EXAMEN DE ÁREA – LÓGICA
MAYO DE 2019

(1) Demuestre que la teoría T de órdenes lineales densos sin extremos es decidible.

(2) Sea T una teoría en el lenguaje $\{+, 0\}$ con un símbolo de función binaria $+$ y un símbolo de constante 0 tal que los modelos de T son todos los grupos abelianos infinitos de exponente 2 (es decir, para cada $a \in (G, +, 0)$, $a + a = 0$).

  (a) Demuestre que T es completa y $\aleph_0$-categórica.

  (b) Demuestre que T **no** es finitamente axiomatizable.

(3) (a) Sea $\mathcal{L} = \{P_i : i \in \omega\}$ un lenguaje con símbolos de predicado unario P_i y sea T la $\mathcal{L}$-teoría axiomatizada por todas las sentencias $\varphi_{I,J}$ donde $I, J \subseteq \omega$ finitos y disjuntos, donde

$$\varphi_{I,J} = \exists x \left(\bigwedge_{i \in I} P_i(x) \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg P_j(x) \right).$$

  Demuestre que T tiene precisamente $2^{\aleph_0}$ modelos enumerables (salvo isomorfismo).

  (b) Ahora sea $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ la exapnsión por símbolos de función $\langle f_\sigma : \sigma \in 2^\omega \rangle$. Describa una expansión T' de T al lenguaje $\mathcal{L}'$ tal que todo 1-tipo completo en T se realiza en todo modelo de T'.

(4) Demuestre que no existe un conjunto $A \subseteq \omega \times \omega \times \omega$ tal que A es recursivamente enumerable y

$$\{A_i : i \in \omega\} = \{\text{grafo}(g) : g \text{ es recursiva y creciente}\},$$

donde $A_i = \{(n, m) : (i, n, m) \in A\}$.

(5) Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular, y sea $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ una colección de subconjuntos de κ disyuntos dos a dos. Demuestre que el conjunto $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ es estacionario si y solamente si $B = \{\min A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es estacionario o existe algún $\alpha < \kappa$ tal que A_α es estacionario.

(6) Sea κ un cardinal infinito. Demuestre que si λ es el menor cardinal τ tal que $\kappa^\tau > \kappa$, entonces λ es un cardinal regular.