Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

EXAMEN DE DOCTORADO Y MAESTRÍA/ Mayo-08
Tema: Probabilidad y Estadística

TIEMPO: TRES HORAS

1. Sea $\{X_j, j \geq 1\}$ son v.a. independientes con

$$P[X_n = n^{-k}] = P[X_n = -n^{-k}] = \frac{1}{2}.$$

   Verificar que:

   a) si $k > 1/2$, $\sum_n X_n$ converge casi siempre.

   b) $k > 1/2$ es un condición necesario para convergencia.

   c) $\sum_n \mathbf{E}|X_n| < \infty$ sii $k > 1$

2. Sea $\{X_n, n \geq 1\}$una suceción de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución normal estándar. Demostrar que:

$$p\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{\log n}} = \sqrt{2}\right) = 1.$$

3. Sean $\{\xi_n, n \geq 1\}$ variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, tales que $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2}$. Sea $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_n$. Para cada $j \in \mathbf{S}$, sea $T_j = inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$. Demuestre lo siguiente:

   a) $\{X_n, n \geq 1\}$ es una cadena de Markov irreducible.

   b) $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = 1$, para cada $i, j \in \mathbf{S}$.

4. a). Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme U(0,1). Sea Y= -2logX. Cómo es la distribución de Y? Le parece conocida?

b). Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & \text{si } x,y > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

i) Muestre que X, Y son independientes.

ii) Calcule la densidad de $Z = X + Y$

5. En el modelo lineal simple $y = \alpha + \beta x + u$ se tiene que:

$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}$ y

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$$

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{SST}$$

donde $\sum (y_i - \overline{y})^2 = \sum (\hat{y}_i - \overline{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \Leftrightarrow SST = SSE + SSR$

y $e_i = residuos = y_i - \hat{y}_i$

Muestre que

$R^2 = \hat{\beta}^2 \frac{S_x^2}{S_y^2}$ donde S_x^2 y S_y^2 son las varianzas de x y y, respectivamente.

6. a) Demuestre que media y varianza de la distribución geométrica dada por

$f(x) = pq^{x-1}$ $x = 1,2,3,\ldots$ son $E(X) = \frac{1}{p}$ y $V(X) = \frac{q}{p^2}$

b) Con base en una muestra $X_1, \ldots X_n$ iid encuentre un estimador que utilice toda la información dada $X_1, \ldots X_n$ para p.