# EXAMEN DE ÁREA – LÓGICA
# MAYO DE 2022

(1) Digamos que la estructura $\mathcal{M}_2$ es *definible en* $\mathcal{M}_1$ si existe un $n$ y un subconjunto definible $X$ de $(M_1)^n$ tal que $X$ es el universo de $\mathcal{M}_2$, y para cada función y relación básica en el lenguaje de $\mathcal{M}_2$, su interpretación en $\mathcal{M}_2$ es definible en $\mathcal{M}_1$. (Aquí, "definible" quiere decir "definible sobre $\emptyset$", y note que los lenguajes de $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ podrían ser distintos.)

Demuestre que si $\mathcal{M}_2$ es definible en $\mathcal{M}_1$ y $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_1)$ es $\omega$-categórica, entonces $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_2)$ es $\omega$-categórica también.

(2) Adicionalmente a los axiomas de ZFC, supongamos que para cada ordinal $\alpha < \omega_1$ con cofinalidad $\omega$, la identidad $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ se cumple. Demuestre que $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$.

(3) Sea $A \subseteq \omega$ un conjunto que es recursivamente enumerable pero no es recursivo. Demuestre que la función $f : \omega \to \omega$ definida por

$$f(n) = |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|$$

no es recursiva.

(4) Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con un símbolo de relación binaria $<$ y un símbolo de relación unaria $P$.

(a) Describa una $\mathcal{L}$-estructura enumerable $\mathcal{M}$ tal que las siguientes dos clases son iguales:

(i) la clase de todas las $\mathcal{L}$-estructuras finitas que son isomorfas a subestructuras de $\mathcal{M}$, y

(ii) la clase de todas las $\mathcal{L}$-estructuras finitas en las cuales $<$ es un orden lineal estricto.

(b) Para la estructura $\mathcal{M}$ que encontró en el punto anterior, determine si su teoría completa es $\omega$-categórica o no.

(5) Suponga que $\mathcal{M}$ es un modelo y $\{a_i : i \in \omega\}$ una *sucesión indiscernible* de elementos de $M$: es decir, si $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ y $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ son dos sucesiones crecientes de índices, entonces

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}).$$

Demuestre que existe una extensión elemental $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ que contiene una sucesión indiscernible $\{a_i : i \in \mathbb{Q}\}$ (extendiendo la sucesión indiscernible original, y indexada por $\mathbb{Q}$).