

EXAMEN DE ÁREA - LÓGICA
MAYO DE 2023

1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ recursivamente enumerables. Pruebe que existen $A_0 \subseteq A$ y $B_0 \subseteq B$ recursivamente enumerables tales que $A_0 \cap B_0 = \emptyset$ y $A_0 \cup B_0 = A \cup B$.
2. Demuestre que existe un campo ordenado no arquimediano (en donde hay elementos mayores que cualquier suma finita de la unidad multiplicativa).
3. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) Para cualquier conjunto enumerable $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $A \setminus A_n$ es finito para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Para cualquier función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $f \upharpoonright A$ es constante o finito-a-uno.
4. Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}$ es un *conjunto con distancias únicas* (CDU) si para cualesquiera $a, b, c, d \in A$ se tiene que

$$a - b = c - d \neq 0 \implies a = c \wedge b = d.$$

Demuestre que existe un CDU no enumerable.

5. Sea

$$\mathcal{M} := \{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega, \oplus\},$$

donde $\oplus$ es la suma por componentes del producto cartesiano.

- Demuestre que la teoría de grupos abelianos infinitos en donde todo elemento diferente de la identidad tiene orden 2 es categórica en todo cardinal infinito.
 - Demuestre que en $\mathcal{L} := \{\oplus\}$ la teoría $Th(\mathcal{M})$ elimina cuantificadores.
6. Demuestre el Teorema de Ryll-Nardzewski: Una teoría enumerable completa T con modelos infinitos es $\aleph_0$ categórica sí y sólo sí todo tipo de T es aislado.