EXAMEN DE ÁREA – LÓGICA
DICIEMBRE DE 2018

(1) Sea T una teoría $\aleph_0$-categórica en un lenguaje $\mathcal{L}$ que incluye un símbolo de función unaria f. Demuestre que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T \vdash \forall x \left[f(x) = x \vee f^2(x) = x \vee \ldots \vee f^n(x) = x \right],$$

donde "$f^i(x)$" denota la comosición de f con sí misma i veces.

(2) Sea T una teoría completa en un lenguaje enumerable que tiene $\aleph_1$ modelos enumerables no isomorfos. Demuestre que T tiene un modelo $\aleph_0$-saturado de tamaño menor o igual a $\aleph_1$.

(3) Recuerde que una *función parcial recursiva* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es una función $f : A \to \mathbb{N}$, donde $A \subseteq \mathbb{N}^k$, tal que el conjunto de pares $\{(x, f(x)) : x \in A\}$ es recursivamente enumerable.

Demuestre que para toda función parcial recursiva $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, existe una función parcial recursiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{N}$,

(a) $x \in \operatorname{dom}(g) \Leftrightarrow \exists y\, [(x, y) \in \operatorname{dom}(f)]$; y

(b) $\exists y\, [(x, y) \in \operatorname{dom}(f)] \Rightarrow (x, g(x)) \in \operatorname{dom}(f)$.

(4) Sea $*$ una operación binaria sobre $\{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ que satisface las propiedades:
(a) es conmutativa ($\alpha * \beta = \beta * \alpha$);
(b) $\alpha * \beta \geq \alpha$; y
(c) si λ es un ordinal límite, $\lambda < \omega_1$

$$\alpha * \lambda = \sup_{\beta < \lambda} \alpha * \beta.$$

Demuestre que para todo $S \subseteq \omega_1$ enumerable, existe un $\alpha < \omega_1$ tal que para todo $\beta \in S$, $\beta * \alpha = \alpha$.

(5) Sea $\mathcal{L} = \{<, P\}$ donde $<$ es una relación binaria y P es una relación unaria, y sea T la teoría que expresa que $<$ es un orden lineal denso sin máximo ni mínimo y que P es denso y codenso;

es decir, T contiene axiomas

$$\forall x, y\,(x < y \to \exists z(x < z < y \wedge P(z)))$$

y

$$\forall x, y\,(x < y \to \exists z(x < z < y \wedge \neg P(z)))\,.$$

(a) Demuestre que T es $\aleph_0$-categórica y tiene eliminación de cuantificadores.

(b) Demuestre que T tiene por lo menos dos modelos no isomorfos de tamaño $2^{\aleph_0}$.

(6) Demuestre que para todo ordinal infinito α, existe una biyección entre $\alpha \times \alpha$ y α.