$ si sólo si $E(N_n) \to E(N_0)$ and $Var(N_n) \to Var(N_0)$.

   *b*) Verificar (a) para las variables aleatorias exponenciales.

5. Sean $X_1, X_2, ... \quad > 0$ variables aleatorias i.i.d. con $m = \mathbb{E}log(X_i)$ y $\sigma^2 = var(log(X_i)) < \infty$. Si

$$P_n = e^{-m\sqrt{n}} \prod_{i=1}^{n} X_i^{1/\sqrt{n}}.$$

   Demostrar que la ley de $P_n$ converge débilmente a la ley de $e^Z$, donde $Z \sim N(m, \sigma^2)$.

6. Clasifique los estados de las cadenas de Markov con matrices de transción $P$ y espacios de stados dados por;

   *a*) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ para $p \in [0, 1/2]$

$$P = \begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}$$

   *b*) $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ para $p \in [0, 1]$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 1-p \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ p & 0 & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

   En cada caso calcule $P^n$, la matriz de transición en $n$ pasos y el tiempo medio de recurrencia de cada estado.
   [Sugerencia: Diagonalize la matriz $P$.]

PARTE II - ESTADÍSTICA

1. Suponga que $X_1, X_2, ...X_n$ son variables aleatorias Normales $N(\mu\sigma^2)$, independientes y que $\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ el estimador para la media poblacional. Muestre que :

   *a*) El estimador es insesgado

   *b*) El estimador es suficiente

   *c*) El estimador es eficiente

   *d*) La distribución de $\widehat{\mu}$ es asimptóticamente Normal.

2. En una regresión bivariada $Y = \alpha + \beta X + u$, se cuenta con la siguiente información:

| | $X_i$ | $Y_i$ | $a = (X_i - \overline{X})$ | $b = (Y_i - \overline{Y})$ | $a * b$ | $a^2$ | $b^2$ | $Y_i$(estimado) | $e_i(residuos)$ | $e_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 21 | 4 | 7.5 | 1 | 7.5 | 56.25 | 1 | | | |
| | 15 | 3 | 1.5 | 0 | 0 | 2.25 | 0 | | | |
| | 15 | 3.5 | 1.5 | 0.5 | 0.75 | 2.25 | 0.25 | | | |
| | 9 | 2 | -4.5 | -1 | 4.5 | 20.25 | 1 | | | |
| | 12 | 3 | -1.5 | 0 | 0 | 2.25 | 0 | | | |
| | 18 | 3.5 | 4.5 | 0.5 | 2.25 | 20.25 | 0.25 | | | |
| | 6 | 2.5 | -7.5 | -0.5 | 3.75 | 56.25 | 0.25 | | | |
| | 12 | 2.5 | -1.5 | -0.5 | 0.75 | 2.25 | 0.25 | | | |
| **Suma** | 108 | 24 | | | 19.5 | 162 | 3 | | | |

   *a*) Utilice ésta para calcular los estimadores de $\alpha$ y $\beta$

   *b*) Calcule el $R^2$ de la regresión

   *c*) Calcule la varianza de la estimación.