Examen de área (Lógica)
Octubre de 2024

1. Un grupo G es *de torsión* si todo elemento de G tiene orden finito. Muestre que la clase de los grupos de torsión no es axiomatizable en primer orden en el lenguaje de grupos $L = \{+\}$.

2. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Muestre que las siguientes definiciones de ser recursivamente enumerable son equivalentes:
   (a) A es la imagen de una función recursiva total.
   (b) A es el dominio de una función recursiva.

3. Sea T teoría enumerable ω-categórica, $\mathcal{M}$ un modelo de T y $A \subseteq M$. Muestre que A es finito si y solo si $\operatorname{acl}(A)$ es finito.

4. Muestre que $(\mathbb{Z}, S)$ es pseudo-finito pero $(\mathbb{N}, S)$ no lo es (en ambas estructuras S es la función sucesor).

5. Considere la afirmación:

   Para cualquier conjunto G existe una función
   $\circ : G \times G \to G$ *tal que* $(G, \circ)$ *es un grupo.* $(\star)$

   Trabajando en ZF, demuestre que $(\star)$ implica el axioma de elección.

   Ayuda: para bien ordenar el conjunto A, use una operación de grupo en un conjunto de la forma $G = A \cup \aleph_\alpha$.

6. Sea κ un cardinal tal que $\aleph_0 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) $\operatorname{cof}(\kappa) > \omega$.
   (b) Para todo $A \in [\mathbb{R}]^\kappa$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|A \cap (-\infty, q)| = |A \cap (q, \infty)| = \kappa$.